

按自相似原理构成的一种随机粒子模型及其应用*

程登辉 王一平

(西安电子科技大学, 西安 710071)

摘要 本文按分形几何的自相似原理构造出一种具有自相似分布结构的随机粒子模型, 求得了其数密度相关函数。这种模型有确定的构造方法, 在结构上具有自相似性, 并可按其结构特征求得其相关函数, 因而便于应用于随机介质与波的相互作用的研究和计算机模拟。本文应用此模型分析了雷达回波功率与距离的关系。结果与 Rastogi 等人(1990)的数值模拟结果完全一致。

关键词 电波传播; 分形几何; 自相似; 相关函数

一、引言

分形和分维理论揭示了在几何上无固定标度的媒质中广泛存在的内在精细结构。它的特征是在一定尺度范围内, 媒质结构具有自相似性, 因而与之相应的物理量的相关性无特征尺度。另一方面用分形几何方法构造出的媒质结构可以反映具有分维的媒质实际状况, 同时也为讨论其相关函数提供了一个例子。

本文首先以嵌入一维欧氏空间的按自相似原理构成的随机粒子为例, 给出数密度函数的定义, 求得其相关函数。然后推广到嵌入二维和三维欧氏空间的情形。在此基础上对 Rastogi 等人^[1]研究的雷达目标回波功率与距离的关系做了分析计算, 得到了与他们的数值模拟完全一致的结果。

二、按自相似操作构成随机粒子密度的相关函数

取一长为 L_0 的直线, 如图 1 中 $M=0$ 所示。将它等分为 n 段(图中取 $n=4$), 以概率 $p(p \geq 1/n)$ 随机地从中取出一部分, 得到如图 1 中 $M=1$ 的结果(图上取 $p=3/4$)。将取出的每个长为 L_0/n 的小段再等分为 n 段, 又以概率 p 随机地取出一部分, 得到图 1 中 $M=2$ 的结果。依此以相同的概率 p 独立地重复操作至 M 次为止, 得到一系列长为 L_0/N 的小段, 其中 $N=n^M$ 。在这些小段上放上尺寸为 L_0/N 的粒子, 则这些粒子的局部分布与整体分布具有统计意义上的相似性。操作次数 M 可以根据所要模拟的实际

粒子的尺寸确定,而 L_0 的大小可以根据粒子集合的实际尺度来确定。

由于在 $M=1$ 的操作中,整体被分为 pn 个局部,每一局部与整体的相似比为 $1/n$,故所得粒子群的豪斯道夫维数为^[2]

$$D = \log(pn)/\log n = 1 + \log p/\log n \quad (1)$$

由于 $1/n \leq p \leq 1$, 故有 $0 \leq D \leq 1$ 。

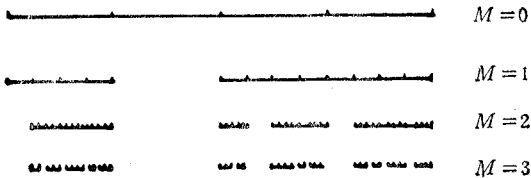


图1 嵌入一维欧氏空间的随机粒子

长度为 L_0 的直线经过 M 次划分后,被分为若干个尺寸为 L_0/N 的小段,每段上放一个粒子,则可以规定粒子的线密度函数为

$$\rho(x_i) = \begin{cases} N/L_0, & x_i \text{ 处有粒子} \\ 0, & x_i \text{ 处无粒子} \end{cases} \quad (2)$$

在上述构造过程中,在空间位置上和方向上均无特别优先的选择,因而 $\rho(x_i)$ 为各向同性的、具有两个取值的、在统计上均匀的随机函数,其分布律为

$\rho(x_i)$	0	N/L_0
p	$1 - p^M$	p^M

这是因为若 x_i 处有粒子,则必在 M 次划分中 x_i 均以概率 p 被选出。按照离散随机函数关于均值方差和相关函数的定义式,可由(1)式导出 $p^M = N^{D-1}$, 从而得

