

基于时频子空间分解的宽带线性调频信号 DOA 估计¹

黄克骥 田 达 陈天麒

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘 要: 针对具有时变方向向量的宽带线性调频信号, 该文建立了基于短时 Wigner-Ville 分布 (WVD) 的空间时频分布矩阵, 通过对各个空间时频矩阵的特征分解获得对应的信号子空间和噪声子空间, 给出了基于时频子空间投影实现多个时频点综合估计信号 DOA 的算法。利用空间时频分布的前后向平滑解决了具有相同时频特性信号的均匀线阵 DOA 估计问题。算法不需要聚焦和插值等复杂的矩阵变换, 精度较高, 计算简便。仿真实验显示该算法性能显著优越于基于矩阵插值的宽带调频信号 DOA 估计算法。

关键词: 线性调频信号, 空间时频分布, 前后向平滑

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)03-0344-06

DOA Estimation of Wideband Chirp Signals Based on Time-Frequency Subspace Decomposition

Huang Ke-ji Tian Da Chen Tian-qi

(Dept of Electron. Eng., Univ. of Electron. Sci. and Tech. of China, Chengdu 610054, China)

Abstract In allusion to wideband chirp signals with time-varying direction vector, this paper constructs STFD(Spatial Time-Frequency Distribution) by short WVD(Wigner-Ville Distribution). By eigenvalue decomposition to get signal subspace and noise subspace, a algorithm of DOA estimation based on time-frequency subspace projection is proposed. Through spatial smoothing, the problem of DOA estimation of signals with the same time-frequency signature is solved. This method need not focusing and interpolation, has high precision and low computation. Simulation shows the algorithm has better performance than the method of DOA estimation of wideband signals based on matrix interpolation proposed recently.

Key words LFM signal, Spatial time-frequency distribution, Forward/backward smoothing

1 引言

对于平稳信号的 DOA 估计, 常规的子空间方法已被证明是行之有效的。将时频分析与空域相结合, 把子空间算法推广到更广泛的非平稳信号领域成为最近阵列信号研究的一个热点。其中比较有代表性的是 Amin 提出的空间时频分布^[1], 它的中心思想是用基于 Cohen 类的时频分布 (例如 Wigner-Ville Distrifation, WVD) 的空间时频矩阵代替传统的相关矩阵。由于时频方法的应用和更多地考虑到信号的特征, 空间时频算法具有了处理非平稳信号的能力和相对噪声更稳健、更优良的性能。

作为空间时频分布向宽带信号处理中的扩展, Gershman 提出了基于矩阵插值的宽带调频信号 DOA 估计算法^[2](简称 IMM)。但是矩阵插值作为一种近似计算, 在算法上相当复杂, 从性能上来说是比较粗糙和不稳健的。同时插值区间的选择也存在相当难度, 实际上需要 DOA 的先验信息。为了插值需要, Gershman 建立省略的阵列模型, 因此不可避免地存在模型误差。

¹ 2002-10-07 收到, 2003-01-22 改回

为了避免已有算法对时变方向向量的聚汇和插值等变换, 作者曾利用了一种特殊的阵列形式(对称阵列)实现宽带线性调频信号 DOA 的估计^[3], 算法显示了较好的估计精度, 但是对阵列形式的要求使算法应用受到局限, 算法也不能估计具有相同时频特性的多个信号。

本文受到 Amin 空间时频分布的思想启发, 通过短时 WVD 和时频点选取建立了时频相关矩阵。对于这些时变的空时频分布矩阵, 算法通过特征值分解获得其时变的信号子空间和噪声子空间, 并提出了子空间投影算法实现对时变空时频分布的综合, 给出了基于信号子空间和噪声子空间的 DOA 搜索函数。算法不需要聚汇和插值等矩阵变换, 适用于多种阵列形式。当阵列为均匀线阵时, 算法通过空时频分布矩阵的前后向平滑可以准确估计多个具有相同时频特性的信号的到达角。仿真实验也显示了算法的良好性能和稳健性。

2 数据模型

假设 P 个宽带线性调频信号入射到 M 个阵元的任意形式阵列上, 参考阵元位于坐标原点, 第 i 个阵元的位置坐标为 (y_i, z_i) 则第 i 个阵元的输出为

