

## $N^*DPT/D/1$ 排队系统分析<sup>1</sup>

汪永明 黄立群 杨子晨\* 黄载禄

(华中理工大学电子与信息工程系 武汉 430074)

\*(武汉水利电力大学计算机科学系 武汉 430072)

**摘 要** 多路离散周期串到达、单个服务台定长服务排队系统,是在研究 CBR 业务下 ATM 网络中间节点性能时所遇到的一种排队模型。在有线 ATM 网的 CBR 业务接进无线 ATM 网时也会遇到这种排队模型。本文分析了这一排队系统,得到了其队长剩余分布的计算公式。

**关键词** 异步转移模式, 固定比特率业务, 排队系统, 剩余分布

**中图分类号** TN913.2

### 1 引言

固定比特率 (CBR) 业务是未来的 ATM 网络支持的一类业务,分析 CBR 业务下 ATM 网络的性能是 ATM 理论和技术研究的一个重要内容。ATM 网是一种多级多节点网络,在中间节点处的排队模型较为复杂,本文为在同类 CBR 业务下的 ATM 网络中间节点处的队列提出了一种“最坏情况”的模型,即  $N^*DPT/D/1$ (多路离散周期串到达、单个服务台定长服务) 排队系统。对有线 ATM 网的 CBR 业务来说,当它接进无线 ATM 网时,接入处的队列也符合这一模型。就作者目前了解的国内外情况来看,在专业文献上很难见到对此类模型的细致研究。为此,本文将分析这一排队模型,并给出其队长剩余分布计算公式。

### 2 $N^*DPT/D/1$ 排队系统和背景

假定某个中间节点有  $M+1$  个速率相同的虚通路 (VP), 有  $N = LM$  ( $L$  为整数) 个同类 CBR 业务来自其中的  $M$  个不同的 VP (这  $M$  个 VP 中可能还有其它业务), 并将同时接入另外的一个 VP。取 VP 传输一个信元所用的时间为时间单位, 并设单个 CBR 业务的信元速率为  $1/R$ ,  $R$  是整数。考虑到在实际的通信系统中都留有一定的频带冗余, 这里只研究系统负荷小于 1 的情况, 即  $\rho = N/R < 1$ 。由于 CBR 业务种类有限, 而且有些种类的 CBR 业务用户特别多, 同时对业务分类传输和控制可能是解决 ATM 网络流量控制问题的一种较为有效的办法<sup>[1]</sup>。因此, 在实际中上述情况是可能存在的。

采用输入缓冲队列, 缓冲容量为  $K$  个信元大小, 并认为在发送某个信元之前, 该信元的 53 个字节必须全部接收到, 且已将它存放在缓冲器里。我们把单位时间间隔称为时隙, 把连续  $R$  个时隙称为一帧。由于  $\rho < 1$ , 因此, 在一帧中一定存在这样一个时隙, 在该时隙中队长为 0 (不计将在该时隙接收到的信元)。

在 ATM 网络中, 信元在接入点处要进入一个排队系统, 因此, 在中间节点处, 来自同一 VP 的信元是不可能在同一时隙到达的。那么对于上述中间节点的那个输出 VP 来说, 为了不在中间节点丢失信元, 当  $N = LM$  个业务平均地分配在  $M$  个 VP 里, 并且在同一

<sup>1</sup> 1997-04-08 收到, 1998-02-20 定稿

VP 内的各个业务的信元首尾相连时, 所需要的最小缓冲容量最大, 需要  $N - L + 1$  个缓冲单元. 这种流量状况是一种最坏情况<sup>[2]</sup>. 我们没有把“ $M$  个输入 VP 里各有  $L$  个业务, 在同一 VP 内的各个业务的信元首尾相连, 在一帧内各 VP 里的第一个信元同时到达”这一情况作为研究模型, 是因为考虑到不同 VP 里的信元的到达时刻之间是相互独立的.

由于有线 ATM 的信元比无线 ATM 的信元要长<sup>[3]</sup>, 有线 ATM 的一个信元被分段并组装成无线 ATM 的若干个信元. 如果有线 ATM 网的 VP 与无线 ATM 网的 VP 的有效传输速率 (即传输有效信息的速率) 相同, 我们可以用无线 ATM 网的 VP 传输一个无线 ATM 信元所用的时间为单位对时间作分割, 并认为信元是边接收边组装的, 则对于无线 ATM 网的 VP 来说, 信元是首尾相连地到达的; 在 CBR 业务下, 无线 ATM 网络中的信元队列也符合上述模型.

