

基于图形方法的对称函数两种展开系数之间的转换¹

陈偕雄

(杭州大学电子工程系 杭州 310028)

摘 要 本文讨论了基于“与”-“或”-“非”代数系统和基于“与”-“异或”代数系统的两类基本对称函数的定义和任意对称函数在这两类对称函数完备集中的图形表示,提出了两种展开系数的图形转换方法.

关键词 Reed-Muller 展开, 对称函数, b_j 图, “异或”逻辑函数

中图分类号 TN79

1 引 言

对称函数是开关理论中一种重要的特殊函数.由于其易于规则地、简便地实现以及任意逻辑函数均可转换成变量加权的对称函数等特点,在国内外引起重视^[1-4].在二值逻辑中,存在两类基本对称函数完备集——基于“与”-“或”-“非”代数系统的基本对称函数完备集和基于“与”-“异或”代数系统的RM型基本对称函数完备集.基本对称函数的定义为^[1]

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \overline{x_1} \overline{x_2} \cdots \overline{x_n}, \\ S_1 &= x_1 \overline{x_2} \cdots \overline{x_n} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \cdots \overline{x_n} + \cdots + \overline{x_1} \cdots \overline{x_{n-1}} x_n, \\ &\vdots \\ S_n &= x_1 x_2 \cdots x_n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

即 S_i 为以所有 i 个变量为原变量,其余 $n-i$ 个变量为反变量组成的乘积项之和 (“与”项之“或”). n 变量的逻辑函数中存在 $n+1$ 个基本对称函数 $S_k(x_1, \cdots, x_n)$, 其中 $k(k \leq n)$ 表示 n 个变量中有 k 个变量为 1 时,函数值为 1; 否则函数值为 0. 文献 [1] 指出,任意 n 变量的对称函数在基本对称函数完备集中可表示为

$$f(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=0}^n A_i \cdot S_i(x_1, \cdots, x_n), \quad (2)$$

式中 $A_i \in \{0, 1\}$, Σ 表示 “或” 运算.

¹ 1994-03-14 收到, 1995-01-03 定稿
浙江省自然科学基金资助项目

定义 RM 型基本对称函数定义为^[1]

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 1, \\ R_1 &= x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n, \\ R_2 &= x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus \cdots \oplus x_{n-1} x_n, \\ &\vdots \\ R_n &= x_1 x_2 \cdots x_n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $\oplus$ 表示“异或”运算。由上式可知, R_i 为所有 i 个变量取原变量组成的乘积项之“异或”。 n 变量的 $n+1$ 个 RM 型基本对称函数构成完备集, 任意 n 变量的对称函数可用 RM 型基本对称函数表示成^[5]

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \bigoplus_{i=0}^n C_i R_i(x_1, \cdots, x_n), \quad (4)$$

式中 $C_i \in \{0, 1\}$, $\bigoplus$ 表示“异或”运算。文献[5]指出了 R_i 可用 $R_1 \cdot R_2 \cdots R_{2^k}$ 表示, 在 $n=7$ 的情况下可以得到如下的关系^[5]:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 1, & R_1 &= R_1, & R_2 &= R_2, \\ R_3 &= R_1 \cdot R_2, & R_4 &= R_4, & R_5 &= R_1 \cdot R_4, \\ R_6 &= R_2 \cdot R_4, & R_7 &= R_1 \cdot R_2 \cdot R_4, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由(4), (5)两式可得

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_7) &= C_0 \oplus C_1 R_1 \oplus C_2 R_2 \oplus C_3 R_2 R_1 \oplus C_4 R_4 \\ &\oplus C_5 R_4 R_1 \oplus C_6 R_4 R_2 \oplus C_7 R_4 R_2 R_1. \end{aligned} \quad (6)$$

