

# 基于迭代的置信传播编码调制在瑞利衰落信道中的性能

芮 华 徐大专 张小飞

(南京航空航天大学信息科学与技术学院 南京 210016)

**摘 要:** 该文提出一种结合低密度校验码 (LDPC) 和 MQAM 星座的置信传播编码调制方案, 并对其在瑞利衰落信道下成对差错概率及最优星座选择进行了分析。为防止过多错误反馈造成译码失效, 提出采用内、外双重迭代方式提高系统的鲁棒性。同时把 LDPC 码校验矩阵作为迭代终止判决准则, 降低了迭代算法的平均复杂度。与其他 3 种方案相比, 仿真结果证明了该方案能显著提高系统性能。

**关键词:** 低密度校验码, 多级正交幅度调制, 比特交织编码调制, 瑞利衰落信道

**中图分类号:** TN911.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)02-0214-04

## Performance of Belief Propagation Coded Modulation with Iterative Decoding over Rayleigh Fading Channel

Rui Hua Xu Da-zhuan Zhang Xiao-fei

(Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** To combine Low-Density Parity-Check (LDPC) codes with MQAM constellation, a scheme of Belief Propagation Coded Modulation with Iterative Decoding (BPCM-ID) is proposed. The Pair Error Probability (PEP) performance in Rayleigh channel and design rules for MQAM constellation are also analyzed. Both outer and inner iterations are used to avoid too much errors feedback which may cause decoding failure. The scheme introduces the check equations of LDPC codes to terminate both iterations which reduce the average decoding complexities greatly. Simulation results show that the proposed BPCM-ID is effective and performs better than the other three schemes.

**Key words** Low-density parity-check code, MQAM, Bit-interleaved coded modulation, Rayleigh channel

### 1 引言

最早的联合编码调制方案是 Ungerboeck 提出的格码调制 TCM<sup>[1]</sup>, 其思想是利用欧氏空间集合划分获得额外编码增益。针对 TCM 存在未受编码保护的比特以及在衰落信道下的性能不佳等缺点, Zehavi<sup>[2]</sup>设计的 8PSK 联合编码调制方案, 在衰落信道下获得优异性能。90 年代末期, Turbo 法则(最大似然译码、交织和迭代)得到广泛应用, Caire<sup>[3]</sup>提出用比特交织编码调制(BICM)取代符号交织编码调制方案, 在不增加译码复杂度的前提下, 有效提高了系统编码增益。在此基础上, Li<sup>[4]</sup>和 Chindapol<sup>[5]</sup>提出了 BICM 的迭代译码的方案, 通过解码器与解调器之间的软信息反馈, 可以获得 2dB 迭代增益。然而, 其代价是对于  $N$  次迭代, 译码复杂度提高了  $N$  倍。

近年来发现, Gallager<sup>[6]</sup>于 1963 年提出的低密度校验 (LDPC) 码具有优异的性能<sup>[7]</sup>。LDPC 码的线性译码复杂度、无噪声平底效应等特性, 使其具有比 Turbo 码更广阔的应用前景<sup>[8]</sup>。本文主要研究把 LDPC 码与 BICM 相结合, 通过软信息迭代提高系统增益。在分析该方案在瑞利信道下的误码率

性能同时, 讨论了不同星座选择对系统性能的影响。

### 2 BPCM-ID 系统方案

本文提出的 BPCM-ID 可以看作是一种串行级联反馈迭代方案, 其中 MQAM 星座映射可以看作码率为 1 的编码器, 如图 1(a)所示。在系统的发射部分, LDPC 编码器实现对二进制信息源的编码, 然后把二进制信息映射到 MQAM 星座上。编码和映射之间不需要比特交织器, 这是因为 LDPC 编码器的稀疏校验矩阵能确保相邻比特的校验不相关。

