

M 带 Walter 子波抽样定理¹

张建康 保 铮 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘 要 本文把 2 带的 Walter 子波抽样定理扩展到 M 带子波空间, 构造出一类 M 带紧支撑正交插值尺度函数, 并在一定范围内将其参数化。举例构造并证明了一个 2 阶 3 带插值尺度函数不仅是正交的, 而且也是连续的。具有这样性质的 Walter 抽样定理 (1992) 在对多分辨空间的信号进行 D/A 转换时, 除了计算机的有限字长误差外, 没有任何截断误差。

关键词 M 带正交子波, Walter 子波抽样定理, 插值尺度函数

中图分类号 TN911.7

1 引 言

近年来, Shannon 抽样定理扩展到子波空间引起信号处理界的关注^[1-6]。Walter 证明了如果正交尺度函数 $\varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi(t) = O(|t|^{-1-\varepsilon})$, $t \in \pm\infty, t \in R$;

(2) $\sum_n \varphi(n)e(-jn\omega) \neq 0$, $\omega \in R$; 那么对任一函数 $f(x) \in V_0(\varphi)$, 存在内插函数 $S(t)$ 使得

$$f(x) = \sum_n f(n)S(t-n),$$

这里

$$\hat{S}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) / \left[\sum_n \varphi(n)e(-jn\omega) \right]. \quad (1)$$

在这篇文章里, 我们所关心的是这里的 $S(t)$ 是否能取为紧支撑函数。从 (1) 式我们不难知道, 要使内插函数是紧支撑的, 当且仅当 $\sum_n \varphi(n)e(-jn\omega)$ 是全通的。因此现在的关键问题是要设计一个尺度函数 $\varphi(t)$ 使得

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0, & n \in Z, \quad n \neq 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

具有这样性质的尺度函数称为主尺度函数^[2]。关于这种尺度函数的一般设计, 文献 [2] 有深入的研究。关于 2 带正交紧支撑主尺度函数的存在问题, 文献 [4] 进行了讨论, 他们得到了令人悲观的结果: 对 2 带子波而言, 除了 Harr 子波外, 主尺度函数的正交性与紧支撑性是不相容的。

本文的主要目的是要构造出一类 M 带正交的紧支撑尺度函数具有整数平移抽样性质: $\varphi(n) = \delta(n-1)$, 并在一定范围将其参数化, 进而把 2 带的 Walter 子波抽样定理扩展到这样

¹ 1997-09-15 收到, 1998-12-16 定稿

国家自然科学基金重点项目 (69831040) 和国家自然科学基金项目 (69772029) 资助课题

的 M 带子波空间, 因此相应的 M 带 Walter 子波抽样定理在对多分辨空间的信号进行 D/A 转换时, 除了计算机的有限字长误差外, 没有任何截断误差.

2 M 带紧支正交插值尺度函数的构造

在这节里, 我们的主要任务是要构造一类 $M(M > 2)$ 带尺度函数, 它们具有下列性质:

(1) $\varphi(t)$ 是紧支撑的; (2) $\varphi(t)$ 关于整数平移是正交的; (3) $\varphi(n) = \delta(n-1), \forall n \in \mathbb{Z}$.

为简单起见, 我们总假设尺度函数满足方程:

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_k p_k^{(0)} \varphi(Mt - k). \quad (2)$$

这里低通滤波器满足正交条件:

$$\sum_{k=0}^{M-1} \left| P(\omega + \frac{2k\pi}{M}) \right|^2 = M. \quad (3)$$

而且

$$P(z) = [(1 + z + \cdots + z^{M-1})/M]^R Q(z). \quad (4)$$

本文主要是利用 (2) 式构造尺度函数, 为方便起见, 我们总假定尺度向量 $p^{(0)}$ 是因果的, 因此如果要求所构造的尺度函数具有较好的分析性质, 那么我们必须限定平移单位 r 满足条件: $r \in [0, (N-1)/(M-1)], r \in \mathbb{Z}$. 由于平移不改变尺度函数的正交性和紧支撑性, 所以不失一般性, 以下我们总假定 $r = 1$, 于是下面我们所构造的尺度函数 $\varphi(t)$ 在整点具有性质: $\varphi(n) = \delta(n-1)$. 为此, 我们首先有