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^P s_m(t - \tau_{im}) + v_i(t), \quad i = 1, \dots, M \quad (1)$$

$$\tau_{im} = \frac{1}{c}(y_i \cos \theta_m + z_i \sin \theta_m) \quad (2)$$

$$s_m(t) = A_m e^{j(2\pi f_{m0}t + \pi K_m t^2)}, \quad m = 1, 2, \dots, P \quad (3)$$

这里的 $\{s_m(t)\}_{m=1}^P$ 为互不相关的宽带线性调频信号, $\{A_m\}_{m=1}^P$ 为包含信号幅度和初始相位的常数项, $\{f_{m0}\}_{m=1}^P$, $\{K_m\}_{m=1}^P$ 分别是信号的初始频率、调频斜率, $\{v_i(t)\}_{i=1}^M$ 为相互独立且与信号无关的高斯白噪声, τ_{im} 是 $s_m(t)$ 信号在第 i 阵元相对于参考阵元的延时, $\{\theta_m\}_{m=1}^P$ 为入射信号的到达角参数。

将式 (3) 代入式 (1) 可得

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^P e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{im} + j\pi K_m \tau_{im}^2} s_m(t) + v_i(t) \quad (4)$$

将其写为向量形式可以得到宽带线性调频信号阵列模型:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T = \sum_{m=1}^P \mathbf{a}_m(\theta, t) s_m(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{s}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{a}_1(\theta, t), \mathbf{a}_2(\theta, t), \dots, \mathbf{a}_P(\theta, t)] \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_m(\theta, t) = [1, e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{2m} + j\pi K_m \tau_{2m}^2}, \dots, e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{Mm} + j\pi K_m \tau_{Mm}^2}]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)]^T, \quad \mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_M(t)]^T \quad (8)$$

式 (5) 就是宽带线性调频信号阵列模型, 考虑到延时平方项 τ_{im}^2 比较小, 有的文献中将这项省去, 得到瞬时窄带模型

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^P \mathbf{b}_m(\theta, t) s_m(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{s}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(t) = [\mathbf{b}_1(\theta, t), \mathbf{b}_2(\theta, t), \dots, \mathbf{b}_P(\theta, t)] \quad (10)$$

$$\mathbf{b}_m(\theta, t) = [1, e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{2m}}, \dots, e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{Mm}}]^T \quad (11)$$

瞬时窄带模型虽然方向向量形式更加简化, 但是存在模型误差, 因此估计精度降低。本文后面的算法将基于 (5) 式的原始数据模型, 同时我们也会给出基于瞬时窄带模型的 DOA 估计方程。

3 基于短时 WVD 的空间时频分布

阵元输出的空间时频分布定义为

$$D(t, f) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \mathbf{x}(t + \tau) \mathbf{x}^H(t - \tau) e^{-j4\pi f \tau} d\tau \quad (12)$$

由式 (5) 可以看出由于方向向量的时变性使式 (12) 的积分结果变得非常复杂, 因此必须缩短积分区间长度使时变的方向向量在该区间内可近似视为不变, 这就是短时 WVD. 虽然信号短时 WVD 在时频域内不再成冲激分布, 但是它仍然具有沿瞬时频率分布的时频聚焦性, 便于进行信号的选择.

假设式 (12) 中 WVD 窗函数的长度足够短, 方向向量在该区间内近似不变, 即

$$\mathbf{a}_m(\theta, t + \tau) \cong \mathbf{a}_m(\theta, t - \tau) \cong \mathbf{a}_m(\theta, t), \quad m = 1, 2, \dots, P \quad (13)$$

短时 WVD 的窗函数长度 T_1 应满足下面条件:

$$\|\mathbf{a}_m(\theta, t + \tau_1) - \mathbf{a}_m(\theta, t + \tau_2)\| \ll \sqrt{M}, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [-T_1/2, T_1/2] \quad (14)$$

将式 (5), 式 (13) 代入式 (12), 可得

$$D(t, f) \cong \mathbf{A}(t) \mathbf{S}(t, f) \mathbf{A}^H(t, f) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (15)$$

$$\mathbf{S}(t, f) = \int_{-l}^l \mathbf{s}(t + \tau) \mathbf{s}^H(t - \tau) e^{-j4\pi f \tau} d\tau \quad (16)$$

式 (15) 和文献 [1] 中空间时频分布的结果是一致的, 也非常类似于 MUSIC 算法中阵元输出相关矩阵. $\mathbf{S}(t, f)$ 为信号 WVD 的自项和交叉项构成的矩阵. 为简化模型, 实现 DOA 估计, 下面我们将根据信号时频特性进行时频点选取.