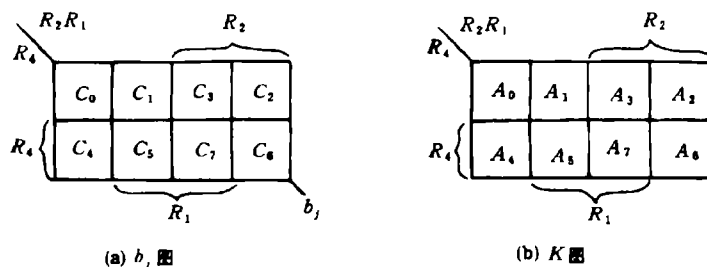


图1 对称函数的图形表示

2 C_j 系数和 A_j 系数的图形表示

(6) 式表示任意七变量对称函数在 RM 型基本对称函数完备集中的展开式可以看成以 R_4, R_2, R_1 为变量的规范 RM 展开式, 而 $C_0 \sim C_7$ 恰好是 RM 展开式的展开系数, 因此对称函数 $f(x_1, \cdots, x_7)$ 可用以 R_4, R_2, R_1 为变量的 b_j 图表示, 如图 1(a) 所示。图中与常量 1

相应的 C_0 格被定义为 b_j 图的原点, 而与乘积项 $R_4 R_2 R_1$ 相应的 C_7 格被定义为 b_j 图的重心。在变量数 $n = 7$ 的情况下, 由文献 [5] 可得

$$\begin{aligned} R_0 &= S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_7, & R_1 &= S_1 \oplus S_3 \oplus S_5 \oplus S_7, \\ R_2 &= S_2 \oplus S_3 \oplus S_6 \oplus S_7, & R_3 &= S_3 \oplus S_7, \\ R_4 &= S_4 \oplus S_5 \oplus S_6 \oplus S_7, & R_5 &= S_5 \oplus S_7, \\ R_6 &= S_6 \oplus S_7, & R_7 &= S_7. \end{aligned}$$

由上述诸式和 (5) 式可得

$$\begin{aligned} S_7 &= R_7 = R_4 R_2 R_1, & S_6 &= R_6 \oplus R_7 = R_4 R_2 \oplus R_4 R_2 R_1 = R_4 R_2 \overline{R_1}, \\ S_5 &= R_5 \oplus R_7 = R_4 R_1 \oplus R_4 R_2 R_1 = R_4 \overline{R_2} R_1, \\ S_4 &= R_4 \oplus R_5 \oplus R_6 \oplus R_7 = R_4 \oplus R_4 R_1 \oplus R_4 R_2 \oplus R_4 R_2 R_1 = R_4 \overline{R_2} \overline{R_1}, \\ S_3 &= R_3 \oplus R_7 = R_2 R_1 \oplus R_4 R_2 R_1 = \overline{R_4} R_2 R_1, \\ S_2 &= R_2 \oplus R_3 \oplus R_6 \oplus R_7 = R_2 \oplus R_2 R_1 \oplus R_4 R_2 \oplus R_4 R_2 R_1 = \overline{R_4} R_2 \overline{R_1}, \\ S_1 &= R_1 \oplus R_3 \oplus R_5 \oplus R_7 = R_1 \oplus R_2 R_1 \oplus R_4 R_1 \oplus R_4 R_2 R_1 = \overline{R_4} \overline{R_2} R_1, \\ S_0 &= R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_7 = 1 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_2 R_1 \oplus R_4 \oplus R_4 R_1 \oplus R_4 R_2 \oplus R_4 R_2 R_1 \\ &= \overline{R_4} \overline{R_2} \overline{R_1}. \end{aligned}$$

