

侧风效应和SG方法

滕志猛 何野 童勤义

(东南大学微电子中心 南京 210096)

摘要 本文分析了SG方法存在侧风效应的起因及其对SG方法的影响,为SG方法的应用提供了依据.

关键词 SG方法,侧风效应,电流连续性方程

1 引言

众所周知,在半导体器件模拟中,为了避免用中心有限差分方法或经典的有限元方法离散电流连续性方程可能引起的解的数值振荡,通常采用SG(Scharfetter-Gummel)方法^[1-2].然而对于多维模型,在对流占优势时,SG方法在垂直于电子漂移速度方向(侧风方向)上存在着严重的精度损失,即侧风效应^[3],从而使与其相应的数值解不能体现实际模型的物理解.鉴于目前已发表的文章中仅说明SG方法存在着侧风效应^[3,4],而没有进行系统的研究.本文首先利用SG方法的一种等价表示,从理论上解释了它的起因;然后通过对测试例子的分析,给出了SG方法的应用条件和适用范围;最后给出了侧风效应在实际的半导体器件模拟结果中的体现.

2 SG方法及其等价表示

稳态电子电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_n = R, \quad (1)$$

式中 R 为净产生复合率,电子电流密度 \mathbf{J}_n 由漂移项和扩散项组成(假设电子电荷为单位电荷)

$$\mathbf{J}_n = -Vn + D_n \nabla n, \quad (2)$$

式中 V , D_n 分别为电子漂移速度和扩散系数, n 为电子浓度.为简化起见,在一维情况下,设 V 和 D_n 为常数, R 等于零.对于单元长度为 h 的均匀网格,在其节点 $(x_i, i = 1, 2, \dots, M)$ 上,若用中心有限差分方法离散(1)式,可以得到它的通解

$$n_i = A + B(1 + \alpha)^i / (1 - \alpha)^i. \quad (3)$$

A 和 B 是由电子浓度 n 的两个边界条件决定的常数, α 为网格Peclet数 $(Vh/2D_n)$.从(3)式中可以看出,若 α 大于1,则当 i 从奇数变为偶数时, n_i 将发生数值振荡,反之亦然.为解决这个问题,Scharfetter和Gummel建议:对于一维问题,假设在区间 $(x_i,$

1993-05-24 收到,1994-12-15 定稿.

滕志猛 男,1964年生,博士生,现从事半导体器件模拟方面的工作.

童勤义 男,1940年生,教授,博士生导师,从事半导体和微电子学方面的研究.

x_{i+1}) 上, V, D_n 和 J_n 都是分段常数, 就可以得到(2)式在此区间上 $n(x)$ 的解析解, 从而得到 J_n 在点 $(x_i + x_{i+1})/2$ 的离散格式

$$J_n\left(i + \frac{1}{2}\right) = -D_n \left(\frac{2\alpha}{h}\right) \frac{n_{i+1}e^{-\alpha} - n_i e^{\alpha}}{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}. \quad (4)$$

(4)式就是著名的 SG 格式. 将它代入(1)式的中心有限差分格式中, 可以看出其影响系数总是具有相同的符号, 从而客观地避免了数值振荡^[2]. 另一方面, 若在(2)式的右边增加一个人为扩散项 $D_a \nabla n$, D_a 为理想的人为扩散系数^[6]:

$$D_a = D_n(\alpha \coth \alpha - 1), \quad (5)$$

然后用中心有限差分方法离散, 可以证明, 该离散格式与(4)式是等价的. 因此 SG 方法可等价于引入人为扩散项后的中心有限差分方法.