$$\text{均值 } E = E[\rho(x_i)] = p^M N/L_0 \quad (3)$$

$$\text{方差 } \text{Var} = \text{Var}[\rho(x_i)] = p^M(1 - p^M)N^2/L_0^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{相关函数 } C(\tau) &= E[\rho(x_i)\rho(x_i + \tau)] \\ &= (N^2/L_0^2)P\{\rho(x_i) = N/L_0, \rho(x_i + \tau) = N/L_0\} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $P\{\cdot\}$ 表示概率。由前所述操作的独立性,(5)式所表示的两事件互相独立,故(5)式可记为

$$C(\tau) = (N^2/L_0^2)P\{\rho(x_i) = N/L_0\}P\{\rho(x_i + \tau) = N/L_0\}$$

其中右方第一个概率已知其为 p^M , 故相关函数的表达式成为

$$C(\tau) = (p^M N^2/L_0^2)P\{\rho(x_i + \tau) = N/L_0\} \quad (6)$$

以下,讨论(6)式中的概率 P 。

为了求此概率,画出 x_i 附近最末的三次划分的局部结构如图2所示。令 $\varepsilon_N = L_0/N$, $\varepsilon_{N-1} = nL_0/N$, $\varepsilon_{N-2} = n^2L_0/N, \dots, \varepsilon_{N-M} = L_0$, 则当 $|\tau| \leq \varepsilon_N$ 时, $x_i = x_i + \tau$ 与 x_i 的距离小于最小分段尺寸。即 x_i 与 x_i 两点处于同一格子中,此时

$$P\{\rho(x_i + \tau) = N/L_0\} = 1, \quad |\tau| \leq \varepsilon_N$$

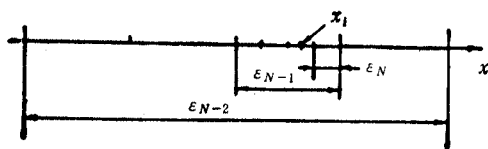
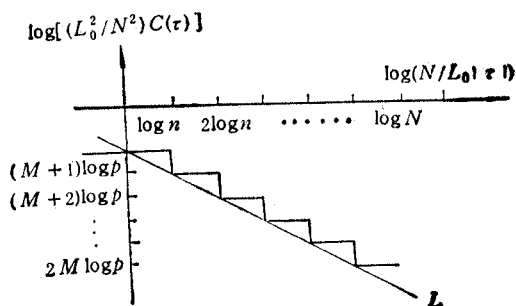
当 $\varepsilon_N < |\tau| \leq \varepsilon_{N-1}$ 时, x_i 与 x_i 同处于长度为 ε_{N-1} 的次最小分段内, x_i 被选中的概率为在最后一次操作中 x_i 被选中的概率,其值为 P 。故

$$P\{\rho(x_i) = N/L_0\} = p, \quad \varepsilon_N < |\tau| \leq \varepsilon_{N-1}$$

依此类推,可得一般关系

$$P\{\rho(x_i) = N/L_0\} = p^{l+1}, \quad \varepsilon_{N-l} < |\tau| \leq \varepsilon_{N-l+1}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

从而对不同的 $|\tau|$, $\rho(x_i)$ 的相关函数为

图2 x_i 处的局部结构图3 $\log C(\tau) \sim \log |\tau|$ 关系

$$C(\tau) = N^2/L_0^2 \times \begin{cases} p^M, & |\tau| \leq L_0/N \\ p^{M+1}, & L_0/N < |\tau| \leq nL_0/N \\ p^{M+2}, & nL_0/N < |\tau| \leq n^2L_0/N \\ \vdots & \vdots \\ p^{2M}, & n^{M-1}L_0/N < |\tau| \leq L_0 \end{cases} \quad (7)$$

在(7)式中,如以 $\log [(L_0^2/N^2)C(\tau)]$ 为纵坐标,以 $\log [(N/L_0)|\tau|]$ 为横坐标,则可以画出图3所示的 $\log C(\tau)$ 与 $\log |\tau|$ 的变化关系。它是阶梯形曲线。如用一条直线去代替此阶梯曲线,则它的斜率 k 必为

$$k = \log p / \log n = D - 1 = \frac{\log [(L_0^2/N^2)C(\tau)] - \log p^M}{\log [(N/L_0)|\tau|]}$$