上面提到线性调频信号沿其瞬时频率具有时频聚焦性, 如果沿某信号瞬时频率直线选取时频点, 则可以选出该信号并抑制其它信号成份. 线性调频信号瞬时频率遵循下面表达式:

$$f_m(t) = f_{m0} + K_m t \quad (17)$$

由于参考阵元的输出不含 DOA 信息, 通过对其输出的参数进行估计可以获得对信号初始频率, $\{f_{m0}\}_{m=1}^P$ 和调频斜率, $\{K_m\}_{m=1}^P$ 的估计, 从而计算出信号的瞬时频率. 经过以上步骤, 假设在第 m 信号的时频背鳍上选取时频点 $(t, f_m(t))$, 其它信号的 WVD 自项以及信号之间的交叉项在该时频点处取值很小, 可忽略不计, 因此式 (15) 可简化为

$$D_m(t) = D(t, f_m(t)) \cong \mathbf{a}_m(\theta, t) S_m(t, f_m(t)) \mathbf{a}_m^H(\theta, t) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (18)$$

$S_m(t, f)$ 为第 m 信号的短时 WVD 分布. 式 (18) 为基于短时 WVD 的宽带线性调频信号空间时频分布 (STFD) 方程.

4 基于时频子空间投影的 DOA 估计

经过观察, 发现式 (18) 的结构与宽带信号的频域相关矩阵非常类似. 因为 $\mathbf{a}_m(\theta, t)$ 是与时刻 t 有关的时变向量, 可以通过时域聚汇或插值变换到固定时刻对应的方向向量, 但是必然带来较大的计算量, 估计精度也不高. 如果考虑对空间时频矩阵 $D_m(t)$ 进行特征值分解, 最大特征值对应的特征向量为其 t 时刻的信号空间 $\mathbf{E}_s(t)$, 其余较小特征值所对应的特征向量构成 t 时刻的噪声子空间 $\mathbf{E}_N(t)$. t 时刻的方向向量 $\mathbf{a}_m(\theta, t)$ 与信号子空间 $\mathbf{E}_s(t)$ 张成相同的空间, 同时与噪声子空间 $\mathbf{E}_N(t)$ 正交. 由此可得出下面两个关系式:

$$\mathbf{E}_s(t) = T \mathbf{a}_m(\theta, t) \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_N^H(t) \mathbf{a}_m(\theta, t) = 0 \quad (20)$$

T 为常数, $E_s(t)$ 位于 $a_m(\theta, t)$ 张成的空间内, 式 (19) 可以用投影矩阵表示为

$$P_A^\perp E_s(t) = 0 \quad (21)$$

式中 $P_A^\perp = I - a_m(\theta, t)(a_m(\theta, t)^H a_m(\theta, t))^{-1} a_m(\theta, t)^H$ 是信号子空间的正交投影矩阵。由式 (21) 的结论, 并综合所有用于测向的时频点可以得到基于信号子空间投影的第 m 信号 DOA 估计搜索函数:

$$J_1(\theta) = \sum_{l=1}^{N_1} E_s^H(t_l) P_A^\perp E_s(t_l) \quad (22)$$

式中 N_1 为我们所选择的用于测向的时频点个数, t_l 是所选时频点对应的时刻。同样由式 (20) 可以得到基于噪声子空间的第 m 信号 DOA 估计搜索函数:

$$J_2(\theta) = \sum_{l=1}^{N_1} a_m^H(t_l) E_N(t_l) E_N^H(t_l) a_m(t_l) \quad (23)$$

