

## 强噪声背景下基于子空间的盲信号提取

黄晓斌<sup>①</sup> 刘海涛<sup>①</sup> 万建伟<sup>①</sup> 胡德文<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

<sup>②</sup>(国防科技大学机电工程与自动化学院 长沙 410073)

**摘要** 低信噪比下的去噪一直是一个难题,最近 Emir 等人提出了 Independent Component Analysis(ICA)去噪方法,该方法在光学功能成像中得到了成功应用。但研究发现在极低信噪比下,由于观测数据的样本协方差矩阵具有奇异性,这使得 ICA 去噪算法中的白化处理步骤无法进行。为解决这一问题,本文利用子空间的概念,在 ICA 去噪方法的基础上提出了一种新的基于子空间的 ICA(ICA based on signal Subspace, SICA)去噪方法。仿真表明该方法能在极低信噪比下有效去噪,同时与传统的滤波去噪相比, SICA 去噪方法在去噪的同时还能够成功地将频域重叠的信号正确分离。

**关键词** 盲信号提取,独立成分分析,子空间分解,滤波

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)11-2037-04

## Blind Signal Extraction Based on Subspace over High Noise Source Background

Huang Xiao-bin<sup>①</sup> Liu Hai-tao<sup>①</sup> Wan Jian-wei<sup>①</sup> Hu De-wen<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(College of Electronics Science and Technology, National of University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

<sup>②</sup>(College of Mechatronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** It is a difficult problem to denoise in the low SNR, recently, Emir et al present a novel ICA denoising method, this method has been successfully applied to the function optical imaging. But in the very low SNR circumstance, because of the covariance matrix of the observed signals being singularity, the ICA denoising method can not be used. In order to resolve this problem, a new SICA denoising method based on the signal subspace is presented in this paper. The simulations show that compared to the ICA denoising method and the traditional filtering denoising methods, the method can not only get rid of the noise, but can successfully separation the signals.

**Key words** Blind signal extraction, Independent Component Analysis(ICA), Subspace decomposition, Filtering

### 1 引言

去噪是信号处理领域内的一个基本问题,传统的方法包括滤波去噪、小波去噪、基于信号子空间的去噪方法等,这些传统方法在频域混叠、低信噪比情况下都无法有效应用。为此,Emir等人在处理光学功能成像数据时,提出了一种基于独立成分分析(Independent Component Analysis, ICA)的去噪方法<sup>[1]</sup>,该方法是将噪声和信号视为不同的独立源,通过将它们分离而达到去噪的目的。实验证明,在信噪比较低(-20~0dB)的情况下,ICA去噪方法的性能明显好于小波去噪。但进一步研究发现,ICA去噪方法在极低信噪比下( $\leq -30$ dB),由于信号的微弱性,会导致观测数据的协方差矩阵具有奇异性,这使得ICA算法中白化预处理过程出现降维现象<sup>[2]</sup>,从而只能分离出噪声。为解决这一问题,本文提出了一种基于子空间技术的ICA(ICA based on Subspace, SICA)

去噪方法,该方法首先将观测数据分解为多个子空间,然后在各个子空间中使用ICA算法将信号与噪声进行分离而达到去噪的目的。SICA去噪方法与传统的去噪方法和ICA去噪方法相比,具有两个优点:(1)能在极低信噪比下有效去噪;(2)去噪的同时能将各信号正确分离。

### 2 ICA 与 SICA 去噪方法

#### 2.1 ICA 去噪方法介绍

设有  $P$  个信号源和  $Q$  个噪声源,以及  $P+Q$  次独立观测。ICA去噪方法是在基于某个准则下(如最大非高斯性<sup>[3]</sup>),直接利用  $P+Q$  次独立观测分解得  $P+Q$  个独立源<sup>[2]</sup>,然后根据先验知识从中提取出  $P$  个信号。该方法在信噪比极低的情况下,由于ICA算法中白化预处理步骤的失效,将导致分解得到的信号源个数少于实际的个数,极端情况下只包含噪声源。

#### 2.2 SICA 去噪方法介绍

**2.2.1 确定观测数据的子空间维数** 设有  $P$  个信号源和  $Q$  个噪声源  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_P, n_1, n_2, \dots, n_Q)^T$ , 以及  $P+Q$  次独立

