

一种不做乘法的快速整数小波变换¹

黄贤武 陈赤飏 李秋菁 李家骅

(苏州大学通信与电子工程系 苏州 215021)

摘 要 该文提出了一种不做乘法的整数小波变换方法, 它可以迅速地完成二维可分离小波变换, 比传统的浮点型小波变换在速度上有了很大的提高, 并且便于硬件实现, 在图像压缩上有广泛的应用前景。

关键词 小波变换, 整数, 移位

中图分类号 TN911.73, O177.6

1 引言

自 80 年代末期 Mallat 首次将小波变换引入图像处理中以来, 小波变换以其优异的时频局部化能力及良好的去相关能力在图像处理等领域中得到了广泛的应用。以基于小波变换的图像压缩为例: 通常是先将原始图像进行二到四级小波变换, 然后将得到的小波系数进行量化、编码。由于小波滤波器的系数一般是浮点数, 并且在变换的过程中跟庞大的图像数据做卷积运算, 这在一定程度上影响了基于小波变换的压缩算法的实时性。众所周知, 计算机完成整数加、减法及移位运算比浮点运算要快得多。根据这一思路本文提出了一种用整数实现的不做乘法的快速小波变换算法。

2 二维正交小波变换

对于属于 $L^2(R)$ 的一个子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, 它满足下列条件:

- (1) 一致单调性 $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots$;
- (2) 渐进完备性 $I_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(R)$;
- (3) 伸缩规则性 $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$ 。

V_0 上的尺度函数 $\phi(x)$ 的伸缩、平移 $\{\sqrt{2^{-j}}\phi(2^{-j}x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成 V_j 上的正交基。对于 V_j 在 V_{j+1} 上的正交补 W_j , W_0 上小波函数 $\psi(x)$ 的伸缩、平移 $\{\sqrt{2^{-j}}\psi(2^{-j}x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成 W_j 上的正交基。 W_j 描述了函数 $f(x) \in L^2(R)$ 在 2^j 分辨率下相对于 2^{j+1} 分辨率中的细节信息。

设 $f(x)$ 在 V_0 下的近似描述为 $\{a_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 则 $f(x)$ 的一维离散小波变换为

$$a_{j-1,k} = \sum_n h_{n-2k} a_{j,n}, \quad d_{j-1,k} = \sum_n g_{n-2k} a_{j,n} \quad (1)$$

相应的分析滤波器 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq L-1}$ 和 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq L-1}$ 为正交滤波器, 它们满足: $g_n = (-1)^{L-1-n} h_{L-1-n}$, 其中 L 为小波滤波器的长度。 $a_{j,k}$ 和 $d_{j,k}$ 分别为函数 $f(x)$ 在不同尺度下的“模糊的像”(Approximation) 和对该“像”的细节 (Details) 补充。为了保证变换后的小波系数的总数目不超过原始数据的总数目, 对变换后的系数进行 2 取 1 抽样。对处理后的系数 1 到 2 填 0, 再由 (2) 式:

$$a_{j,k} = 2 \sum_n (a_{j-1,k-n} \tilde{h}_n + d_{j-1,k-n} \tilde{g}_n) \quad (2)$$

可以实现信号的重构, 相应的综合滤波器 $\{\tilde{h}_n\}_{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq L-1}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}_{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq L-1}$ 也为正交滤波器, 它们满足