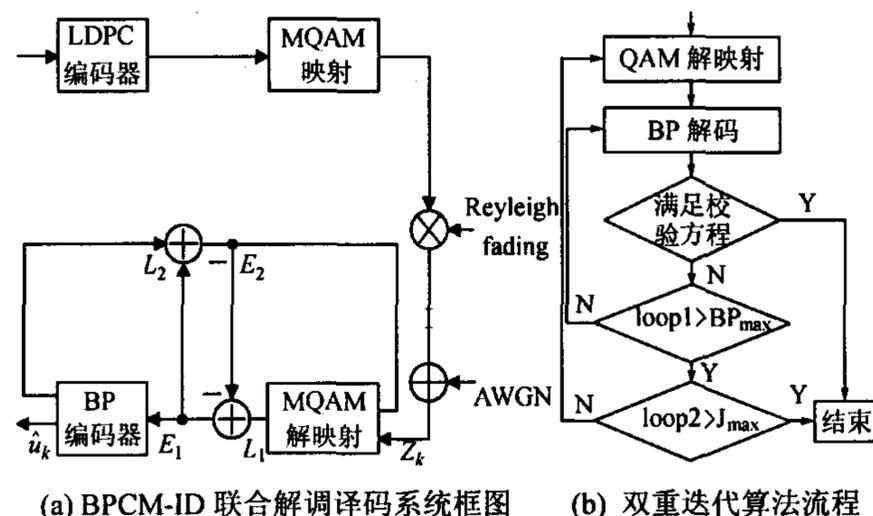


图 1

在系统的接收部分， $Z_k$  是经过信道输出的复信号序列，它作为初次迭代是输入解调器的先验概率。 $E_1, E_2$  分别是解调器和解调器的先验信息， $L_1, L_2$  分别是解调器和解调器输出的外信息，它们都是以对数似然测度为量度。联合解调译码的过程就是在解调器和解调器之间的反复迭代的过程，直至算法收敛。与传统的 BICM-ID<sup>[5]</sup>相比，BPCM-ID 利用了 LDPC 译码算法的校验矩阵，一旦满足校验方程，则终止迭代，这样大大降低了迭代译码的平均复杂度。另一方面，与 Turbo 码相比，虽然 BP 译码算法的自身迭代速度很快，但收敛速度较慢。为避免由于大量错误反馈导致迭代性能恶化，本文采用了一种内、外双重迭代机制，如图 1(b)所示。其中内迭代为 LDPC 码的信息节点和校验节点之间的迭代过程，外迭代为解调器和译码器之间的迭代， $BP_{max}$  和  $J_{max}$  分别为内、外迭代次数的预设值。设  $x$  为判决后的比特序列， $H$  为 LDPC 码的校验矩阵，则校验方程  $Hx^T = 0$  作为迭代终止的判决准则。通过合理选择内、外迭代的次数，以最小的代价获得系统迭代的可靠收敛和最优误码率性能。

## 2 联合解调译码算法

首先考虑 LDPC 的译码算法的置信传播 (belief propagation) 算法。该算法的本质是基于因子图的一种概率推理算法，又称为 ‘和-积’ 算法。目前主要的译码算法有 Gallager<sup>[6]</sup>硬判决译码和 Mackey<sup>[7]</sup>的软判决译码算法。本节在 LOG-BP 软判决译码的算法基础上，为满足联合迭代译码要求，对该算法进行了修正。

设正则 LDPC 码  $(n, j, k)$  用二分图表示，如图 2。每一个消息节点的度为  $k$ ，每个校验节点的度为  $j$ ，定义  $H$  为 LDPC 码的校验矩阵， $p_{mn}$  为由消息节点  $n$  发送到校验节点  $m$  的边界消息， $q_{mn}$  为校验节点  $m$  发送到信息节点的  $n$  的边界消息； $M(n)/m$  为  $H$  矩阵中第  $n$  列中去除第  $m$  行的非零元素；同理  $N(m)/n$  为  $H$  矩阵第  $m$  行中去除第  $n$  列非零元素。由文献[7]给出的信息序列的对数概率测度为