2005-03-09 收到, 2005-09-02 改回

国家自然科学基金(30370416, 60225015) 和国家 973 预研专项基金(2001CCA04100)资助课题

观测  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{P+Q})^T$ , 利用式(1)对观测数据进行特征分解:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= E[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T \\ \mathbf{G}\mathbf{V} &= \mathbf{V}\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_{Q+P}] \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_{Q+P}) \end{aligned} \right\} (1)$$

式中  $\mathbf{e}_i$  和  $\lambda_i$  为特征向量和特征值。由于某些观测源的微弱性(噪声和信号都有可能), 会使得一部分特征值为 0, 不妨设  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{d_1} = 0$ ,  $0 < \lambda_{d_1+1} \leq \lambda_{d_1+2} \leq \dots \leq \lambda_{d_1+d_2}$ ,  $d_1 + d_2 = P + Q$ 。由此可见观测空间被分为两个子空间, 它们的维数分别为  $d_1$  和  $d_2$ ,  $d_1$  对应弱子空间,  $d_2$  对应强子空间, 记  $d = \max(d_1, d_2)$ 。

2.2.2 SICA 去噪方法 设有  $P + Q + d - 1$  次独立观测  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{P+Q+d-1})^T$ , 它们与观测源之间满足:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_k^T, \dots, \mathbf{a}_{P+Q+d-1}^T)^T$ ,  $\mathbf{a}_k$  为  $1 \times (P + Q)$  的混合向量。进一步将式(2)分离成  $d$  个组合观测, 即

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{s}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{s}, \dots, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{s}, \dots, \quad \mathbf{x}_d = \mathbf{A}_d\mathbf{s} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{x}_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+P+Q-1})^T$ ,  $\mathbf{A}_k = (\mathbf{a}_k^T, \mathbf{a}_{k+1}^T, \dots, \mathbf{a}_{k+P+Q-1}^T)^T$ , 且  $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2 \neq \dots \neq \mathbf{A}_d$ 。现在的问题是如何在极低信噪比下, 利用所观测到的  $\mathbf{x}$  和  $s_1, s_2, \dots, s_p, n_1, n_2, \dots, n_Q$  之间的独立特性来分离出  $s_1, s_2, \dots, s_p$ ? 下面的 SICA 去噪方法能够解决这一问题。

步骤 1 求解观测数据  $\mathbf{x}_k$  对应的两个子空间  $\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)}$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)}$ ;

利用式(4)获取  $\mathbf{x}_k$  的样本协方差矩阵  $\mathbf{G}_k$ , 并对  $\mathbf{G}_k$  进行特征值分解,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_k &= E[\mathbf{x}_k - E(\mathbf{x}_k)][\mathbf{x}_k - E(\mathbf{x}_k)]^T \\ \mathbf{G}_k\mathbf{V}_k &= \mathbf{V}_k\mathbf{A}_k = \left[ \mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_i^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{Q+P}^{(k)} \right] \\ &\quad \cdot \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_i^{(k)}, \dots, \lambda_{Q+P}^{(k)}) \end{aligned} \right\} (4)$$

式中  $\mathbf{e}_i^{(k)}$  和  $\lambda_i^{(k)}$  为特征向量和特征值。由 2.2.1 节中的结论可知,  $\lambda_1^{(k)} = \lambda_2^{(k)} = \dots = \lambda_{d_1}^{(k)} = 0$ ,  $0 < \lambda_{d_1+1}^{(k)} \leq \lambda_{d_1+2}^{(k)} \leq \dots \leq \lambda_{d_1+d_2}^{(k)}$ 。令  $\hat{\mathbf{A}}_1^{(k)} = \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_{d_1}^{(k)})$ ,  $\hat{\mathbf{V}}_1^{(k)} = [\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{d_1}^{(k)}]$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_2^{(k)} = \text{diag}(\lambda_{d_1+1}^{(k)}, \lambda_{d_1+2}^{(k)}, \dots, \lambda_{d_1+d_2}^{(k)})$ ,  $\hat{\mathbf{V}}_2^{(k)} = [\mathbf{e}_{d_1+1}^{(k)}, \mathbf{e}_{d_1+2}^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_{d_1+d_2}^{(k)}]$ 。则两个子空间分别为  $\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)} = \hat{\mathbf{V}}_1^{(k)}(\hat{\mathbf{V}}_1^{(k)})^T \mathbf{x}_k$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)} = \hat{\mathbf{V}}_2^{(k)}(\hat{\mathbf{V}}_2^{(k)})^T \mathbf{x}_k$ 。