由上述诸式可得

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_7) &= \sum_{i=0}^7 A_i S_i(x_1, \cdots, x_7) = A_0 \overline{R_4} \overline{R_2} \overline{R_1} + A_1 \overline{R_4} \overline{R_2} R_1 + A_2 \overline{R_4} R_2 \overline{R_1} \\ &\quad + A_3 \overline{R_4} R_2 R_1 + A_4 R_4 \overline{R_2} \overline{R_1} + A_5 R_4 \overline{R_2} R_1 + A_6 R_4 R_2 \overline{R_1} + A_7 R_4 R_2 R_1. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式表示任意七变量对称函数在基本对称函数完备集中的展开式可以看成以 R_4, R_2, R_1 为变量的最小项展开式, 而 $A_0 \sim A_7$ 恰好是最小项展开式的展开系数, 因此对称函数 $f(x_1, \cdots, x_7)$ 可用 K 图表示, 如图 1(b) 所示。图中与 $\overline{R_4} \overline{R_2} \overline{R_1}$ 相应的 A_0 格被定义为 K 图的原点, 而与最小项 $R_4 R_2 R_1$ 相应的 A_7 格被定义为 K 图的重心。

3 基于原点圈的图形方法

仍以七变量为例, 由 (6), (7) 式不难得到

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= A_0, & C_1 &= A_0 \oplus A_1, \\ C_2 &= A_0 \oplus A_2, & C_3 &= A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3, \\ C_4 &= A_0 \oplus A_4, & C_5 &= A_0 \oplus A_1 \oplus A_4 \oplus A_5, \\ C_6 &= A_0 \oplus A_2 \oplus A_4 \oplus A_6, & C_7 &= A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_7. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由上式可见, C_j 即为图 1(b) 所示 K 图中由 A_j 和 K 图的原点 A_0 所确定的最小聚合圈内各系数 A_i 之“异或”。鉴于“异或”函数与奇偶性之间的联系, 也可通过累计该聚合圈内 1 的个数按下式确定 C_j 。

$$C_j = \begin{cases} 1, & \text{如 1 的个数为奇数;} \\ 0, & \text{如 1 的个数为偶数.} \end{cases}$$

例如, 图 2(a) 给出了某七变量函数 $f(x_1, \dots, x_7)$ 在基本对称函数完备集中展开系数的 K 图表示。为了获得基于 RM 型对称函数完备集中展开系数 C_3 , 可在原 K 图上作包含 A_0 和 A_3 的最小聚合圈, 如图 2(a) 中虚线所示。由于该圈内 1 的个数为奇数, 故 $C_3 = 1$ 。类似地, 可以得到其余各展开系数 C_j , 如图 2(b) 所示。