3 侧风效应

对于二维均匀网格, (1)式的中心有限差分格式为

$$\begin{aligned} & [J_{nx}(i + 1/2, j) - J_{nx}(i - 1/2, j)]/h + [J_{ny}(i, j + 1/2) - J_{ny}(i, j - 1/2)]/h \\ & = R(i, j), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 J_{nx}, J_{ny} 分别由 x 和 y 方向上的 SG 格式(4)式给出. 如果将总的电流密度分成实际的扩散项 $J_D(D_n \nabla n)$ 和 SG 漂移项 $J_E(SG)$, 即

$$J_n = J_D + J_E(SG), \quad (7)$$

则根据 SG 方法的等价表示, 可以得到

$$\begin{aligned} J_E(SG) = J_{Ex} \mathbf{i} + J_{Ey} \mathbf{j} = & [D_n(\alpha_x \coth \alpha_x - 1)(\partial n / \partial x) - V_x n] \mathbf{i} \\ & + [D_n(\alpha_y \coth \alpha_y - 1)(\partial n / \partial y) - V_y n] \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (8)$$

α_x, α_y 分别为 x 和 y 方向上的网格 Peclet 数.

在一维情况下, 由于 SG 方法引入的理想人为扩散项总是在漂移方向上, 从而能得到十分精确的解. 但对于多维问题, 从(8)式可以看出, 人为扩散项分别加在 x 和 y 方向上, 而不是漂移方向上. 实际上, 数值振荡是由漂移算子的非对称性引起的, 为了消除它, 只需在漂移方向上引入人为扩散项, 而在侧风方向上引入的人为扩散项将引起侧风效应. 因此将 SG 漂移项分成两个部分: 漂移方向上为 J_v , 侧风方向上为 J_c , 即

$$J_E(SG) = J_v + J_c. \quad (9)$$

因为

$$J_v = (V/|V|)(V/|V|) \cdot J_E(SG), \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} J_c = & J_E(SG) - (V/|V|)(V/|V|) \cdot J_E(SG) \\ = & \begin{bmatrix} 1 - \frac{V_x^2}{V^2} & -\frac{V_x V_y}{V^2} \\ -\frac{V_x V_y}{V^2} & 1 - \frac{V_y^2}{V^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{Ex} \\ J_{Ey} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

从(8)式和(11)式可以得到

$$\left| \frac{J_c}{J_n} \right|^2 = \frac{(V_x J_{Ey} - V_y J_{Ex})^2}{J_{nx}^2 + J_{ny}^2} \begin{cases} = 0, & \alpha_x = 0 \text{ 或 } \alpha_y = 0; \\ > 0, & \text{其它;} \end{cases} \quad (12)$$

也就是说,除非 α_x 或 α_y 等于零,否则 SG 方法总是内在地具有侧风效应。这里“内在地”的意思是指侧风效应出现的前提:电子浓度分布存在陡峭层。但是当 α_x 和 α_y 小于某一个值时,如 0.5,即 $\alpha \coth \alpha - 1 < 0.1$, (12)式右边的值已经非常小,可以忽略此时的侧风效应对解的影响。

1 测试例子

一个常用的用于鉴别对流扩散方程离散技术优劣的测试例子如图 1 所示^[6]。图中 Γ_1 , Γ_2 为边界条件; θ 为漂移方向与 x 轴的夹角;速度的大小归一化为 1; D_n 为常数; x 方向和 y 方向上的长度归一化为 1。对于这个模型, (1)式和 (2)式可表示成

$$-V_x \frac{\partial n}{\partial x} - V_y \frac{\partial n}{\partial y} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = 0, \quad (13)$$

其中

$$V_x = \cos \theta, \quad V_y = \sin \theta. \quad (14)$$

使用变量分离法,不难得到(13)式的解析解为(推导从略)

$$n(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x, y) + W(y), \quad (15)$$

式中

$$W(y) = \frac{\exp(\sin \theta / D_n) - \exp[(\sin \theta / D_n) \cdot y]}{\exp(\sin \theta / D_n) - 1}, \quad (16)$$

$$V_m(x, y) = \exp[(\sin \theta / 2D_n) \cdot y] \sin(m\pi y) [A \exp(r_1 x) + B \exp(r_2 x)], \quad (17)$$