由以上分析可知,  $K \geq N - L + 1$  的各种情况都不丢失信元, 并具有相同的队长分布, 为此, 以下将研究  $K = N - L + 1$  这一情况. 把在一帧里同一 VP 的  $L$  个连续到达的信元称为一串信元, 把其中的第一个信元开始出现的时刻定义为该串到达时刻. 由于来自不同业务的信元流具有周期性, 所以只需要研究一帧内的流量状况. 用  $S(j) (j = 0, 1, \dots, R - 1)$  表示缓冲器在某一帧的第  $j$  个时隙开始时的状态, 即缓冲器里的信元数 (包括正在发送的那个信元, 不包括将在第  $j$  个时隙接收到的信元), 用  $A(j)$  表示在该帧的同一时隙里到达的信元数, 定义  $S(R) = S(0), A(R) = A(0)$ , 则缓冲器状态方程为

$$S(r) = \max\{S(r-1) - 1, 0\} + A(r-1), \quad 1 \leq r \leq R. \quad (1a)$$

设在某一帧的第  $j$  时隙内到达的串数为  $B(j)$ , 用  $a(r, m)$  和  $b(r, m)$  分别表示在从时隙  $r - m$  到时隙  $r - 1$  期间内到达的所有的信元数和所有的串数, 则

$$a(r, m) = \sum_{i=1}^m A(r-i) = \sum_{i=1}^m \min\{L, i\}B(r-i) + \sum_{i=1}^L iB(r-m-L+i), \quad (1b)$$

$$b(r, m) = \sum_{i=1}^m B(r-i). \quad (1c)$$

### 3 队长剩余分布

考虑到任何一串的到达时刻都以同样的概率均匀地分布在该帧的各个时隙的开始处, 所以在任何一时隙开始时刻, 队长剩余分布都相同. 因此, 不失一般性, 我们只需要根据当前帧信元的到达情况, 研究在下一帧开始时刻队长剩余分布.

设下一帧开始时刻队长为  $k$  的概率是  $P(k)$ , 队长剩余分布是  $Q(k)$ , 即  $Q(k) = \Pr\{S(R) > k\}$ , 其中  $k \geq 0$ ,  $\Pr$  表示概率. 根据 J.W.Roberts 等研究结果可得<sup>[4]</sup>:

当  $S(R) > k$  时, 一定唯一地存在一个  $m \in [1, R]$ , 使得  $a(R, m) = m + k$ , 并且对于任何自然数  $x \in (m, R]$ , 都有  $a(R, x) < x + k$ ; 同时, 队长剩余分布可由下式给出:

$$Q(k) = \sum_{m=1}^R \Pr\{a(R, m) = m + k, a(R, x) < x + k \text{ 对于 } x \in (m, R]\}. \quad (2a)$$

$Q(0)$  和  $P(0)$  分别是系统忙和空闲的概率, 且当  $K \geq N - L + 1$  时有  $Q(0) = \rho, P(0) = 1 - \rho$ , 可见系统忙和空闲的概率都只与负荷有关.

为了计算 (2a) 式, 我们先分析以下几个性质:

**性质 1**  $a(R, m) = m + k$  表示在一帧的最后  $m$  个时隙内有  $m + k$  ( $k \geq 0$ ) 个信元到达, 并且有  $m \leq N - k$ ;

**性质 2** 事件  $\{a(R, m) = m + k, a(R, x) < x + k$  对于  $x \in (m, R]\}$  和事件  $\{a(R, m) = m + k, a(R - m, x) < x$  对于  $x \in [1, R - m]\}$  是等效的<sup>[4]</sup>;

**性质 3** 当事件  $\{a(R - m, x) < x$  对于  $x \in [1, R - m]\}$  发生时, 取其特殊情况  $x = 1$ , 有  $a(R - m, 1) < 1$ , 所以在第  $R - m - 1$  时隙里一定没有信元到达, 那么在从第  $R - m - L$  时隙到第  $R - m - 1$  时隙期间内, 不可能有串到达, 此时有:  $A(R - m - 1) = 0$  且  $b(R - m, L - 1) = 0$ .

**性质 4** 在给定  $b(R - m, L - 1) = 0$  和  $b(R, m) = j$  的条件下,  $a(R, m)$  只与  $B(r)$  (其中  $r \in [R - m - L + 1, R - 1]$ ) 中的信元有关, 而在时隙  $R - m - L$  及其以前到达的串不会影响  $a(R, m)$ , 因为在时隙  $R - m - L$  及其以前到达的串在时隙  $R - m$  以前都已经结束了, 所以  $\Pr\{a(R, m) = m + k | a(R - m, x) < x, b(R, m) = j$  对于  $x \in [1, R - m]\}$  和  $\Pr\{a(R, m) = m + k | b(R - m, L - 1) = 0, b(R, m) = j\}$  相等.