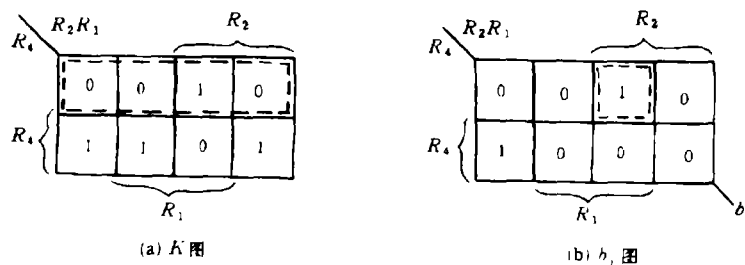


图 2 $n = 2^r - 1$ 时基于原点圈的图形方法

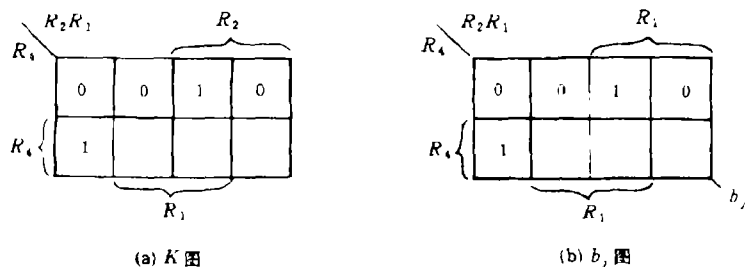


图 3 $n \neq 2^r - 1$ 时基于原点圈的图形方法

上述图形转换方法适用于变量数 $n = 2^r - 1$ 的情况, 这时 $A_0 \sim A_{2^r-1}, C_0 \sim C_{2^r-1}$ 正好填满相应的 K 图和 b_j 图的各格。当变量数 $n \neq 2^r - 1$ 时, 由于 $S_i(x_1, \dots, x_n)$ 在 $i > n$ 时不存在, 因此相应的系数 $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{2^r-1}$ 无定义。类似地, $C_{n+1} \sim C_{2^r-1}$ 也无定义, 因此只需计算 $C_0 \sim C_n$ 。图 3(a) 给出了某四变量对称函数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = S_{3,4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在基于基本对称函数完备集中展开系数的 K 图表示, 图中空格表示 A_5, A_6, A_7 无定义。注意到通过 A_j 与 A_0 的最小聚合圈不含 $i > j$ 的各 A_i 格, 因此仍可使用 $n = 2^r - 1$ 时基于原点圈的上述图形方法, 其结果如图 3(b) 所示。

利用“异或”运算中的互换关系^[6]

$$A \oplus B = C \longrightarrow A \oplus C = B,$$

不难证明该算法是可逆的, 即可通过在 b_j 图中画出包含 C_j 和原点 C_0 的最小聚合圈, 并根据圈内 1 的个数的奇偶性确定 A_j , 从而将对称函数在基于 RM 型基本对称函数完备集中展开系数的 b_j 图转换成 K 图, 以求出全部 A_j 系数。

4 基于重心圈的图形方法

上节讨论表明, 当使用基于原点圈的图形方法由 A_j 系数求取 C_j 系数时, C_j 为相应聚合圈内各 A_i 之“异或”。注意到“异或”函数的值仅取决于所含元素取值为 1 的个数。当取值为 1 元素数为奇数时“异或”函数为 1; 当取值为 1 元素数为偶数时“异或”函数为 0。这样, 我们只需考虑 $A_i = 1$ 各项对 C_j 的影响。例如, 若 $A_1 = 1$, 由 (8) 式可见, 它对 C_1, C_3, C_5, C_7 均有影响, 而该四个格子均在过 C_1 与重心 C_7 的最小聚合圈内。因此, 我们可按以下步骤进行转换: 先在 b_j 图上找到与各取值为 1 的 A_i 格相应的 C_i 格, 然后将覆盖 C_i 格与重心的最小聚合圈内各格标 1, 最后累计 b_j 图上各格的 1 值数, 如为奇数, 则该格填 1; 否则填 0。注意到当 $n \neq 2^r - 1$ 时, 由于 $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{2^r-1}$ 无定义, 因此不必考虑它们对 C_j 的影响。此外, 由于 $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, C_{2^2-1}$ 无定义, 因此不用计算它们的取值。

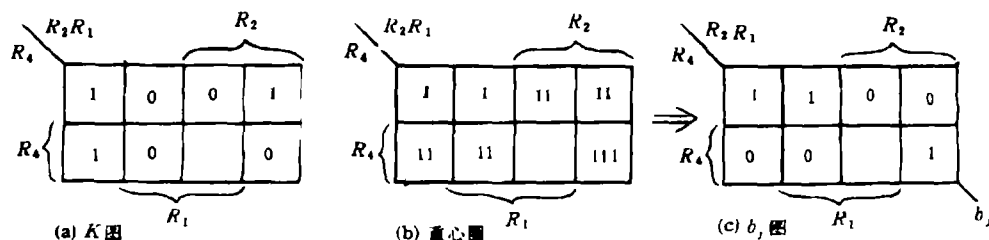


图 4 基于重心圈的图形方法

以六变量对称函数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = S_{0,2,4}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 为例, 它在基本对称函数完备集中的展开系数可用图 4(a) 所示的 K 图表示。由于 $A_0 = A_2 = A_4 = 1$, $A_1 = A_3 = A_5 = A_6 = 0$, 因此只需考虑 A_0, A_2, A_4 对 $C_0 \sim C_4$ 的影响。图 4(b) 标出了 A_0, A_2, A_4 在 b_j 图上产生的 1 值格, 根据各格内的 1 值个数可以得到图 4(c) 所示的 b_j 图。由图可得

$$C_0 = C_1 = C_6 = 1, \quad C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0,$$