其中斜率与 D 的关系由(1)式得出。由此得到

$$C(\tau) = (N^2/L_0^2)p^{2M}(|\tau|/L_0)^{D-1}, \quad L_0/N < |\tau| \leq L_0 \quad (8)$$

又在(6)式中计及 $P\{\cdot\} = 1$ 得

$$C(\tau) = n^M n^{MD}/L_0^2 = N^{D-1}/L_0^2, \quad |\tau| \leq L_0/N \quad (9)$$

(8)式和(9)式是我们所讨论的问题的近似相关函数。由此可见,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $C(\tau)$ 是高度奇异的。实际媒质的自相似结构具有一定的存在层次,这种奇异性不会对应用造成很大困难。 $C(\tau)$ 的相关距离可在(8)式中令 $(|\tau|/L_0)^{D-1} = e^{-1}$ 而得出

$$\tau_0 = L_0 \exp[1/(1-D)] > L_0$$

表明这种媒质在其存在的尺度范围内均为强相关的。在此范围内无确定的相关性特征尺度。这是它与寻常的指数型或高斯型相关函数描述的粒子分布相区别的主要特征之一。

在二维欧氏空间中取边长为 $L_0 \times L_0$ 的正方形,将它分为 n^2 个相等的小正方形,以概率 p 随机地选出其中的一部分,再对选出的每个小正方形重复上述操作,直至 $M = k$ 。最后得到边长为 $(L_0/N) \times (L_0/N)$ 的小正方形族。每个代表一个相应尺寸的随机粒子。它们构成了嵌入二维欧氏空间的、具有自相似分布结构的随机粒子群。该随机粒子的面数密度函数 $\rho(\rho)$ 可规定为

$$\rho(\rho) = \begin{cases} N^2/L_0^2, & \rho \text{ 处有粒子} \\ 0, & \rho \text{ 处无粒子} \end{cases} \quad (10)$$

同理, $\rho(\rho)$ 是具有两个取值的统计均匀随机函数。但严格地说, $\rho(\rho)$ 的相关函数与

方向有关。例如,沿正方形对角线方向与沿边长方向的相关性稍有不同,其差别仅为一个 $(\sqrt{2})^{2-D}$ 的乘数因子,函数形式并无改变,故可近似认为是各向同性的。类似于嵌入一维欧氏空间的情形,嵌入于二维欧氏空间的粒子数密度相关函数可记为

$$\begin{aligned} C(\xi) &= E[\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r} + \xi)] \\ &= (p^{2M}N^4/L_0^4)(|\xi|/L_0)^{D-2}, \quad L_0/N < |\xi| \leq L_0 \end{aligned} \quad (11)$$

及

$$C(\xi) = N^{D+2}/L_0^4, \quad |\xi| \leq L_0/N \quad (12)$$

其中 $D = 2 + \log p / \log n$ 为随机粒子的豪斯道夫维数。

同样地,将三维欧氏空间中边长为 $L_0 \times L_0 \times L_0$ 的立方体分为 n^3 个相等的小正方体,进行与上述相似的随机挑选和再划分操作,可得一族嵌入三维欧氏空间的随机粒子群。粒子的尺度为 L_0/N , 其体数密度函数 $\rho(\mathbf{r})$ 定义为

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} N^3/L_0^3, & \mathbf{r} \text{ 处有粒子} \\ 0, & \mathbf{r} \text{ 处无粒子} \end{cases} \quad (13)$$

它也可近似地被认为是一均匀的各向同性的随机函数。它的相关函数是

$$\begin{aligned} C(d) &= E[\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r} + d)] \\ &= (p^{2M}N^6/L_0^6)(|d|/L_0)^{D-3}, \quad L_0/N < |d| \leq L_0 \end{aligned} \quad (14)$$

和

$$C(d) = N^{D+3}/L_0^6, \quad |d| \leq L_0/N \quad (15)$$

其中 $D = 3 + \log p / \log n$ 为随机粒子的豪斯道夫维数。

一般地,嵌入 d 维欧氏空间的、按上述自相似原理构成的随机粒子群,其数密度函数 $\rho(\mathbf{r})$ 可定义为

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} N^d/L_0^d, & \mathbf{r} \text{ 处有粒子} \\ 0, & \mathbf{r} \text{ 处无粒子} \end{cases} \quad (16)$$