**性质 5** 若信元串  $\Phi$  是在前一帧开始的, 在目前帧的第  $y$  时隙的末尾结束, 则  $\Phi$  中的信元最多只会影响到目前帧的第  $y$  时隙里的信元到达数. 由于  $a(R, m) = m + k$  ( $k \geq 0$ ), 而  $\rho < 1$ , 则  $a(R - m, R - m) < R - m$ , 而在目前帧的 0 时隙至  $y$  时隙里都必然有  $\Phi$  的信元, 所以对于任意  $i \in [0, y]$ , 必然有:  $a(R - m, R - m - i) < R - m - i$ . 这就是说: 对于上述我们所讨论的到达模式来说, 在给定  $m$  和  $b(R - m, R - m)$  的条件下, 事件  $\{a(R - m, x) < x$  对于  $x \in [1, R - m]\}$  是否发生与  $\Phi$  中的信元无关, 它只取决于在本帧的从第 0 时隙到第  $R - m - 1$  时隙期间内到达的串中的信元.

根据上述性质, 我们可以得到<sup>[5]</sup>

$$Q(k) = \sum_{m=1}^{N-k} \Pr\{a(R, m) = m + k, a(R, x) < x + k \text{ 对于 } x \in (m, R]\}$$

$$= \sum_{m=1}^{N-k} \sum_{j=D}^U u(R - m, M - j) v(m + k, j, m) w(j, m), \quad (2b)$$

这里  $U = \min\{M, m + k\}$ ,  $D = 1 + \lfloor (m + k - 1)/L \rfloor$ ,  $u(i, j) = \Pr\{a(i, x) < x$  对于  $x \in [1, i] | b(i, i) = j\}$ ,  $v(i, j, m) = \Pr\{a(R, m) = i | b(R - m, L - 1) = 0, b(R, m) = j\}$ ,  $w(j, m) = \Pr\{b(R, m) = j\}$ .

根据性质 5, 我们可以得到  $u(R - m, M - j)$  是由  $M - j$  串信元在本帧前面的  $R - m$  个时隙内到达情况决定的, 即  $L(M - j)$  个信元出现在这  $R - m$  个时隙中时, 其中某个时隙的空闲概率<sup>[4]</sup>, 所以有

$$u(R - m, M - j) = 1 - L(M - j)/(R - m), \quad (2c)$$

而

$$w(j, m) = C_M^j (R - m)^{M-j} m^j R^{-M}. \quad (2d)$$

令  $d(i, j, m) = \sum_{x=0}^{U_p} (-1)^x C_{i-mx+j-1}^{j-1} C_j^x$ , 并定义  $d(0, m, 0) |_{m>0} = 1$ , 其中  $U_p = \min(j, \lfloor i/m \rfloor)$ . 设  $V(j, m, z) = E[z^{a(R, m)} | b(R - m, L - 1) = 0, b(R, m) = j]$ , 由 (1b) 式可以得到:

(1) 当  $0 < m < L$  时, 有

$$V(j, m, z) = m^{-j} \left( \sum_{l=1}^m z^l \right)^j = \left( \frac{z}{m} \right)^j \sum_{i=0}^{j(m-1)} d(i, j, m) z^i,$$

则

$$v(i, j, m) = m^{-j} d(i - j, j, m), \quad j \leq i \leq mj. \quad (2e)$$

(2) 当  $L \leq m \leq R$  时, 有

$$\begin{aligned} V(j, m, z) &= \left( \frac{z}{m} \right)^j \left( \sum_{l=0}^{L-1} z^l + (m-L)z^{L-1} \right)^j \\ &= \left( \frac{z}{m} \right)^j \sum_{l=0}^j \sum_{n=l(L-1)}^{j(L-1)} z^n C_j^l (m-L)^l d(n - lL + l, j - l, L), \end{aligned}$$

所以有

$$v(i, j, m) = m^{-j} \sum_{l=0}^{U_l} C_j^l (m-L)^l d(i - j - lL + l, j - l, L), \quad j \leq i \leq jL. \quad (2f)$$

这里,  $U_l = \min(j, \lfloor (i - j)/(L - 1) \rfloor)$ , 并定义  $0^0 = 1$ .