引理 1 $\varphi(n) = \delta(n)$, $\varphi(t) \in L^2(R)$ 当且仅当 $p_{Mn}^{(0)} = (1/\sqrt{M})\delta(n)$, 或等价于 $P_{0,0}(z) = 1/\sqrt{M}$, 且常数是在算子 R 下保持不变的唯一一个三角多项式, 这里

$$R(a(\omega)) = \sum_{k=0}^{M-1} a(\frac{\omega + 2k\pi}{M}) P_0(\frac{\omega + 2k\pi}{M}).$$

引理 1 是文献 [7, 8] 中结果在 M 带情况下的推广. 直接利用引理 1, 我们可得到下面的推论.

推论 1 $\varphi(n) = \delta(n-1)$, $\varphi(t) \in L^2(R)$ 当且仅当 $p_{M(n+1)}^{(0)} = (1/\sqrt{M})\delta(n)$, 或等价于 $P_{0,M-1}(z) = 1/\sqrt{M}$, 且 $e^{j(M-1)\omega}$ 是在算子 R 下保持不变的唯一一个三角多项式, 这里

$$R(a(\omega)) = \sum_{k=0}^{M-1} a(\frac{\omega + 2k\pi}{M}) P_0(\frac{\omega + 2k\pi}{M}) e^{j(2(M-1)k\pi + M-1)/M}.$$

引理 2 如果对 $|\omega| \leq \pi/M$, $P_0(\omega) \neq 0$, 那么, 由 (2) 式确定的尺度函数是正交的.

引理 3 设 $P_0(z) = [(1 + z + \cdots + z^{M-1})/M]^R Q(z)$, 且 $Q(\omega)$ 满足条件:

$$\sup_{\omega \in R} \prod_{j=0}^l \left| Q(\frac{\omega}{M^j}) \right| < M^{l(R-m-1/2)},$$

那么, $\varphi(t)$ 是 m 阶连续可微的。

关于引理 2 和引理 3 的证明, 请依次参阅文献 [9, 10]。

定理 1 设 $P_{0,M-1}(z)$ 是正交尺度滤波器 $P_0(z)$ 的第 M 个多相位, 其中的 Householder 参数向量 $\mathbf{v}_i$ 满足条件: $\mathbf{v}_{i,M} = 0, i = 1, 2, \dots, K-1$, 那末, 由 (2) 式构造的尺度函数 $\varphi(t)$ 是紧支撑的, 且满足条件: $\varphi(n) = \delta(n-1)$ 。

证明 由推论 1, 只需证明 $P_{0,M-1}(z) = 1/\sqrt{M}$ 。因为 [10]

$$[P_{0,0}(z), P_{0,1}(z), \dots, P_{0,M-1}(z)]^T = \frac{1}{\sqrt{M}} \prod_1^{K-1} [I - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + z^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T] [1, 1, \dots, 1]^T,$$

所以,

$$P_{0,M-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{M}} [0, \dots, 0, 0, \dots, 1] \prod_1^{K-1} [I - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + z^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T] [1, 1, \dots, 1]^T.$$

当 $\mathbf{v}_{i,M} = 0, i = 1, 2, \dots, K-1$ 时, $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$ 的第 M 行和第 M 列的元素全为零, 从而, M 阶方阵 $\prod_1^{K-1} [I - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + z^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T]$ 中第 M 行和第 M 列的元素除位置 (M, M) 上的元素等于 1 以外, 其余元素全为零, 因此, $P_{0,M-1}(z) = 1/\sqrt{M}$ 。证毕

利用上面的定理, 我们可以构造出一类紧支平移插值尺度函数, 由于尺度滤波器是正交的, 所以, 这样构造的尺度函数几乎是正交的。下面我们构造一个 2 阶 3 带的紧支撑插值尺度函数, 并证明它不仅是正交的, 而且也是连续的。