其相关函数为

$$\begin{aligned} C(r) &= E[\rho(0)\rho(\mathbf{r})] \\ &= (p^{2M}N^{2d}/L_0^{2d})(|r|/L_0)^{D-d}, \quad L_0/N < |r| \leq L_0 \end{aligned} \quad (17)$$

和

$$C(r) = N^{D+d}/L_0^{2d}, \quad |r| \leq L_0/N \quad (18)$$

其中 $D = d + \log p / \log n$ 为嵌入 d 维欧氏空间中的、随机粒子的豪斯道夫维数, $1/n$ 为局部与整体的相似比。

三、应用举例

根据雷达方程,通常点目标的回波功率与距离四次方成反比,而体目标的回波功率与距离平方成反比。其中后一结论是根据雷达波束内的点散射体是互不相关的假设而得出的^[3]。在实际的雷达观测中经常发现许多不符合上述关系的情形^[4-6]。为探求距离关系的变化, Rastogi 等人^[1]曾用与本文所述嵌于二维欧氏空间的类似方法在计算机上构造了一个平面分形的点集,对雷达回波的距离关系进行了数值模拟,所用的模型如图4所

示。其中平面 S 为具有自相似结构的球形点目标集合, 雷达波束轴线与平面 S 平行, 波束宽度 $\Delta\theta = 0.9^\circ$, 距离分辨率 $\Delta r = 0.32\text{km}$, 平面 S 的格点数是 N^2 个, 而 $N = 4096$ 。划分次数 $M = 6$, $L_0 \approx 0.4\text{km}$, 平面中心到雷达的距离为 $r = 5 \sim 20\text{km}$ 。他们在计算机上产生了针对不同距离 r 和豪斯道夫维数 D 的大量目标样本。在球面波和玻恩近似条件下, 将波束内的点目标散射场相干叠加, 统计平均后得到目标的后向散射功率 P_s 与距离的关系为

$$P_s \propto r^{-\beta} \quad (19)$$

图 4 目标散射的几何图形(图中的 r 和 ρ 应为黑体)

其中 β 与 D 的关系由取 $D = 1.13, 1.34, 1.50, 1.63, 1.74$ 的 5 个点上得出的 β 对应值给出。

应用本文前节得到的相关函数和随机波场理论, 在同样的条件下, 可利用已知算式^[7]解析地求得距离关系。

设天线口面面积为 A , 入射波长为 λ , 辐射功率为 P_t , 则在玻恩近似下到达平面 S 上任意点 r_i 处随机粒子的球面波场强为

$$E_i = \frac{k}{2\pi r_i} \sqrt{2\eta_0 P_t A} \exp(-jk r_i)$$

其中 η_0 为自由空间的波阻抗, $k = 2\pi/\lambda$ 。 r_i 处粒子散射回波场强为

$$dE_s = \frac{\hat{s}(-\hat{i}, \hat{i}) \sqrt{2\eta_0 P_t A}}{j2\pi r_i^2} \exp(-2jk r_i) \rho(r_i) dS$$

其中, $\hat{i}$ 为 r_i 方向的单位矢量, $\hat{s}(-\hat{i}, \hat{i})$ 为点散射体的后向散射幅度函数, $\rho(r_i)$ 为 r_i 处粒子的面数密度函数。利用(11)式得雷达接收的散射功率为

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{A}{2\eta_0} \langle |E_s|^2 \rangle \\ &= \frac{A^2 P_t \sigma_b}{4\pi^2} \iint_S \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \langle \rho(r_1) \rho(r_2) \rangle \exp[-2jk(r_1 - r_2)] dS_1 dS_2 \\ &= \frac{P_t A^2 \sigma_b}{4\pi^2} \frac{p^{2M} N^4}{L_0^4} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \\ &\quad \times \left(\frac{|\rho|}{L_0} \right)^{D-2} \exp[-2jk(r_1 - r_2)] r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (20)$$