步骤 2 在两个子空间中, 形成两个  $d$  维数据向量  $\mathbf{y}_1$  和  $\mathbf{y}_2$ , 构造两个观测模型;

由式(5)计算  $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}$  的平均信号, 记为  $y_i^{(k)}$ :

$$y_i^{(k)} = \frac{1}{P+Q} \sum_{j=1}^{P+Q} \tilde{x}_{i,j}^{(k)}, \quad (i=1,2) \quad (5)$$

式中  $\tilde{x}_{i,j}^{(k)}$  为  $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}$  的第  $j$  个分量。因此数据向量为  $\mathbf{y}_i = (y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \dots, y_i^{(k)}, \dots, y_i^{(d)})^T$ , 相应的信号模型为

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{B}_i\mathbf{v}_i, \quad (i=1,2) \quad (6)$$

式中  $\mathbf{B}_i$  为未知的  $d$  维混合方阵。显然  $(\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T) = (s_1, s_2, \dots, s_p, n_1, n_2, \dots, n_Q)^T$ , 这表示  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$  可能都是信号和噪声的混合。

步骤 3 利用 fast fixed-point 算法<sup>[4]</sup>获得观测源的估计

$\hat{\mathbf{v}}_i$ ;

使用式(7)获得信号向量  $\mathbf{y}_i$  的白化信号  $\mathbf{z}_i$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_i &= E[\mathbf{y}_i - E(\mathbf{y}_i)][\mathbf{y}_i - E(\mathbf{y}_i)]^T \\ \mathbf{H}_i\mathbf{V}_i &= \mathbf{V}_i\mathbf{A}_i \\ \mathbf{z}_i &= \mathbf{A}_i^{-1/2}\mathbf{V}_i^T[\mathbf{y}_i - E(\mathbf{y}_i)] \end{aligned} \right\}, \quad i=1,2 \quad (7)$$

设  $\mathbf{W}_i = (\mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{w}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{w}_k^{(i)}, \dots, \mathbf{w}_d^{(i)})$  为式(6)对应的分离矩阵, 即  $\mathbf{W}_i = \mathbf{B}_i^{-1}$ , 使用式(8)描述的 fast fixed-point 算法求解分离矩阵:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_k^{(i)} &\leftarrow E[\mathbf{z}_i g((\mathbf{w}_k^{(i)})^T \mathbf{z}_i)] - E[g'((\mathbf{w}_k^{(i)})^T \mathbf{z}_i)]\mathbf{w}_k^{(i)} \\ \mathbf{W}_i &\leftarrow (\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i^T)^{-1/2}\mathbf{W}_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$k=1,2,\dots,d; \quad i=1,2$$

通常可取  $g(x) = \tanh(x)$ 。则  $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{W}_i\mathbf{y}_i$  为估计信号。

步骤 4 利用先验信息从  $\hat{\mathbf{v}}_i$  中提取信号  $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_p$ 。

### 3 去噪性能衡量

根据信号与噪声的强弱, 子空间有如下几种分布:

- (1) 信号与噪声各自在不同的子空间;
- (2) 信号在一个子空间内, 噪声跨越两个子空间;
- (3) 噪声在一个子空间内, 信号跨越两个子空间;
- (4) 信号与噪声都跨越两个子空间。

为统一起见, 我们按如下方式定义输入信噪比: 首先将  $s_1, s_2, \dots, s_p, n_1, n_2, \dots, n_Q$  都进行归一化(均值为 0, 方差为 1), 由于本文是研究极低信噪比的去噪问题, 则弱子空间中一定包含信号, 因此第  $k$  次独立观测的信噪比定义为

$$\text{SNR}_{\text{in}}^{(k)} = 10 \lg \left( \frac{\sum_{i \in \Omega_1} a_{k,i}^2}{\sum_{j \in \Omega_2} a_{k,j}^2} \right) \quad (9)$$