$$A = Q - B, \quad (18)$$

$$B = (M - \exp r_1) / (\exp r_2 - \exp r_1), \quad (19)$$

$$Q = M + P, \quad (20)$$

$$M = -8m\pi D_n^2 / (\sin^2 \theta + 4m^2 \pi^2 D_n^2), \quad (21)$$

$$P = -[4D_n \sin \theta \sin(0.25m\pi) + 8m\pi D_n^2 \cos(0.25m\pi)] / [\exp(0.125 \sin \theta / D_n) \cdot (\sin^2 \theta + 4D_n^2 m^2 \pi^2)], \quad (22)$$

$$r_{1,2} = (\cos \theta \pm \sqrt{4m^2 \pi^2 D_n^2 + 1}) / (2D_n). \quad (23)$$

5 数值实验

图 2 为在对流占优势时(13)式的精确解和用 SG 方法离散得到的数值解。从图中可以看出,在陡峭层附近的数值解误差相当大,以致于在局域上,其数值解不能体现实际模型的物理解。这是因为 SG 方法引入的人为扩散项在侧风方向上的分量 J_c 不为零,从而在侧风方向上形成一个相当强的扩散流,导致电子浓度分布呈连续性变化。使陡峭层消失。但实际计算表明,当 $\alpha \leq 0.5$ 时,使用 SG 方法得到的结果是十分准确的,如图 3 所示。因此通过对图 1 所示的测试例子的分析,我们可以将 SG 方法的适用范围分成三个部分:第一部分是 $\alpha \leq 0.5$, 此时,侧风效应可以忽略不计;第二部分是 $0.5 < \alpha < 50$,

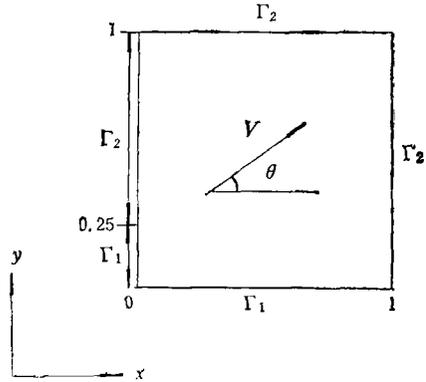
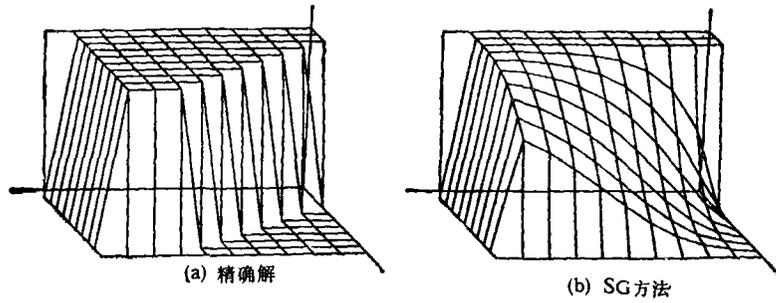
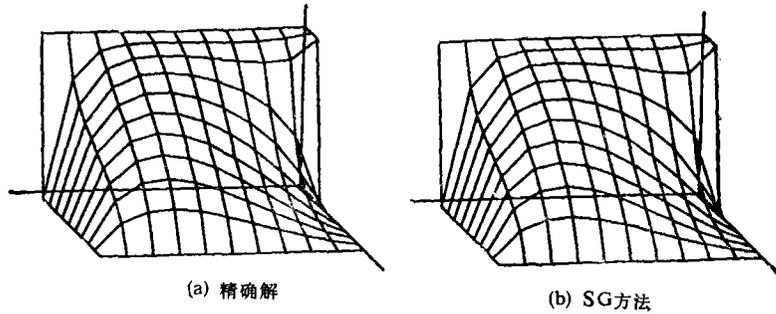


图 1 测试例子的分析结构 ($V = 1$)

$\Gamma_1: n = 1, \quad \Gamma_2: n = 0$

图2 数值结果 ($D_n = 0.001, \theta = 45^\circ$)

此时,侧风效应随着 α 的增大越来越严重;第三部分是 $\alpha \geq 50$,此时SG方法不再适用。

图3 数值结果 ($D_n = 0.1, \theta = 45^\circ$)