$$L(u_n) = \ln \frac{P(u_n = 0 | z, c)}{P(u_n = 1 | z, c)} \quad (1)$$

其中  $z$  表示输入序列， $c$  表示满足所有的校验方程。对于联合解调译码，需要考虑解调器送入的符号外信息，对式(1)进行修正：

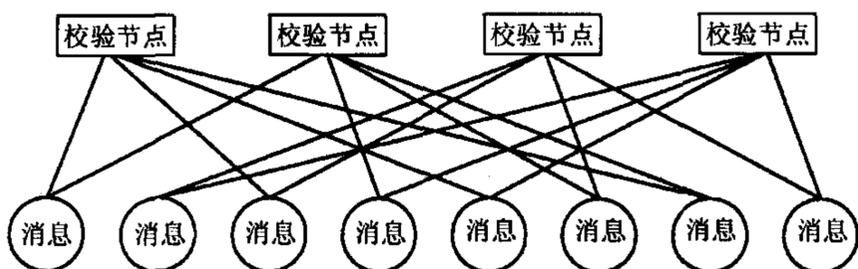


图 2 (8, 4, 2)正则码二分图

$$L(u_n) = \ln \frac{P(u_n = 0 | z, c, s)}{P(u_n = 1 | z, c, s)} \quad (2)$$

其中  $s$  表示含有信息比特  $u_n$  的符号，则从消息节点发送到校验节点的边界消息概率测度为

$$L(p_{mn}) = \ln \prod_{m' \in M(n)/m} \frac{P(u_n = 0 | z, c_{m'}, s_{m'})}{P(u_n = 1 | z, c_{m'}, s_{m'})} \quad (3)$$

考虑到  $H$  校验矩阵是稀疏的，可以假设各个信息位统计独立，即  $s, c$  不相关，根据 Bayes 法则：

$$\begin{aligned} L(p_{mn}) &= \ln \frac{P(u_n = 0)}{P(u_n = 1)} + \sum_{m' \in M(n)/m} \ln \frac{P(c_{m'} | z, u_n = 0)}{P(c_{m'} | z, u_n = 1)} \\ &\quad + \sum_{m' \in S_m/m} \ln \frac{P(s_{m'} | z, u_n = 0)}{P(s_{m'} | z, u_n = 1)} \\ &= L^a(u_n) + \sum_{m' \in M(n)/m} L(q_{m'n}) + L^s(u_n) \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $c_{m'}$  定义为满足第  $m'$  个校验方程， $s_{m'}$  表示由符号  $s$  内其他信息比特  $m$  的判决概率测度。其中式(4)的第一项是假设来自信息源的先验概率，即对于初始迭代  $L^0(p_{mn}) = L^a(u_n)$ 。第二项作校验节点对当前信息节点的判决信息，而  $L^s(u_n)$  作为迭代开始后，由解调器送入的外信息。

$$\text{设 } g(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \beta_{mn} = \left| \ln \frac{1 - p_{mn}}{p_{mn}} \right|, \alpha_{mn} = \text{sgn} \left( \ln \frac{1 - p_{mn}}{p_{mn}} \right),$$

则从校验节点发送给消息节点的边界消息概率测度经过带入推导为

$$L(q_{mn}) = \prod_{n' \in N(m)/n} \alpha_{mn'} \ln \frac{\exp(\sum_{n' \in N(m)/n} g(\beta_{mn'})) + 1}{\exp(\sum_{n' \in N(m)/n} g(\beta_{mn'})) - 1} \quad (5)$$

最终的信息位判决：

$$L2(u_n) = L^a(u_n) + \sum_{m \in M(n)} L(q_{mn}) + L^s(u_n) \quad (6)$$

取  $\hat{u}_n = \text{sgn}(L2(u_n))$ ，带入校验方程，如果  $H \cdot \hat{u} = 0$ ，终止迭代，否则继续循环。若循环次数超过预设值，则内迭代终止，开始进行外迭代。

其次考虑 MQAM 星座的解调。定义  $s(k) = (s_k^0, s_k^1, \dots, s_k^{m-1}) = \text{map}(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$  为比特到符号的映射，其中  $m = \log_2(M)$ ，则已知输入符号  $z_k$ ，判别比特的后验概率似然比为

$$\begin{aligned} L(s_k^j | z_k, c_k) &= \ln \frac{P(s_k^j = 0 | z_k, c_k)}{P(s_k^j = 1 | z_k, c_k)} \\ &= L^a(s_k^j) + \ln \frac{\sum_{s \in S_0^v} p(z_k | s) \exp(\sum_{s_k^i=0, j \neq v} L2(s_k^i))}{\sum_{s \in S_1^v} p(z_k | s) \exp(\sum_{s_k^i=1, j \neq v} L2(s_k^i))} \\ &= L^a(s_k^j) + L^s(s_k^j) \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $S_0^v, S_1^v$  是指由所有符号向量中第  $v$  个比特为 0 或 1 所构成的码集。 $L^a(s_k^j)$  为信源传递的第  $k$  个符号中第  $j$  个比特的