最小化搜索函数式 (22) 和式 (23), 可得第 m 信号的 DOA 估计值:

$$\hat{\theta}_m = \min_{\theta} (J_1(\theta)) \quad (24)$$

$$\hat{\theta}_m = \min_{\theta} (J_2(\theta)) \quad (25)$$

式 (24) 为基于信号子空间的 DOA 估计 (简称 SSM), 式 (25) 是基于噪声子空间的 DOA 估计 (简称 NSM)。其它信号的 DOA 估计可以通过相同的步骤并行地实现。如果数据模型假设为瞬时窄带模型, 只需将搜索函数 $J_1(\theta)$ 和 $J_2(\theta)$ 中的方向向量变为 $b_m(\theta)$ 就可以了。

5 具有相同时频特性的线性调频信号 DOA 估计

式 (24) 和式 (25) 的搜索函数适用于时频特性显著分开的多个信号, 即每次时频点选取都只分离出一个信号。但是对于信号时频特性完全相同的信号, 则方法失效。假设与第 m 信号具有相同时频特性的信号共有 K 个, 与窄带相干信号类似, $\text{rank}(D_m(t)) < K$, 因此不能直接对空间时频分布矩阵 $D_m(t)$ 进行特征分解。但是当阵列为均匀线阵且阵列延时平方项很小时, 可以通过空间时频矩阵的前后向平滑实现 DOA 的准确估计。

假设将整个阵列分成 L 个子阵列, 每个子阵列的阵元数为 $M_0 > K$, 由空间时频分布矩阵 $D_m(t)$ 构造矩阵:

$$\bar{D}_m(t) = D_m(t) + J D_m^*(t) J \quad (26)$$

J 为交换矩阵 (反对角线元素为 1, 其它元素为 0)。通过下面公式计算前后向平滑的空间时频分布:

$$D_m^{bf}(t) = \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L Z_l^T \bar{D}_m(t) Z_l \quad (27)$$

其中 $Z_l = [e_l, e_{l+1}, \dots, e_{l+M_0-1}]$, e_l 为 $M \times M$ 的单位阵的第 l 列向量。

对前后向平滑后的空间时频分布 $D_m^{bf}(t)$ 进行特征值分解, 对应 K 个较大特征值的特征向量构成时频信号子空间 $E_s^{bf}(t)$, 而 $M_0 - K$ 个较小特征值对应的特征向量构成噪声子空间 $E_N^{bf}(t)$ 。由于信号空间由 K 个向量构成, 采用信号子空间投影法将会带来多维的搜索, 计算量

太大, 因此对于存在多个时频特性相同的信号, 选用噪声子空间法更为可行. 参考式 (23) 可得多个相同时频特性信号条件下的 DOA 搜索函数:

$$J_3(\theta) = \sum_{l=1}^{N_1} \mathbf{c}_m^H(t_l) \mathbf{E}_N^{bf}(t_l) (\mathbf{E}_N^{bf}(t_l))^H \mathbf{c}_m(t_l) \quad (28)$$

方向向量:

$$\mathbf{c}_m(\theta, t) = [1, e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{2m} + j\pi K_m \tau_{2m}^2}, \dots, e^{-j2\pi(f_{m0} + K_m t)\tau_{M_0 m} + j\pi K_m \tau_{M_0 m}^2}]^T \quad (29)$$

空间时频矩阵的前后向平滑只适用于均匀线阵, 对于其它阵列形式, 应采用相应的处理方法.

6 仿真实验

仿真实验 1 假设一个宽带线性调频信号 $s_1(t) = A_m e^{j2\pi(0.316t + 0.033t^2/N)}$ 从 $\theta = 60^\circ$ 方向入射到一 6 元均匀线阵上. 图 1 为快拍数 $N = 256$, 短时 WVD 窗函数长度 $L = 22$, 信号子空间算法 (SSM) 和噪声子空间算法 (NSM) 在不同信噪比 (SNR) 下的均方根误差 (RMSE) 曲线与插值矩阵算法 (IMM) 的性能曲线. 图 2 为本文两种算法在不同快拍数下均方根误差 (RMSE) 曲线与插值矩阵算法的性能曲线, 其中短时 WVD 窗函数长度 $L = N/10$, 信噪比 $\text{SNR} = 10\text{dB}$.