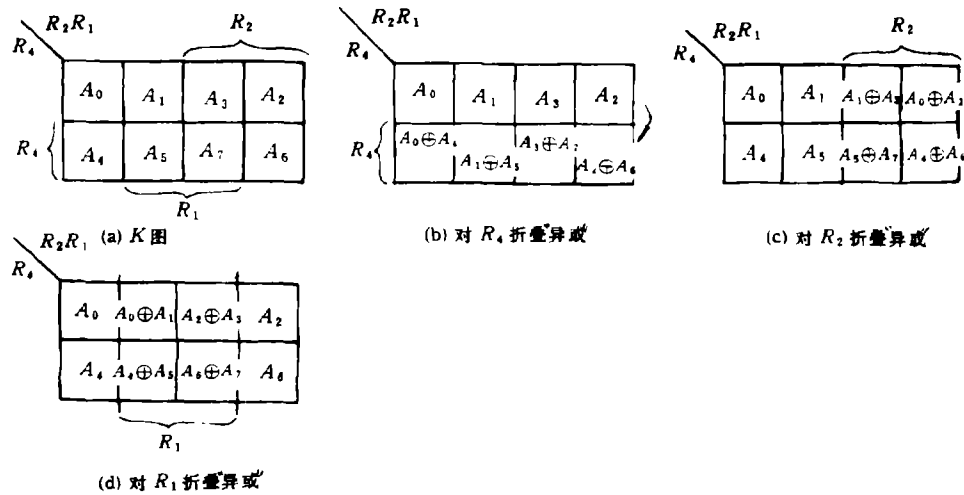
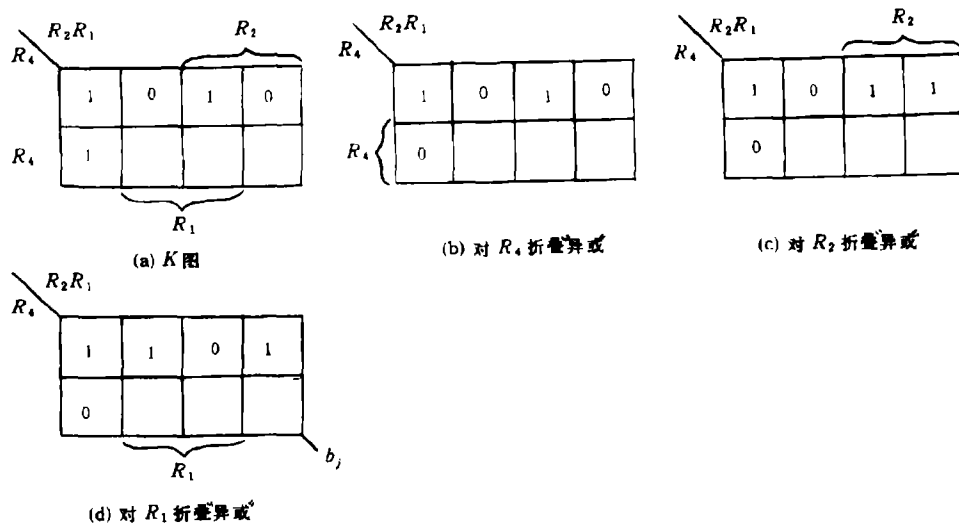
即 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = R_{0,1,6}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 。

类似地, 我们可以在 K 图上找到与各取值为 1 的 C_i 格相应的 A_i 格, 然后将覆盖 A_i 格与 K 图重心的最小聚合圈内各格标 1, 并累计各格的 1 值数, 如为奇数, 则该格填 1; 否则填 0。这样, 我们便得到对称函数的 K 图, 从而实现了对称函数展开系数 C_j 到 A_j 的转换。

5 折叠图形变换

文献 [7] 指出可以用折叠“异或”运算实现 K 图与 b_j 图之间的变换, 如图 5(a) ~ 5(d) 所示。显而易见, 它也可用于变量数 $n = 2^r - 1$ 的对称函数基于基本对称函数完备集中的