下面我们给出  $L = 1$  时 (即 N\*D/D/1 模型) 的队长剩余分布的计算公式:

$$Q(k) = \sum_{m=1}^{M-k} C_M^{m+k} \left( 1 - \frac{M - m - k}{R - m} \right) \left( \frac{m}{R} \right)^{m+k} \left( 1 - \frac{m}{R} \right)^{M-m-k}. \quad (2g)$$

这与文献 [4] 所给出的结果相一致。

## 4 实验和结论

下面, 我们将研究在保持负荷不变的条件下,  $L$ 、 $M$  和  $R$  的变化对队长剩余分布和队长为  $k$  的概率的影响:

图 1 是在负荷  $\rho = 0.8$ 、 $R = 50$  时, 不同  $L$  和  $M$  所对应的队长剩余分布 (图 1(a)) 和队长为  $k$  的概率 (图 1(b)); 图 2 是在负荷  $\rho = 0.5$ 、 $M = 10$  时, 不同  $L$  和  $R$  所对应的队长剩余分布 (图 2(a)) 和队长为  $k$  的概率 (图 2(b))。从这两组图中可以看到: 当  $k > 0$  时,  $Q(k)$  随着  $L$  的增大而增加, 而且其增加的倍数随  $k$  的增大而增大; 当  $k$  较大时,  $P(k)$  随着  $L$  的增大而增加, 其增加的倍数也随  $k$  的增大而增大; 而当  $k$  较小时,  $P(k)$  则随着  $L$  的增大而减小;  $P(k)$  的这种变化的结果是: 在相同负荷条件下,  $Q(0)$  和  $P(0)$  不随  $L$  的变化而改变。图 3 则表明: 在负荷  $\rho$  和  $L$  一定的条件下,  $Q(k)$ 、 $P(k)$  随  $M$  (和  $R$ ) 改变而变化的情况与上述情况相似。