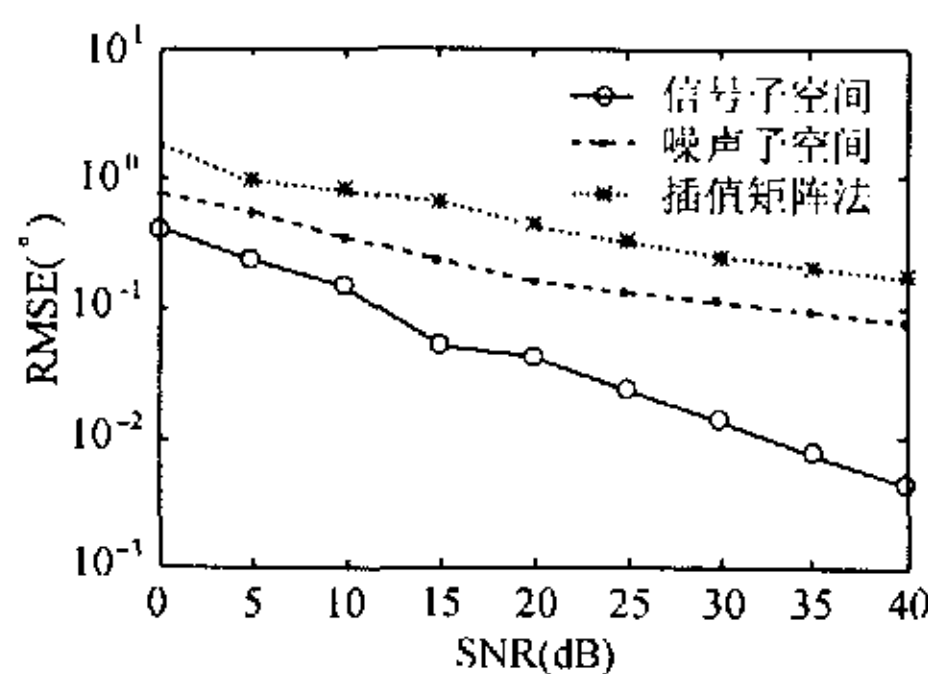


图 1 RMSE 随 SNR 变化曲线

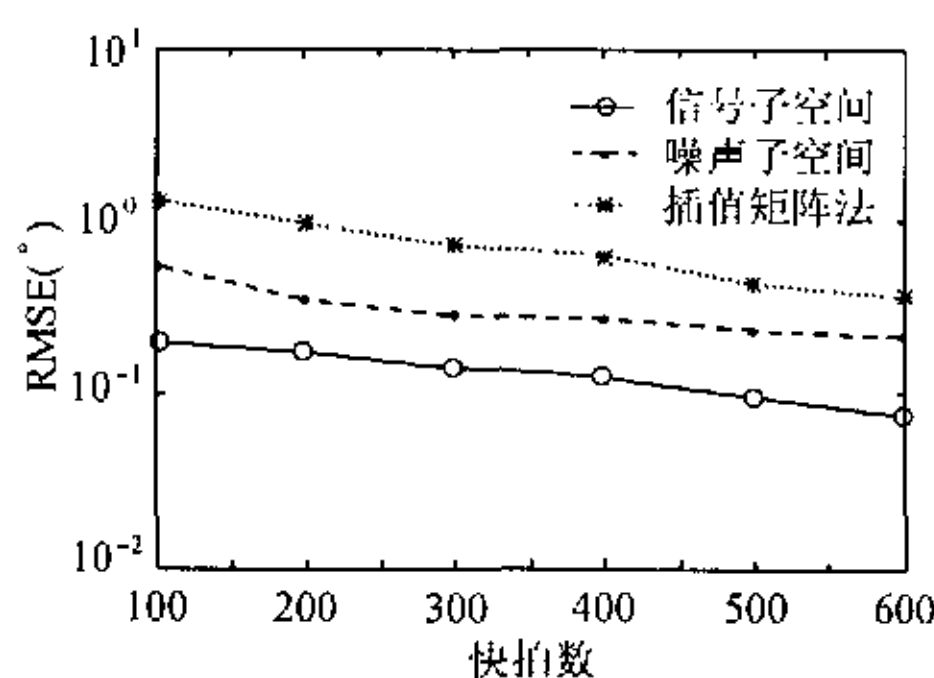


图 2 RMSE 随快拍数变化曲线

仿真实验 2 两个入射的宽带线性调频信号 $s_1(t) = A_1 e^{j2\pi(0.25t + 0.025t^2/N)}$ 和 $s_2(t) = A_2 e^{j2\pi(0.316t + 0.033t^2/N)}$, 到达角 $\theta_1 = 36^\circ$, 图 3 阵列形式为 7 元均匀线阵, 图 4 阵列形式为 7 元均匀圆阵. 曲线为 DOA 估计的均方根误差随信噪比变化曲线, 算法采用信号子空间法.

仿真实验 3 考察 3 个具有相同时频特性的宽带相干线性调频信号 $s_1(t) = A_1 e^{j2\pi(0.25t + 0.025t^2/N)}$ 和 $s_2(t) = A_2 e^{j2\pi(0.25t + 0.025t^2/N)}$, $s_3(t) = A_3 e^{j2\pi(0.25t + 0.025t^2/N)}$ 信号到达角分别为 $\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = 36^\circ$, $\theta_3 = 10^\circ$, 阵元形式为 11 元均匀线阵, 子阵列个数设为 10, 快拍数 $N = 256$. 图 5 为信噪比 $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 时基于空间平滑和时频噪声子空间 DOA 算法的空间谱. 图 6 算法的均方根误差 (RMSE) 曲线.

从图 1 和图 2 看出, 本文给出的两种 DOA 估计算法从性能上明显优于 Gershman 最近提出的矩阵插值法^[2], 而信号子空间算法显示出比噪声子空间法更高的估计精度. 图 3 和图 4 的仿真结果说明算法适用于多信号条件和多种阵列形式, 且具有较好的估计效果. 图 5 和图 6 验证了本文所提出的基于空间时频矩阵平滑的噪声子空间估计算法能准确有效地估计多个相同时频特性信号的到达角.