例 $K=2, M=3, N=6$, 此时,

$$\begin{bmatrix} P_{0,0}(z) \\ P_{0,1}(z) \\ P_{0,2}(z) \end{bmatrix} = (I + (z-1)\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T)(I + (z-1)\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

设 $\mathbf{v}_i(v_{i,1}, v_{i,2}, 0)^T, i = 1, 2$, 则

$$\begin{aligned} P_0(z) &= P_{0,0}(z^3) + zP_{0,1}(z^3)z^2P_{0,1}(z^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, z, z^2)(P_{0,0}(z^3), P_{0,1}(z^3), P_{0,2}(z^3))^T \\ &= \frac{1+z+z^2}{\sqrt{3}}[(v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2)z^2 + ((v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2) - (v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2))z \\ &\quad + 1 - (v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2) + (z-1)^2(1+z+z^2)(v_{1,1} + v_{1,2}z)ps_2], \end{aligned} \quad (5)$$

这里, $s_k = v_{k,1} + v_{k,2}, k = 1, 2; p = v_{1,1}v_{2,1} + v_{1,2}v_{2,2}$ 。

从 (5) 式我们不难看出 $P_0(z)$ 有 2 阶消失矩的充要条件是: $1+z+z^2$ 的两个根 $e^{2\pi j/3}$ 、 $e^{4\pi j/3}$ 是方程

$$(v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2)z^2 + ((v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2) - (v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2))z + 1 - (v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2) = 0.$$

利用二次方程根与系数的关系能够导出

$$e^{2\pi j/3} + e^{4\pi j/3} = \frac{(v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2) - (v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2)}{v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2},$$

$$e^{2\pi j/3} \times e^{4\pi j/3} = \frac{1 - (v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2)}{v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2},$$

通过化简, 上面两个方程等价于下面的方程组

$$v_{1,1}s_1 + v_{2,1}s_2 = 2/3, \quad (6a)$$

$$v_{1,2}s_1 + v_{2,2}s_2 = 1/3. \quad (6b)$$

解方程 (6) 式, 并注意到: $s_k = v_{k,1} + v_{k,2}$, $v_{k,1}^2 + v_{k,2}^2 = 1$, $k=1,2$ 我们有

$$v_k = [2(s_k - 1/(3s_k)), 2/(3s_k) - s_k, 0]^T, \quad k = 1, 2,$$

$$ps_2 = -2/(9s_1),$$

这里, $s_1^2 + s_2^2 = 1$, $s_1^2 = (15 \pm \sqrt{65})/30$. 于是,

$$P_0(z) = \sqrt{3} \left[\frac{1+z+z^2}{3} \right]^2 Q(z), \quad (7a)$$

$$Q(z) = -\frac{2}{3s_1} \left[\left(\frac{2}{3s_1} - s_1 \right) z^3 + \left(4 - \frac{2}{s_1^2} \right) z^2 + \left(\frac{2}{s_1^2} - 5 \right) z \right] - \frac{1}{3} + \frac{4}{9s_1^2}. \quad (7b)$$

因此, 我们得到两个尺度滤波器:

$$P_0^{(k)}(z) = \sqrt{3} \left[\frac{1+z+z^2}{3} \right]^2 Q_k(z), \quad (8a)$$

$$Q_1(z) = \frac{\sqrt{65}-7}{12} z^3 + \frac{13-\sqrt{65}}{12} z^2 + \frac{3\sqrt{65}-5}{12} z + \frac{11-\sqrt{65}}{12}, \quad (8b)$$

$$Q_2(z) = -\frac{7+\sqrt{65}}{12} z^3 + \frac{13+\sqrt{65}}{12} z^2 - \frac{5+\sqrt{65}}{12} z + \frac{11+\sqrt{65}}{12}. \quad (8c)$$

选择 $\max |Q_k(\omega)|$ 中较小的一个 $Q_1(z)$, 因为它不仅影响所构造尺度函数的几何性质, 而且也决定着相应子波基的逼近能力^[11-13].