式中  $\mathbf{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,P+Q})$ ,  $\Omega_1$  表示弱子空间,  $\Omega_2$  表示强子空间, 上述定义实质上是弱子空间包含的能量与强子空间包含的能量之比。这种定义与传统的信噪比在某些情况下是不同的, 如在上述情况(2)~(4)中, 分子部分引入了噪声, 然而由于该噪声是在弱子空间中, 并且强弱子空间能量相差 40dB 以上(本文的研究范围), 因此引入的噪声对信噪比的数值影响不大; 在情况(3)~(4)中, 分母部分引入了信号, 注意到本文的研究目的不但是去噪, 而且要重构所有的信号, 因此在重构某一信号时, 其它的信号也可以视同为“噪声”。总的输入信噪比定义如下:

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{1}{P+Q+d-1} \sum_{k=1}^{P+Q+d-1} \text{SNR}_{\text{in}}^{(k)} \quad (10)$$

使用文献[5]定义的重构误差来衡量去噪性能:

$$\text{Error} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \frac{\|s_k - \hat{s}_k\|_2}{\|s_k\|_2} \times 100\% \quad (11)$$

在计算 Error 前, 应先将  $s_k$  和  $\hat{s}_k$  都进行归一化处理, 当 Error 为 0 时, 信号得到完全重构, 去噪性能最好。

## 4 仿真实验与分析

### 4.1 仿真实验

设置  $P=Q=2$ ，即两个信号和两个噪声。信号  $s_1$  和  $s_2$  为两个语音信号，可从网络上获得<sup>1)</sup>；两个噪声由仿真产生， $n_1$  为高斯白噪声， $n_2$  为散弹噪声。图 1 描述了 4 个原始信号，图 2 是这 4 个原始信号的频谱图。我们考虑最复杂的情况(4)，显然  $d_1=d_2=2$ ，按如下方式设置混合矩阵的系数： $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{51}$  服从  $[0, \sqrt{5}]$  间的均匀分布， $a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}, a_{52}$  服从  $[0, \sqrt{5 \times 10^{-\text{SNR}_m/10}}]$  间的均匀分布， $A$  的其它元素按如下设置：

$$\left. \begin{aligned} a_{k,3} &= \sqrt{5 - a_{k,1}^2} \\ a_{k,4} &= \sqrt{5 \times 10^{-\text{SNR}_m/10} - a_{k,2}^2} \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq k \leq 5 \quad (12)$$

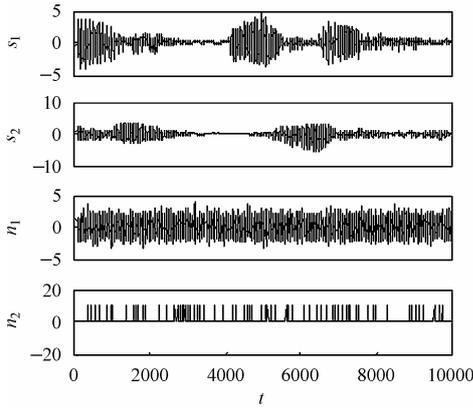


图 1 4 个原始信号

Fig.1 Four original sources  $s_1, s_2, n_1, n_2$

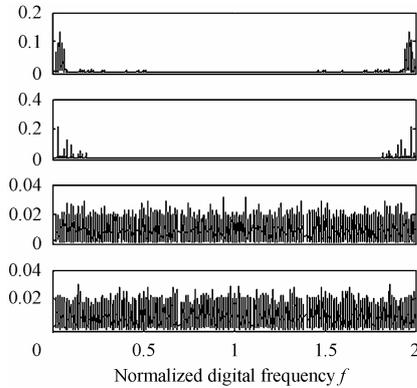


图 2 4 个原始信号的频谱图

Fig.2 Spectrums of the four original sources

在  $\text{SNR}_m = -50\text{dB}$  下， $A$  的一个样本为

$$A = \begin{pmatrix} 1.9126 & 207.3303 & 1.1584 & 676.0282 \\ 0.6643 & 60.9472 & 2.1351 & 704.4753 \\ 1.4823 & 253.9670 & 1.6741 & 659.9248 \\ 0.6446 & 403.7351 & 2.1411 & 580.5153 \\ 0.9494 & 131.0088 & 2.02451 & 694.8645 \end{pmatrix}, \text{ 可以验证每}$$