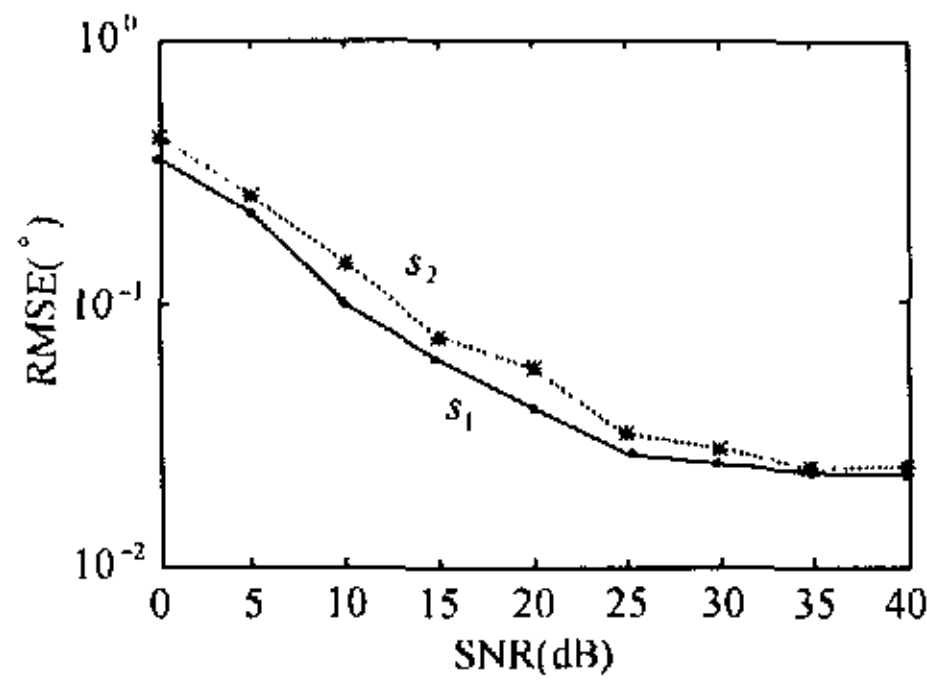


图3 均匀线阵

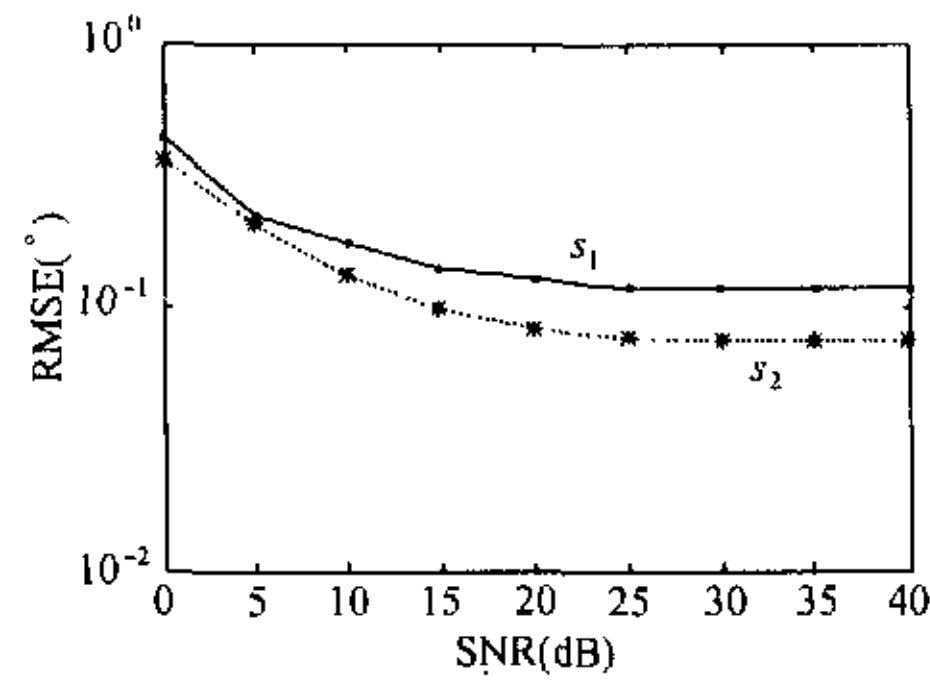


图4 均匀圆阵

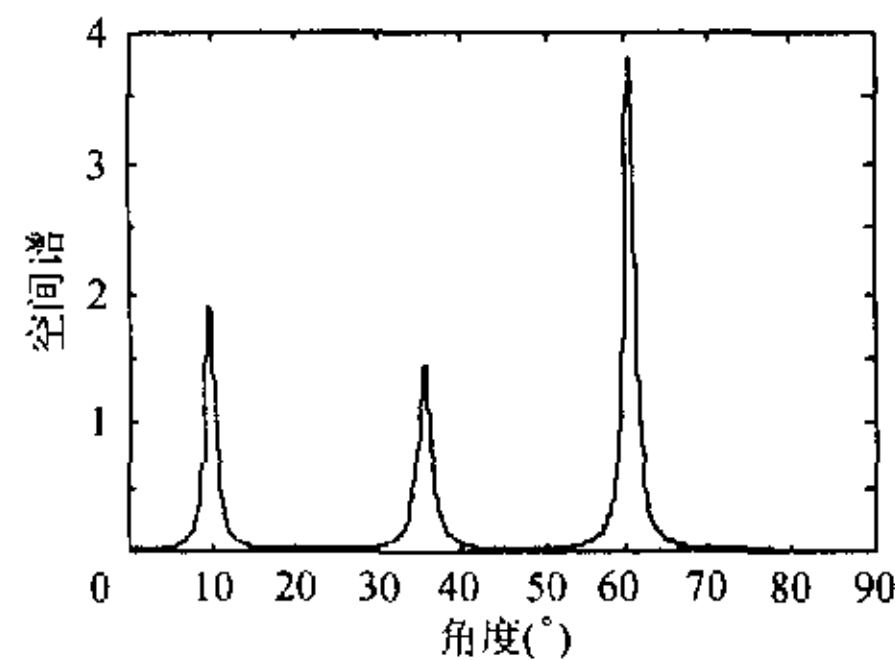


图5 时频空平滑后 DOA 估计的空间谱

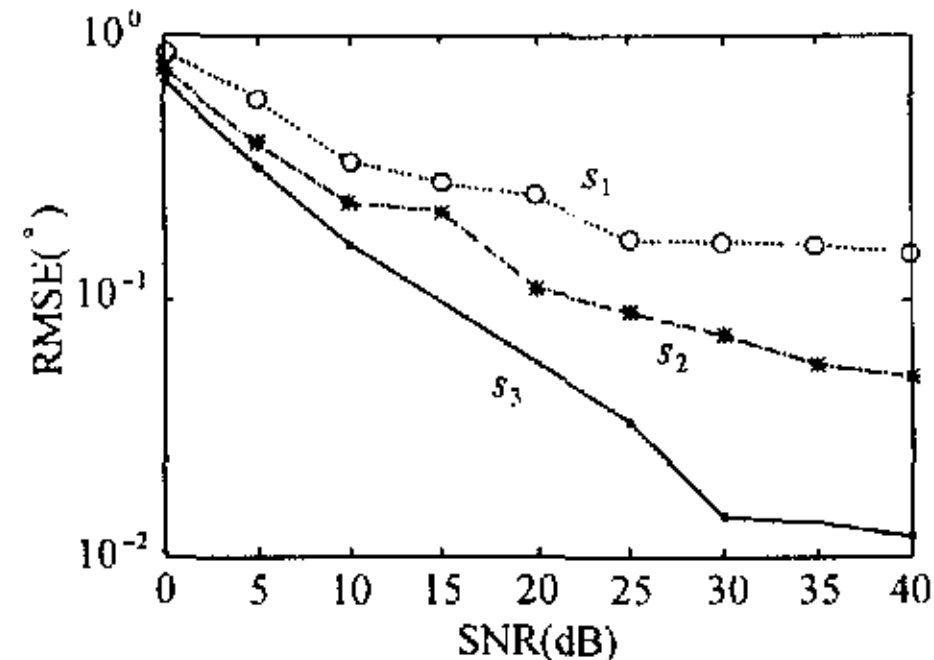


图6 DOA 估计的均方根误差随信噪比变化曲线

7 结论

本文提出了基于时频子空间分解的宽带线性调频信号 DOA 估计算法, 算法具有几个明显优点: (1) 实现了宽带非平稳信号的 DOA 估计。(2) 避免了聚汇、插值等复杂的矩阵变换和近似计算, 减小了计算量, 提高了估计精度和算法的稳健性。(3) 算法适用于任意阵列形式, 不局限于均匀线阵或对称阵列。(4) 提出空间时频分布的前后向平滑方法, 解决了均匀线阵条件下具有相同时频特性的多个宽带信号的到达角估计问题。