¹ 1999-08-06 收到, 2000-08-11 定稿

$$\tilde{h}_n = h_{L-1-n}, \quad \tilde{g}_n = g_{L-1-n} \quad (3)$$

图像的小波变换, 可以用二维可分离离散小波变换实现, 即小波变换先作用于行, 再作用于列。

3 算法及实现

整个算法的关键是找到一个系数可以用整数表示的小波滤波器, 然后用一些计算技巧来实现小波的正反变换。

3.1 小波滤波器的选取 任何实正交的小波滤波器组都能实现图像的分解与重构, 然而并非任何分解均能满足我们的要求。同一幅图像, 用不同的小波滤波器处理得到的数据压缩效果是不同的。我们希望经小波分解后得到的三个方向的细节分量具有高度的局部相关性, 而整体相关性被大部分甚至完全解除。在选择小波滤波器时应考虑以下因素: (1) 小波函数应具备较好的能量集中特性; (2) 小波基的正则性阶数与图像压缩效果的关系。小波变换的目的就是重新分配信号的能量, 使其集中在少数系数上, 而绝大多数的变换系数的幅值都接近于零。如果小波函数具有很好的能量集中特性, 就能使小波系数量化后出现很多的零值, 获取较大的压缩比; 正则性是函数光滑程度的一种描述, 也是函数频域能量集中的一种度量。文献 [1] 表明, 小波函数的正则性越高, 图像压缩后重建的效果越好, 但是, 为了获取较高的正则性往往需要采用较长的小波滤波器, 这很不利于实时处理。

由于本文提出的是一种快速整数小波算法, 因此还必须考虑以下两个因素: (1) 小波滤波器的长度要足够短; (2) 小波滤波器的系数便于用整数表示; 由于图像数据压缩中的小波变换通常是图像信号与滤波器的离散卷积实现, 因而滤波器长度不能太长, 否则计算量太大、太费时而没有实用价值。另外, 文献 [2] 也表明, 小波滤波器的长度越短, 则跟边缘相关的非零小波系数也越少, 压缩效率也就越高。

综合考虑以上几点, 我们最终选择了四系数 Daubechies 小波 ($h(0)=11/32$, $h(1)=19/32$, $h(2)=5/32$, $h(3)=-3/32$)。选用 Daubechies 滤波器另外的理由是: Daubechies 紧支小波基对于给定的支撑集长度具有最高的消失矩, 这对图像压缩非常有利; 同时 Daubechies 小波基的尺度函数是最小相移滤波器, 这能保证在图像处理中尽量少的引入附加相移。

3.2 算法的具体实现 首先, 我们注意到小波系数的分母都是 32, 这就便于将分子和分母分开来考虑。又因为 $32 = 2^5$, 所以除以 32, 只需将被除数右移 5 位即可。为了保持运算的精度, 在计算的过程中只有小波系数的分子参与运算, 待几级小波运算结束后再一并计算分母的影响。下面我们将分析低通滤波器的小波系数分子的绝对值表示成 2 的幂次相加的形式:

$$\begin{aligned} |h'(0)| &= 11 = (1011)_2 = 2^3 + 2^1 + 1, & |h'(1)| &= 19 = (10011)_2 = 2^4 + 2^1 + 1 \\ |h'(2)| &= 5 = (101)_2 = 2^1 + 1, & |h'(3)| &= 3 = (11)_2 = 2^1 + 1 \end{aligned}$$

很明显镜像正交滤波器的系数的绝对值的集合为 $\{3, 5, 11, 19\}$ 。在计算机的乘法运算中一个数乘以 2 的幂次, 可以用把这个数左移 2 的幂次位来实现。例如, 如果要将一个数乘以 11, 可将该数左移 3 位加上该数左移 1 位, 再加上该数自身就可以了。为此, 我们可以将乘以滤波器的系数做成四个子函数。在做卷积运算时, 用到哪个系数, 调用相应的子函数就可以了。

如前所述, 对图像数据每进行一级小波变换需要分别对图像的行、列各进行一次小波变换。因此, 如果我们只用系数的分子对图像数据进行两级小波变换, 对所得到的 LL_2 子带的系数尚需右移 $2 \times 2 \times 5 = 20$ 位才能得到最后的结果。

对于一般的灰度级图像, 其每个像素的幅值在 0~255 之间, 可以用一个字节表示。根据我们的实验, 若将上述滤波器系数用浮点数表示, 即 $h(0)=0.34375$, $h(1)=0.59375$, $h(2)=0.15625$, $h(3)=-0.0625$, 对多幅图像进行二级小波变换, 得到的小波系数的范围都在 -2048 ~ 2047 之