先验信息;  $L^s(s_k^j)$  为解调过程中由同一符号内其他比特判决带来的外信息。

在瑞利信道下, 设  $z = h_1 \cdot s_1 + jh_2 \cdot s_0 + n$ ,  $n$  为复高斯白噪声, 其方差为  $\sigma^2 = N_0/2$ ,  $h_1, h_2$  为统计独立的瑞利衰落, 转移概率密度为

$$p(z|s) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0}(|z_1 - h_1 s_1|^2 + |z_0 - h_2 s_0|^2)\right) \quad (8)$$

则式(7)中的第二项可表示为

$$L^s(s_k^j) = \ln \frac{\sum_{s \in S_0^v} \exp\left(-\frac{1}{N_0}(|z_1 - h_1 s_1^0|^2 + |z_0 - h_2 s_0^0|^2 + \sum_{s_k^j=0, j \neq v} L^a(s_k^j))\right)}{\sum_{s \in S_1^v} \exp\left(-\frac{1}{N_0}(|z_1 - h_1 s_1^1|^2 + |z_0 - h_2 s_0^1|^2 + \sum_{s_k^j=1, j \neq v} L^a(s_k^j))\right)} \quad (9)$$

#### 4 BPCM-ID 在瑞利信道下的误码率性能

LDPC 码是一种线性分组码, 因此可以采用文献[4]给出的分组码误码率的联合上限:

$$P_b \leq \frac{1}{K_c} \sum_{d=d_{\min}}^{N_c} W_1(d) f(d, u, \chi) \quad (10)$$

其中  $W_1(d)$  为所有错误图样的汉明距离为  $d$  的码字数量,  $d_{\min}$  是码集  $C$  的最小汉明距离, 码率为  $K_c/N_c$ ,  $f(d, u, \chi)$  为成对错误概率(PEP)函数, 其参数分别为汉明距离  $d$ , 映射图样  $u$ , 信号星座集  $\chi$ 。

为了推导误码率上限, 设  $x, z$  为星座上的符号点, 且  $x$  对应为发送符号,  $z$  为错误译码的符号, 则  $P(x \rightarrow z)$  即为成对错误概率。定义二者对数测度差为  $\Delta(x, z) = \lg p(y|x) - \lg p(y|z)$ ,  $\Delta = \sum_{k=1}^d \Delta(x_k, z_k)$ , 采用拉普拉斯展开式的方法, 得出联合限中的 PEP 的概率密度函数:

$$f(d, u, \chi) = P(x \rightarrow z) \leq \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} (\varphi_{ub}(s))^d \frac{ds}{s} \quad (11)$$

其中

$$\varphi_{ub}(s) = \frac{1}{m2^m} \sum_{i=1}^m \sum_{b=0}^1 \sum_{x \in \chi_b^i} \sum_{z \in \chi_b^i} \phi_{\Delta(x, z)}(s) \quad (12)$$

$a$  为拉普拉斯展开式常量;  $m$  为每符号对应比特数;  $\bar{b}$  定义为  $b$  的互补,  $\chi_b^i$  定义为由星座符号中第  $i$  个比特为  $b$  的星座子集;  $\phi_{\Delta(x, z)}(s)$  为概率密度函数差  $\Delta(x, z)$  的拉普拉斯展开, 则在瑞利信道下<sup>[4]</sup>:

$$\phi_{\Delta(x, z)}(s) = \frac{1}{1 + s(1 - sN_0)|x - z|^2} \quad (13)$$

#### 5 MQAM 星座的设计

对于比特交织编码调制, 星座的选择非常重要。Caire<sup>[3]</sup>研究了 BICM 系统中星座映射方案, 指出星座的最小欧氏距

离的调和均值  $d_h^2$  是决定性参量, 定义如下:

$$d_h^2 = \left(\frac{1}{m2^m} \sum_{i=1}^m \sum_{b=0}^1 \sum_{x \in \chi_b^i} \frac{1}{|x - \bar{z}|^2}\right)^{-1} \quad (14)$$

仿真结果表明,  $d_h^2$  越大, 则系统获得欧氏空间分集增益越高。由于 Gray 星座对应的  $d_h^2$  要比其他星座映射方案高, 因此对于 BICM 调制而言, Gray 星座是最优的。然而, 这一结论对基于迭代的 BPCM-ID 系统并不成立。文献[4]仿真了 BICM 的迭代行为, 结果表明, Gray 星座在初始迭代时性能是最优的, 但在迭代过程中获得的附加增益却非常少。因此  $d_h^2$  只能表征不同星座映射的欧氏空间分集特性, 却不能反映迭代的特征。