$$|Q_1(\omega)|^2 = \frac{104 - 9\sqrt{65}}{9}$$

$$+ \frac{63\sqrt{65} - 593}{36} \cos \omega + \frac{71 - 9\sqrt{65}}{9} + \cos 2\omega + \frac{9\sqrt{65} - 71}{36} \cos 3\omega + \frac{33}{9}$$

$$+ \frac{9\sqrt{65} - 95}{9} \cos \omega + \frac{142 - 18\sqrt{65}}{9} + \cos^2 \omega + \frac{9\sqrt{65} - 71}{9} \cos^3 \omega.$$

设 $t = \cos \omega$. 则上面的式子可表示为

$$f(t) = |Q(\omega)|^2 = \frac{33}{9} + \frac{9\sqrt{65}-95}{9}t + \frac{142-18\sqrt{65}}{9}t^2 + \frac{9\sqrt{65}-71}{9}t^3.$$

两边对 $f(t)$ 求导产生

$$f'(t) = \frac{9\sqrt{65}-71}{3}t^2 + \frac{284-36\sqrt{65}}{9}t + \frac{9\sqrt{65}-95}{9}.$$

由于对所有 $t \in [-1, 1]$, $f'(t) \leq 0$, 所以 $f(t)$ 是单调递减函数, 从而

$$1 = f(1) \leq |Q(\omega)|^2 \leq f(-1) = \left[\frac{9-2\sqrt{65}}{3} \right]^2.$$

于是, $1 \leq |Q(\omega)| \leq \left[\frac{2\sqrt{65}-9}{3} \right] < 3$, 用引理 2 和引理 3 可导出 $\varphi_1(x)$ 的连续性.

至此, 我们已经构造出一个 3 带的尺度函数 $\varphi_1(x)$ (见图 2), 它不仅满足尺度函数的性质 (1)、(2)、(3), 而且还是连续函数.

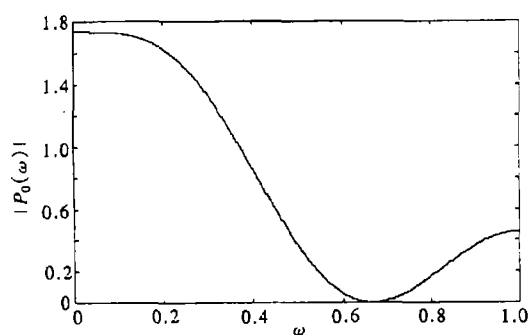


图 1 尺度滤波器 $P_0(\omega)$ 的幅度谱

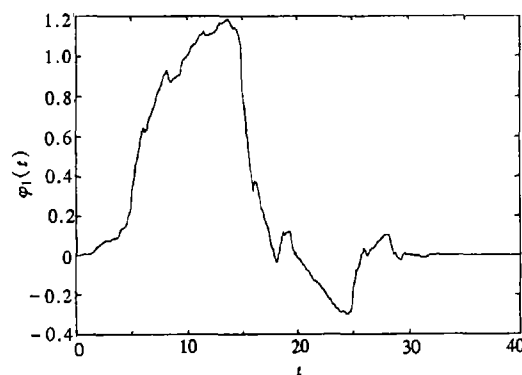


图 2 尺度函数 $\varphi_1(x)$

3 M 带 Walter 子波抽样定理

最后我们把 2 带的 Walter 抽样定理^[1] 扩展到 M 带. 仿照 Walter 的证明方法, 我们可以证明下面的 M 带子波抽样定理,

定理 2 设 $\varphi(t)$ 是一个 M 带正交紧支撑尺度函数, 且满足条件: $\sum_n \varphi(n)e(-jn\omega) \neq 0$, $\omega \in R$, 则对任一函数 $f(t) \in V_0(\varphi)$, 存在内插函数 $S(t)$, 使得 $f(t) = \sum_n f(n)S(t-n)$. 这里

$$\hat{S}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) / \left[\sum_n \varphi(n)e(-jn\omega) \right]. \quad (9)$$

从 (9) 式我们不难看出: $\varphi(t)$ 是主尺度函数当且仅当

$$f(t) = \sum f\left(\frac{n}{M^J}\right)\varphi(M^J t - n), \quad \forall f(t) \in V_J(\varphi). \quad (10)$$