间, 可以用 12bit 表示。在考虑分母移位影响之前, 采用整数移位算法得到的小波系数应该可以用 $12+20=32\text{bit}$ 表示。因此, 在实验中用 32bit 的整型变量来表示小波系数。若需要对原始图像进行三到四级小波变换, 可以选用 64bit 变量来表示小波系数。

图 1 和图 2 给出了快速小波正、逆变换的框图。从图中, 我们可以看出快速小波正、逆变换的基本思路是一致的, 但是, 在具体的算法上则略有不同。在正变换的过程中, 求取下一级子带系数时仅仅依赖上一级 LL 子带的系数, 因此, 为了保证运算的精度, 我们可以在全部三级小波变换结束以后对小波系数进行移位处理。而在小波逆变换时为求取上一级的 LL 子带系数, 必须依赖下一级的 LL, LH, HL 和 HH 子带系数, 因此每完成一级小波逆变换就必须进行移位处理。

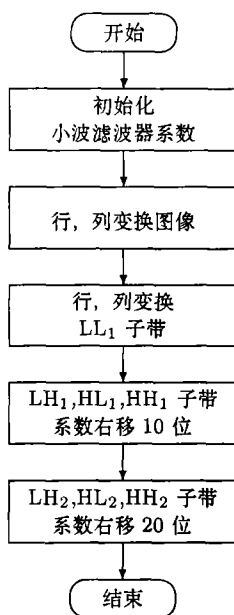


图 1 快速小波正变换框图

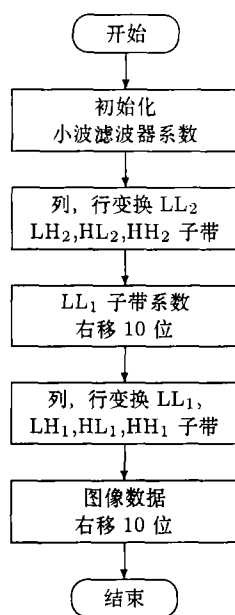


图 2 快速小波逆变换框图

4 实验结果

我们用计算机对本算法进行了模拟, 获得了满意的效果。所选用的编程语言为 Borland C++ Builder 3.0, 操作系统为 Windows 95, 硬件平台为奔腾 100MHz 主频微机, 配置 32 兆内存。实验中采用了 512×512 标准灰度测试图 Lenna(如图 3 所示), 使用同样的小波滤波器, 完成二级小波分解与重建。模拟的结果如下表 1 所示。

表 1 小波变换实时性比较

算法	分解速度	合成速度	重建图像 PSNR	重建图像 SNR
整数	0.990s	0.990s	44.73dB	30.20dB
浮点数	1.610s	1.610s	45.49dB	30.96dB

实验中分解与合成的速度由 Win32 API 函数 GetTickCount() 测得, 该函数返回自 Windows 启动以来经过的毫秒数。我们只需要在算法开始前及算法结束后各调用一次该函数, 就可以测出算法的速度, 精度为 1ms。重建图像的 PSNR 及 SNR 由下式给出:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10}(255^2/D) \quad (4)$$

$$\text{SNR} = 10 \log_{10}(\sigma^2/D) \quad (5)$$

式中 $D = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x_{mn} - \hat{x}_{mn})^2$, $\sigma^2 = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x_{mn} - \bar{x})^2$, $\bar{x} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{mn}$. 其中 M , N 分别是图像的行、列宽度; x_{mn} , $\hat{x}_{mn}$ 分别是原图像和重建图像的第 (m, n) 个像素的灰度值.