展开系数 A_j 与基于 RM 型基本对称函数的展开系数 C_j 之间的变换。图 5(b) ~ 5(d) 给出了对 R_4, R_2, R_1 进行折叠“异或”的图形变换过程。如对变量 R_4 进行折叠“异或”, 则 R_4 取值为 0 区内各格的值保持不变, 而 R_4 取值为 1 区内各格的值为该格原值与 R_4 轴对称格的值之“异或”。当 $n \neq 2^r - 1$ 时, 由于空格 (相应的展开系数无定义) 的存在, 因此需要给出与空格有关的“异或”运算规则。为了书写方便起见, 我们用 ϕ 表示图中空格。考虑到空格表示该系数无定义, 根据“异或”运算的性质可以得到

图 5 $n = 2^r - 1$ 时的折叠图形变换图 6 $n \neq 2^r - 1$ 时的折叠图形变换

$$0 \oplus \phi = \phi,$$

$$1 \oplus \phi = \phi,$$

$$\phi \oplus \phi = \phi.$$

上述诸式表示含有空格的“异或”运算结果仍为空格,因此在折叠图形变换时,不必考虑对它们进行折叠“异或”运算。图 6(a) 给出了某四变量对称函数在基于基本对称函数完备集中展开系数的 K 图表示,图 6(b) ~ 6(d) 表示了折叠图形变换的过程。

6 讨 论

本文首先分析了两类基本对称函数的有关性质,指出了基于基本对称函数完备集中展开系数的图形表示即为 R_4, R_2, R_1 为变量的 K 图;而基于 RM 型基本对称函数完备集的展开系数则为以 R_4, R_2, R_1 为变量的 b_j 图。在此基础上提出了实现两类展开系数之间转换的三种图形方法:基于原点圈的图形方法,基于重心圈的图形方法和折叠图形方法。这三种图形变换方法的结果是相同的,然而它们各有特点,各有适用范围。基于原点圈的方法在只要计算某些系数 A_i (或 C_i),而并不要求变换全部系数时较为方便。当 K 图(或 b_j 图)中 1 值格很少时采用基于重心圈的方法较为简便。对于需要转换全部系数的一般情况,则可采用折叠图形方法。

参 考 文 献

- [1] Chen X(陈偕雄). The Radio and Electronic Engineer, 1983, 53(2): 67-74.
- [2] Tapia M A. Int. J. Electronics, 1989, 67(5): 703-715.
- [3] Butler J T, Schueller K A. Worst case number of terms in symmetric multivalued functions. IEEE Proc. 21th ISMVL. Victoria: 1991, 94-101.
- [4] 赵小杰, 陈偕雄. 杭州大学学报(自然科学版), 1990, 17(4): 410-408.
- [5] 陈偕雄. 杭州大学学报(自然科学版), 1994, 21(3): 291-297.
- [6] 罗朝杰. 数学逻辑设计基础. 人民邮电出版社, 北京: 1982, 173-182.
- [7] Wu X(吴训威), Chen X(陈偕雄), Hurst S L. IEE Proc.-E, 1982, 129(1): 15-20.

TRANSFORMATION BETWEEN TWO KINDS OF EXPANSION COEFFICIENTS OF SYMMETRIC FUNCTIONS BASED ON MAPPING METHOD

Chen Xiexiong

(Hangzhou University, Hangzhou 310028)

Abstract This paper discusses the definitions and properties of two kinds of fundamental symmetric functions, which are based on AND-OR-NOT algebraic system and AND-Exclusive OR algebraic system, respectively. Based on it, the mapping transformation methods between two kinds of expansion coefficients of an arbitrary function in the complete sets of two fundamental symmetric functions are proposed.

Key words Reed-Muller expansion, Symmetric function, b_j map, Exclusive OR logic function

陈偕雄: 男, 1941 年生, 教授, 现从事数字电子学的教学和研究工作。