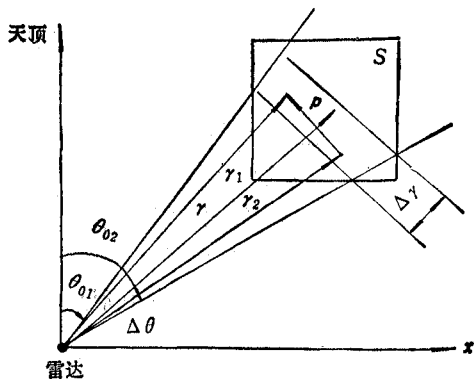
式中 σ_b 是点目标的后向散射截面 $\sigma_b = |\hat{s}(-\hat{i}, \hat{i})|^2$, $\rho = r_1 - r_2$ 。由图 4 可见

$$\rho = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{1/2}$$

由于雷达的分辨率 $\Delta r \ll r_i$, 且 $\Delta\theta \approx 0$, 故有以下近似

$$r_1 \approx r_2 \approx r$$

$$\rho \approx \sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)} \approx r |\theta_1 - \theta_2|$$



将此近似代入(20)式中得

$$P_s \approx \frac{P_t A^2 \sigma_D}{4\pi^2} \frac{p^{2M} N^4}{L_0^4} \frac{I_\theta I_r}{r^{4-D}}$$

其中

$$I_\theta = \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} |\theta_1 - \theta_2|^{D-2} d\theta_1 d\theta_2 = \frac{2(\Delta\theta)^D}{D(D-1)}, \quad (D \neq 1)$$

$$I_r = \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} \exp[-2jk(r_1 - r_2)] dr_1 dr_2$$

$$= \sin^2(k\Delta r)/(16k^2)$$

于是

$$P_s = \frac{P_t A^2 \sigma_b}{32\pi^2 k^2} \frac{(\Delta\theta)^D \sin^2(k\Delta r)}{D(D-1)} \frac{p^{2M} N^4}{L_0^4} \frac{1}{r^{4-D}}$$

$$\propto r^{-(4-D)}$$

即在(19)式中应有

(21)

$$\beta = 4 - D$$

(22)

这个计算的结果与 Rastogi 等人的数值模拟^[1]得到的 5 个点上的 $\beta \sim D$ 关系完全一致。这就证实了本文的、具有自相似分布结构的、随机粒子的相关分析结果是有效的。

四、结 论

本文建立的随机粒子模型反映了在分布结构上具有自相似性特点的一类粒子对其相关函数的影响。它具有确定的构成方式,便于应用随机场理论和在计算机上实现数值模拟,因而可用于随机介质与波场相互作用的理论研究。自相似分布的随机粒子的相关函数为幂函数形式,有表征自相似性存在范围的两个尺度,即相应于粒子尺寸的内尺度和相应于粒子群存在范围的外尺度。在此范围内,粒子的相关性无特征尺度。本文提出的采用自相似操作构造随机粒子模型的工作是初步的,有关它的改进和应用尚须做进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] P. K. Rastogi, K. F. Scheucher, *Radio Sci.*, 25(1990), 1057—1063.
- [2] 李后强、程光钺,分形与分维,四川教育出版社,成都,1990年.
- [3] R. E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, New York, (1985), pp. 508—510.
- [4] R. J. Doviak, D. Zernic, *Doppler Radar and Weather Observations*, Academic Press, San Diego, Calif., (1984), pp. 458—460.
- [5] P. K. Rastogi, S. A. Bowhill, *J. Atmos Terr. Phys.*, 38(1976), 449—462.
- [6] K. S. Gage et al., *Radio Sci.*, 20(1985), 1493—1501.
- [7] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York, (1978).

A MODEL OF RANDOM PARTICLES CONSTRUCTED BY THE PRINCIPLE OF SELF-SIMILARITY AND ITS APPLICATION

Cheng Denghui Wang Yiping

(*Xidian University, Xi'an 710071*)

Abstract A model of random particles constructed by the operation of self similarity in fractal geometry is presented, and the correlation function of its number density is obtained. The model, which can be constructed with a definite method, has the characteristic of self-similarity in structure, and its correlation functions can be obtained accordingly. Therefore, it can be used conveniently in theoretical study and digital simulations of wave interaction in random media. As an example, this model has been applied to analyse the range dependence of volume scattering in radar echoes. The results agree well with Rastogi's (1990) simulation results.

Key words Electromagnetic wave propagation; Fractal geometry; Self-similarity; Correlation function