实验中对图像边界处理采用了对称周期延拓的方法. 设原始信号为 $f(n)$, 其长度为 N , 小波滤波器的长度为 L , 将原始信号首尾各延拓 $(L/2 - 1)$ 点, 形成延拓后的信号 $\tilde{f}(n)$, 则 $\tilde{f}(n)$ 由 (6) 式给出:

$$\tilde{f}(n) = \begin{cases} f(-n-1), & -L/2+1 \leq n < 0 \\ f(n), & 0 \leq n < N \\ f(2N-1-n), & N \leq n < N+L/2+1 \end{cases} \quad (6)$$

关于不同的边缘处理方法对图像小波变换的影响请读者参阅文献 [3]. 从表 1 可以看出本算法的速度明显地快于浮点数算法和双精度数, 提速幅度分别高达 38.5% 和 46.7%. 本算法在提高速度的同时并没有损害恢复图像的质量. 本算法恢复的图像的 PSNR 可达 44.73dB, SNR 可达 30.20dB, 主观质量令人满意. 图 4 给出了本算法的恢复图像, 对比图 3 没有发现明显的失真. 由于在图像压缩算法中, 小波变换后接着要进行量化, 因此本算法在对分母处理时引入的误差可以忽略.



图 3 Lena 原始图像



图 4 快速整数算法恢复 Lena 图像

5 结 束 语

本文提出了一种不做乘法的快速小波变换, 它具有分解、合成速度很快, 接近精确重建 (Exact Reconstruction) 等特点. 在对处理时间有严格要求的场合有着广泛的应用前景.

参 考 文 献

- [1] 李建平主编, 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现, 重庆, 重庆出版社, 1997, 89-94.
- [2] A. S. Lewis, G. Konwles, Image compression using the 2-D wavelet transform, IEEE Trans. on Image Processing, 1992, 1(2), 244-250.

- [3] 马淮桢等, 子波分析与子波变换, 广州, 华南理工大学出版社, 1992, 124-130.

A FAST WAVELET TRANSFORM ALGORITHM WITHOUT MULTIPLICATION

Huang Xianwu Chen Chibiao Li Qiujiing Li Jiahua

(College of Engineering, Suzhou University, Suzhou 215021, China)

Abstract In this paper, an algorithm of wavelet transform without multiplication is introduced. It can implement 2D separable wavelet transform rapidly. The speed of transform is greatly improved comparing to the classical float algorithm. It is also easy to be implemented in hardware. This algorithm will have broad application potentials in image compression.

Key words Wavelet transform, Integer, Shift bit

黄贤武: 男, 1942 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为多媒体通信、图像处理。
陈赤庵: 男, 1971 年生, 博士, 研究方向为图像处理。
李秋菁: 女, 1974 年生, 硕士, 研究方向为数据压缩。
李家骅: 男, 1975 年生, 硕士, 研究方向为多媒体通信。

新书介绍

河海大学徐立中博士编著的《数字图像的智能信息处理》一书, 近期由国防工业出版社出版。信息科学家、东南大学何振亚教授为该书作序。

该书是有关数字图像智能信息处理方面的专著。近年来作者跟踪了国际上新兴的软计算、计算智能方向的研究热点, 较为深入地研究了模糊集理论、遗传算法、神经网络、粗糙集理论以及它们相互结合的方法用于数字图像的处理。全书共分八章。内容包括: 综述有关软计算与计算智能的研究以及信息处理的主要软计算方法; 图像预处理基本技术; 基于模糊集和粗糙集理论的图像预处理技术; 基于遗传算法的图像恢复方法及模糊与遗传算法相结合的图像恢复方法; 图像压缩编码的有关基础知识和几种国际标准; 神经网络压缩编码; 粗糙集与神经网络相结合的矢量量化编码方法; 信息融合编码方法等。

该书内容新颖, 注重理论联系实际, 可作为电子信息工程、计算机应用、工业自动化、机械电子工程等相关专业的工程技术人员、科研人员、研究生和高年级本科生参考使用。

购书联系地址: 河海大学计算机及信息工程学院(南京市, 210098)

联系人: 周爱群 徐立中

TEL: 025-3713777-50520(O)