在迭代的过程中, 解码器的纠错能力和充分的交织能够大大降低同一符号内的连续错误出现的概率。因此, 可以假设符号内其他比特无错误反馈。这时当前判决只有两种可能, 即判决的符号只有  $z$  和  $\bar{z}$ 。从集合划分的角度, 这意味着把一个大的星座简化为一个最小的子星座。如果令这个子星座的欧氏距离最大, 则判决的准确性得到提高。为了能准确表达这一迭代特征, 定义一个无错反馈最小欧氏距离调和均值:

$$\bar{d}_h^2 = \left(\frac{1}{m2^m} \sum_{i=1}^m \sum_{b=0}^1 \sum_{x \in \chi_b^i} \frac{1}{|x - \bar{z}|^2}\right)^{-1} \quad (15)$$

其中对于  $x \in \chi_b^i$ ,  $\bar{z}$  为只有第  $i$  个比特与  $x$  相反的星座点。 $\bar{d}_h^2$  值越高, 意味着获得的迭代增益越高。举例说明  $\bar{d}_h^2$  和  $d_h^2$  的区别。如图 3 中 Gray 星座的点 1100b, 假设当前判决为最高位比特, 则其对应互补子星座中的点 0000b 是欧氏距离最近的点, 距离为  $2a$ ; 如果考虑其他 3bit 无错反馈, 这时可能的错误点为 0100b, 距离为  $3a$ 。表 1 列出了 Gray 星座和文献[4]中 MSP(Modified Set Partitioning)星座的两个参量。可以看出, Gray 星座的  $d_h^2$  要比 MSP 星座高, 因此对于非迭代的 BICM 方案或初始迭代时, Gray 星座的性能更好; 然而相对于 MSP 星座, Gray 星座的  $\bar{d}_h^2$  与  $d_h^2$  的差非常小, 因此它获得的迭代增益比 MSP 要小的多。在随后的仿真中, 这一结论得到了验证。

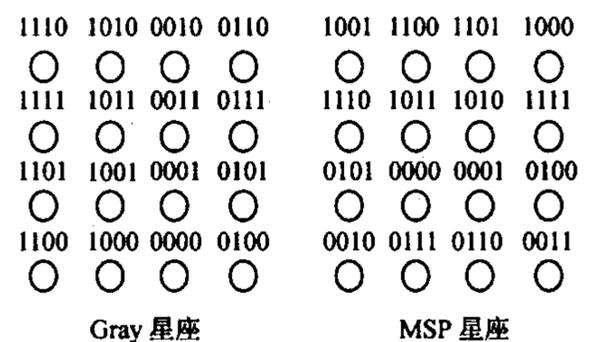


图 3 两种星座映射方案

表 1 不同星座最小欧氏距离均值比较

星座	$d_h^2$	$\bar{d}_h^2$
Gray	0.4923	0.5142
MSP	0.4202	0.2791

因此, 一个好的星座映射必须兼顾  $\bar{d}_h^2$  与  $d_h^2$  两个参量。 $d_h^2$  过小, 导致初始迭代时误码率过高, 超过信道译码的纠错能力, 导致错误扩散, 使得系统的性能迅速恶化。所以星座设计时, 在保证一定的  $d_h^2$  的前提下, 寻找一种映射方案使得  $\bar{d}_h^2$  最大。

## 6 系统仿真结果分析

本节将采用蒙特卡罗的方法对 BPCM-ID 系统进行计算机仿真。LDPC 的编码选择 1/2 码率的(1152, 3, 6)正则码, 星座映射选择如图 3 中的 Gray 星座和 MSP 星座。LDPC 内迭代的次数为 5 次, 联合解调译码的迭代次数为 5 次。仿真中还采用了(2,1,6)卷积码作为比较。

图 4 比较在完全已知 CSI 的 Rayleigh 衰落信道上, 两种星座对 BPCM-ID 系统误码率性能的影响。可以看出, 在初始迭代时, Gray 星座的误码率性能要明显好于 MSP, 然而在 BPCM-ID 系统外迭代过程中, Gray 星座所获得的迭代增益很小, 相比之下 MSP 星座的性能则有明显的改善。在 5 次外迭代之后, 误码率在  $2 \times 10^{-4}$  时, 16QAM 的 MSP 优于 Gray 星座 1.4dB。