由此可以得出: 当负荷一定时, 随着  $L$ 、 $M$  和  $R$  的增加, 必须要更多的缓冲单元, 才能保持相同的拥塞率。

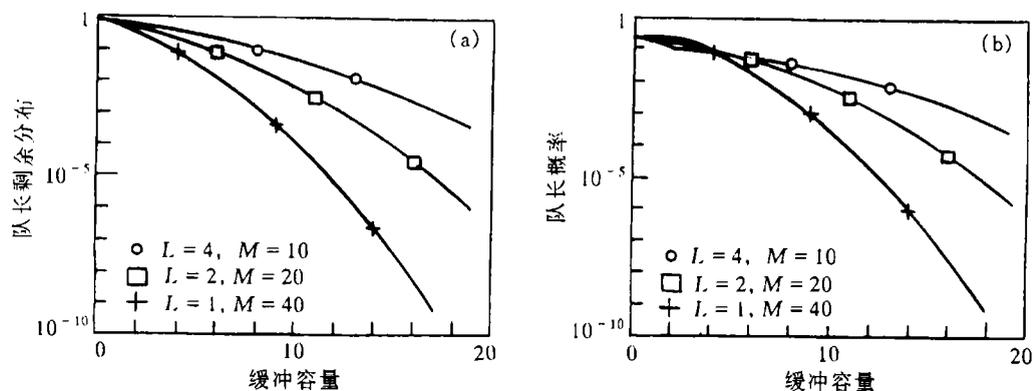


图1 在相同负荷下,  $R=50$  时队长剩余分布和队长概率  
(a) 队长剩余分布 (b) 队长概率

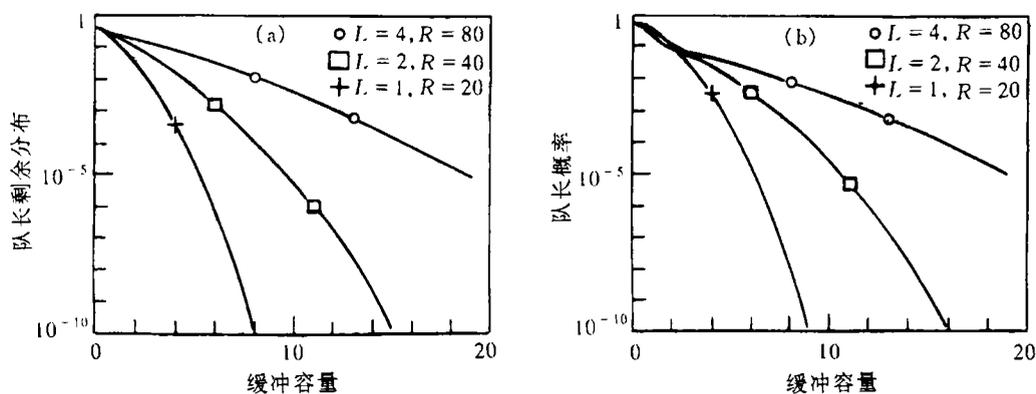


图2 在相同负荷下,  $M=10$  时队长剩余分布和队长概率  
(a) 队长剩余分布 (b) 队长概率

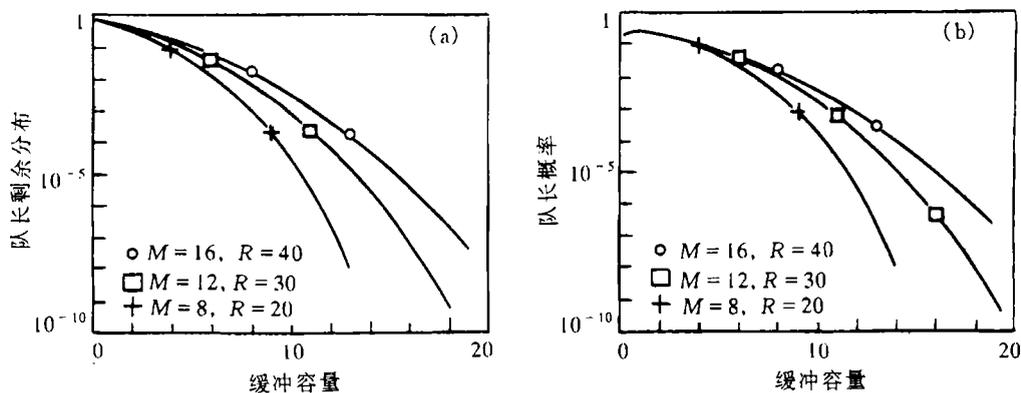


图3 在相同负荷下,  $L=2$  时队长剩余分布和队长概率  
(a) 队长剩余分布 (b) 队长概率

## 5 结 论

本文提出并分析了 N\*DPT/D/1(多路离散周期串到达、单个服务台定长服务) 排队系统, 给出了其队长剩余分布的计算公式。由于这一模型不仅是 ATM 网络中间节点在 CBR 业务下的一种“最坏”流量状况的信元排队模型, 也是有线 ATM 网的 CBR 业务接进无线 ATM 网时的一种信元排队模型, 所以, 以上研究对于 ATM 网络流量控制的研究来说, 具有一定的理论和实际意义。

## 参 考 文 献

- [1] 顾学道. 异步转移模式 (ATM) 的研究现状与前景. 通信学报, 1994, 15(3): 1-15.
- [2] Sklirou A. Characterizing the Worst Traffic Profile Passing Through an ATM-UNI. Second Workshop in Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, Bradford: 1994, 507-602.
- [3] Raychaudhuri D, Wilson D. ATM-based transport architecture for multiservices wireless personal communication networks. IEEE J. of SAC, 1994, 12(8): 1401-1413.
- [4] Roberts J W, Virtamo J T. The superposition of periodic cell arrival stream in an ATM multiplexer. IEEE Trans. on Commun., 1991, 39(2): 298-303.
- [5] 汪永明. ATM 网络服务质量分析方法与呼叫连接 / 接纳控制: [博士论文]. 华中理工大学, 1997, 5.

## ANALYSIS OF N\*DPT/D/1 QUEUEING SYSTEM

Wang Yongming    Huang Liqun    Yang Zichen    Huang Zailu

(Electron. and Infm. Eng. Dept., Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

**Abstract** A single sever queueing system with multiple discrete periodic train arrivals and definite service time, which comes from a worst traffic status in intermediate nodes of ATM networks and nodes where wired ATM networks access wireless ones under CBR traffic, is analyzed in the paper, and the formula for its queue length residual distribution is derived.

**Key words** Asynchronous transfer model, Constant bit rate traffic, Queueing system, Residual distribution

汪永明: 男, 1968 年生, 博士, 从事 ATM 和 B-ISDN 理论和技术、图象处理、信号处理和多媒体通信等方面的研究工作。

黄立群: 男, 1970 年生, 博士生, 从事 ATM 和 B-ISDN 理论和技术方面的研究工作。

杨子晨: 男, 1970 年生, 从事通信与信息处理等方面的研究工作。

黄载祿: 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 华中理工大学信息科学与工程学院院长, 从事通信、信号处理等领域的研究工作。