(5) 本文所建模型不存在模型误差, 算法稍加改动还可适用于瞬时窄带模型。仿真数据也显示了本文两种算法的良好性能。作者在仿真实验中发现短时 WVD 的窗函数长度存在某个最优值, 怎样自适应地选取这个最优长度有待深入研究。

参 考 文 献

- [1] Amin M G. Spatial time-frequency distributions for direction finding and blind source separation. in Proc. SPIE, 1999, vol.3723: 62-70.
- [2] Gershman A B, Amin M G. Wideband direction of arrival estimation of multiple chirp signals using spatial time-frequency distributions. *IEEE Signal Processing Lett.*, 2000, 7(6): 152-155.
- [3] Huang Ke-ji, Tian Da, Chen Tian-qi. Direction-of-arrival estimation of wideband chirp signals using the Wigner ditribution of symmetrical sensor array. ICCAS02, Chengdu, 2002: 1025-1028.

黄克骥: 男, 1974 年生, 博士生, 目前研究兴趣为阵列信号处理及校正、信号多参量估计、时频分析等。
田 达: 男, 1975 年生, 博士生, 目前兴趣为谱估计、阵列信号处理算法研究和系统实现、DSP 技术、非平稳信号处理。
陈天麒: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事自适应信号处理、阵列信号处理、信号多参量估计与跟踪、高阶谱估计、多传感器数据融合及电子工程系统等方面的研究工作, 已发表学术论文 100 余篇。