特别当 $\varphi(t)$ 是上节构造的尺度函数时, Walter 抽样定理具有下列形式:

$$f(t) = \sum f\left(\frac{n+1}{M^J}\right)\varphi(M^J t - n), \quad \forall f(t) \in V_J(\varphi). \quad (11)$$

因此利用 (11) 式我们能够对多分辨空间 V_J 中的信号 $f(t)$ 通过下列算法:

$$f\left(\frac{n}{M^{k+1}}\right) = \sum f\left(\frac{k+1}{M^k}\right)p_{n-M^{k+1}}^{(0)}, \quad k = J, J+1, \dots$$

进行严格而快速的重构, 由于这里的插值尺度滤波器是 FIR 的, 所以这种重构除了计算机的有限字长误差外, 没有任何截断误差。

4 结 论

本文构造出一类 M 带正交紧支插值尺度函数, 并在一定范围将其参数化。举例构造出了一个 3 带尺度函数, 证明了它是正交和连续的。最后把 2 带的 Walter 的抽样定理扩展到 M 带子波空间。具有插值性质的 Walter 抽样定理在对多分辨空间的信号进行 D/A 转换时, 除了计算机的有限字长误差外, 没有任何截断误差。

参 考 文 献

- [1] Walter G G. A sampling theorem for wavelet subspaces, IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2): 881-884.
- [2] Aldroubi A, Unser M. Families of wavelet transforms in connection with Shannon's sampling theorem and the Gabor transform. Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, C.K. Chui, Ed. New York: Academic, 1992, 509-528.
- [3] Janssen A J E M. The Zak transform and sampling theorems for wavelet subspaces. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41(12): 3360-3524.
- [4] Xia X G, Zhang Z. On sampling theorem, wavelets, and wavelet transforms. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41(12): 3524-3535.
- [5] Djokovic I, Vaidyanathan P P. New sampling theorems for MAR subspaces. Proc. ICASSP 1995, 1085-1088.
- [6] Sweldens W, Piessens R. Wavelet sampling techniques. Proceeding of Joint Statistical Meetings, San Francisco: August 1993, 20-29.
- [7] Shen M J. The discrete Wavelet transform: Wedding the Atrous and Mallat algorithm. IEEE Trans. on SP. 1992, SP-40(10): 2464-2482.
- [8] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Appl. Comput. Harmon. Anal. 1996, 3(2): 186-200.
- [9] Lawton W M. Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelets bases. J. Math. Physics. 1991, 32(1): 57-61.
- [10] Steffen P, Heller P, Gopinath R A, Burrus C S. Theory of regular M-band wavelet bases IEEE Trans. on SP. 1993, SP-41(12): 3497-3510.
- [11] Sweldens W, Piessens R. Asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions II. Numer. Math. 1994, 68(3): 377-401.
- [12] Unser M. Approximation power of biorthogonal wavelet expansions. IEEE Trans. on SP, 1996, SP-44(3): 519-527.

- [13] 张建康, 保 铮, 于宏毅. M 带离散小波变换中正交小波的逼近性能分析. 中国科学 (E 辑). 1997, 27(6): 556-

M -BAND WALTER WAVELET SAMPLING THEOREM

Zhang Jiankang Bao Zheng Jiao Licheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract This paper constructs a family of M -band orthogonal compactly supported interpolating scaling function, gives a 3-band scaling function and shows that it is not only compactly supported, but also orthogonal and continuous. G.Walter's wavelet sampling theorem(1992) corresponding to the scaling function has the compactly supported interplant. Therefore, the signals in multiresolution subspaces can be reconstructed exactly and quickly without any truncated errors except finite field length errors.

Key words M -band wavelets, Walter wavelet sampling theorem, Interpolating scaling functions

- 张建康: 男, 1960 年生, 博士, 研究兴趣为: 子波变换及其应用, 多速率信号处理, 算术变换和快速算法, 数据压缩.
- 保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 中国科学院院士, 中国电子学会会士, 博士生导师, 主要研究领域: 雷达信号处理.
- 焦李成: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为智能信号处理和非线性科学.