次观测的信噪比  $\text{SNR}_m^{(k)}, 1 \leq k \leq 5$  都为  $-50\text{dB}$ 。图 3 是在该混合矩阵下的 5 个观测序列。图 4 为经过 SICA 算法第二步

处理后，在两个子空间中各自得到的二维信号向量。图 5 和图 6 为原始信号与重构信号的对比，经计算可得重构误差为

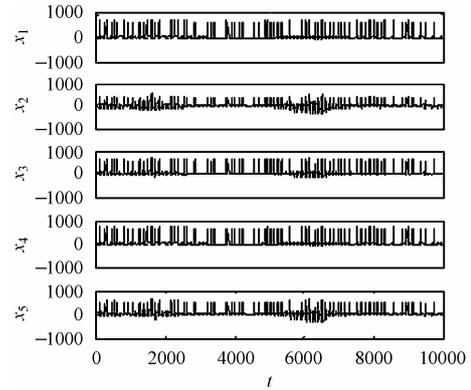


图 3 5 个混合信号 ( $\text{SNR}_m = -50\text{dB}$ )  
Fig.3 Five mixtures  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  ( $\text{SNR}_m = -50\text{dB}$ )

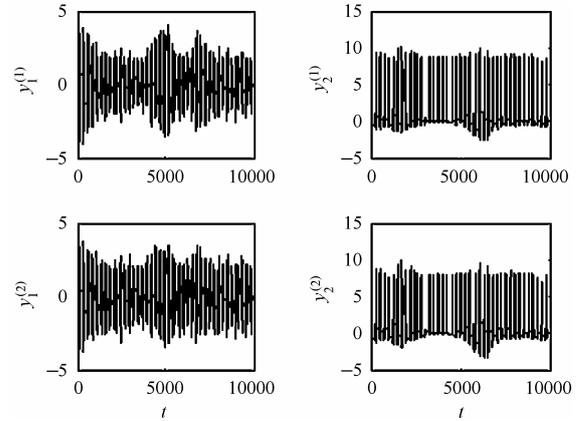


图 4 二维信号向量  
Fig.4 Two dimension vector  $y_1$  and  $y_2$

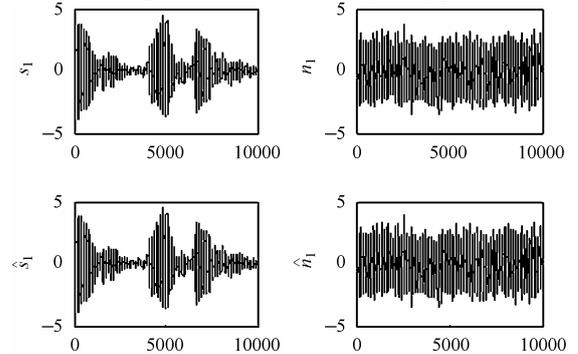


图 5 原始信号与重构信号对比  
Fig.5 Comparison of sources and their estimation

<sup>1)</sup> <http://www.ele.tue.nl/ica99/>

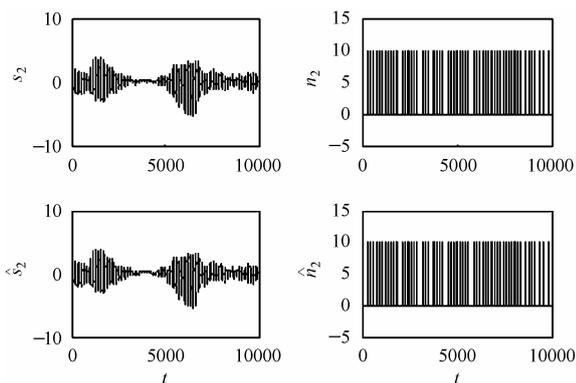


图6 原始信号与重构信号对比

Fig.6. Comparison of sources and their estimation

6.23%。设置  $SNR_{in}$  变化范围为  $-50\text{dB} \sim -40\text{dB}$ ，在每个信噪比下独立进行 10 次实验，混合矩阵  $A$  在每个信噪比下随机设置，噪声在每次实验都随机产生。10 次实验的平均 Error 作为该信噪比下的 Error。图 7 给出了 Error 随输入信噪比的变化情况。