图 5 仿真比较了 BPCM-ID, BPCM, BICM-ID 和 BICM 在 Rayleigh 衰落信道上的性能。其中 BPCM 采用非迭代的级联方案并采用 Gray 星座映射, BP 译码的迭代次数为 25 次; BICM-ID 中的编码采用(1/2,64)的卷积码, 星座为 MSP, 外迭代次数为 5 次, 其译码方式为软判决维特比译码; BICM 采用了 Gray 星座非迭代方式和卷积编码。仿真结果表明, 在误比特率为  $2 \times 10^{-4}$  时, BPCM-ID 比 BPCM、BICM-ID 的性能分别改善了 1.3dB 和 1.4dB。在误比特率为  $10^{-3}$  时, 比 BICM 方案提高了 2.5dB 的信噪比增益。

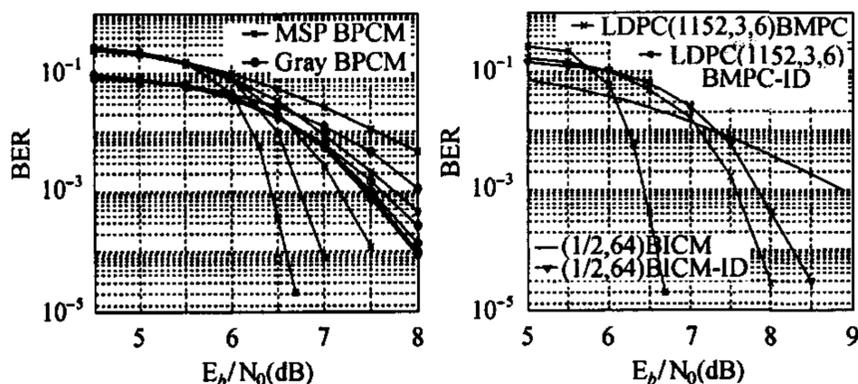


图 4 不同星座在 BPCM-ID 系统上的比较

图 5 不同系统方案的比较

## 7 结论

该文提出一种结合低密度校验码和 MQAM 星座的置信传播编码调制方案, 并对其在瑞利衰落信道下成对差错概率进行了分析。为防止过多错误反馈造成译码失效, 提出采用内、外双重迭代方式提高系统的鲁棒性。同时把 LDPC 码校验矩阵作为迭代终止判决准则, 降低了迭代算法的平均复杂度。文中分析了在 BPCM-ID 方案中, 星座设计的两个决定性参量, 这将有助于用计算机的方法来搜索最优的映射方案。与实验中其他 3 种方案相比, 仿真结果证明了 BPCM-ID 能显著提高系统性能, 并具有重要的实用价值, 在卫星通信、深空通信和宽带无线通信领域将会有着广阔的应用前景。

## 参考文献

- [1] Ungerboeck G. Trellis-coded modulation with redundant signal sets [J]. *IEEE Communications Magazine*, 1987, 25(2): 5 - 21.
- [2] Zehavi E. 8-PSK trellis codes for a Rayleigh channel[J]. *IEEE Trans. on Communications*, 1992, 40(5): 873 - 884.
- [3] Caire G, Taricco G, Biglieri E. Bit-interleaved coded modulation [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1998, 44 (3): 927 - 946.
- [4] Li X, Ritcey J A. Trellis coded modulation with bit interleaving and iterative decoding[J]. *IEEE J. on Selected Areas in Communications*, 1999, 17(4): 715 - 724.
- [5] Chindapol A, Ritcey J A. Design, analysis and performance evaluation for BICM-ID with square QAM constellation in Rayleigh fading channels. *IEEE J. on Selected Areas in Communications*, 2001, 19(5): 944 - 957.
- [6] Gallager R G. Low Density Parity Check Codes[D]. Cambridge, MA, MIT Press 1963.
- [7] Mackay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1999, 45 (3): 399 - 431.
- [8] Richardson T J, Shokrollahi M A, Urbanke R L. Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2001, 47 (2): 619 - 637.

芮华: 男, 1976年生, 博士生, 主要研究方向为编码理论和宽带无线通信系统。

徐大专: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为编码理论、宽带OFDM通信系统、软件无线电等。