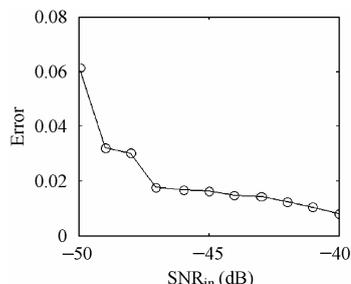


图7 重构误差随输入信噪比变化

Fig.7 Variation of error along with the input SNR

#### 4.2 实验分析

如果使用 ICA 去噪方法来处理本文数据，可以从 5 个观测信号中任意取 4 个，但由于信噪比极低，所取 4 个观测信号的样本协方差矩阵具有奇异性(如取前 4 个观测信号，对样本协方差矩阵进行特征值分解可得特征值向量为  $\lambda = [0, 0, 0.0682 \times 10^4, 1.9186 \times 10^4]$ )，这使得 ICA 算法中白化预处理步骤无法进行。而本文的 SICA 算法在经过子空间分解后，所得信号向量  $y_1$  和  $y_2$  的样本协方差矩阵是非奇异的(如对上例中信号向量的样本协方差矩阵进行特征值分解可得特征值向量为  $\lambda_1 = [0.0030, 1.9970]$  和  $\lambda_2 = [0.0004, 1.9996]$ )。因此，SICA 算法通过分解子信号的方法成功解决了原 ICA 去噪方法具有的奇异性。

从图 2 的频谱图可以看出，噪声是宽频带的，且由于信噪比极低，利用传统的基于频域滤波的方法去噪后，滤波信号中仍然会残留较强的噪声。另外，由于两个信号的频谱基本上是重叠的，传统的方法是无法将两者分开的。

从图 5 和图 6 中可以看出，SICA 算法不仅有效地去除

了噪声，而且 2 个信号也得到了很好的分离。从图 7 中可以看出，在极低信噪比，重构误差都保持在一个较低的水平。

#### 5 结束语

在极低信噪比下，本文提出的 SICA 去噪方法成功解决了原 ICA 去噪方法和传统滤波去噪方法的缺点。仿真实验表明 SICA 去噪方法在极低信噪比下具有优良的去噪性能。下一步的工作将研究 SICA 算法在有噪 ICA 模型( $x = As + n$ )下的去噪性能。

#### 参考文献

- [1] Emir E, Akgul B, Akin A, et al.. Wavelet denoising vs ICA denoising for functional optical imaging[A]. Proceedings of the 1st International IEEE EMBS Conference on Neural Engineering[C]. Capril Island, Italy, 2003: 384-387.
- [2] Hyvärinen A, Karhunen J, Oja E. Independent Component Analysis[M]. New York, Wiley, 2001: Chapter 6-8.
- [3] Bell A, Sejnowski T. An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution[J]. *Neural Computation*, 1995, 7(6): 1129-1159.
- [4] Hyvärinen A, Oja E. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis[J]. *Neural Computation*, 1997, 9(7): 1483-1492.
- [5] Zibulevsky M, Pearlmutter A. Blind source separation by sparse decomposition[J]. *Neural Computation*, 2001, 13(4): 863-882.

黄晓斌：男，1978 年生，博士生，研究领域为脑光学功能成像、模式识别等。发表论文 20 余篇。

刘海涛：男，1976 年生，博士生，研究领域为通讯信号处理。

万建伟：男，1964 年生，教授，博士生导师，主要研究领域为无源定位、多维智能信号处理。

胡德文：男，1963 年生，教授，博士生导师，主要从事脑光学功能成像、系统辨识、神经网络、图像处理等方面工作。