因为

$$\alpha = \frac{Vh}{2D_n} = \frac{\mu E h}{2D_n} = \frac{E}{2U_T} \quad (17)$$

这里应用了爱因斯坦公式, E 为电场强度, U_T 为热电压,所以根据上面的讨论,可以得到SG方法的应用条件为

$$h \leq U_T/E. \quad (18)$$

此时侧风效应可以忽略不计。但对于存在着强场区的半导体器件,由于计算机内存和计算时间的限制,节点不能太多。从而(18)式不能在所有区域和 x, y 方向上都成立。而当

$$U_T/E < h < 100U_T/E \quad (19)$$

时,若电场强度的大小一定,则使用SG方法得到的数值解的误差随 h 的增大而增大,侧风扩散现象也越来越严重。当 h 增大到

$$h \geq 100U_T/E \quad (20)$$

时,SG方法就不再适用。

总之,当 $h > U_T/E$ 时,为了提高数值解的精度,必须发展新的电流连续性方程离散方法。

6 侧风效应的具体体现

在常规应用条件下,小尺寸MOSFET的漏极附近的沟道中存在一个较窄的强场区。用MINIMOS 4.0和FUMOS程序模拟沟长为 $0.85\mu\text{m}$ 、漏源区结深为 $0.33\mu\text{m}$ 、漏源

掺杂表面浓度为 10^{20}cm^{-3} , 并采用离子注入调整阈值电压的 MOSFET, 得到的沟道表面电子浓度分布如图 4 所示^[7]。众所周知, MINIMOS 4.0 采用了 SG 方法, 而 FUMOS 通过修改温度的定义, 实质上是修正了 x 方向和 y 方向上的人为扩散项, 从而达到减小侧风效应的目的。可以看出, 用 MINIMOS 4.0 程序模拟得到的结果出现了侧风效应。这种现象在从表面到结深的范围内任一平行于表面的截面上都存在, 类似于图 2。但是两种结果相差似乎不大, 这是因为 FUMOS 程序中的离散方法本身也含有较严重的侧风效应之故。在文献[3]中, 对于类似的 MOSFET, 用广义 SG 方法模拟得到的结果与相应的 SG 方法的结果比较, 最大相差近两个数量级, 这是相当大的。

总之, 侧风效应在实际的半导体器件模拟中不仅存在, 而且可能引起解的严重失真。这都是由于计算机内存和计算时间的限制使得在局部区域上网格单元长度不能满足(18)式而造成的。

7 结论

本文系统地分析了 SG 方法存在侧风效应的起因及其对 SG 方法的影响; 说明了只有在网格单元长度满足一定的条件下, 使用 SG 方法才能得到准确的数值解。否则为了提高数值解的精度, 必须发展新的电流连续性方程离散方法。

参 考 文 献

- [1] Bank R E, Coughran J W M, Mirtner W. *et al*, IEEE Trans. on ED, 1985, ED-32(12): 1992—2007.
- [2] Bank R E, Rose D J, Fitchner W. IEEE Trans. on ED, 1983, ED-30(9): 1031—1041.
- [3] He Y, Cao G. IEEE Trans. on CAD, 1991, CAD-10(12): 1579—1582.
- [4] Chou T Y, Cendes Z J. IEEE Trans. on CAD, 1991, CAD-10(10): 1193—1200.
- [5] Polak S J, Heijer C D, Schilders W H A. Int. J. Numer. Meth. Eng., 1987, 24(5): 763—838.
- [6] Brooks A N, Hughes T J R. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1982, 32(2): 199—259.
- [7] 集成电路工艺及器件的模型和模拟实验室. 短沟道 MOSFET 的热电子效应模型和数值模拟. 上海: 复旦大学微电子学研究所, 1990.

THE CROSSWIND EFFECT AND THE SG SCHEME

Teng Zhimeng He Ye Tong Qinyi

(Microelectronics Center, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract This paper analyzes the cause of the crosswind effect inherent in the SG scheme and its influence on the SG scheme. It provides the basis for the application of the SG scheme.

Key words SG (Scharfetter-Gummel) scheme, Crosswind effect, Current continuity equation

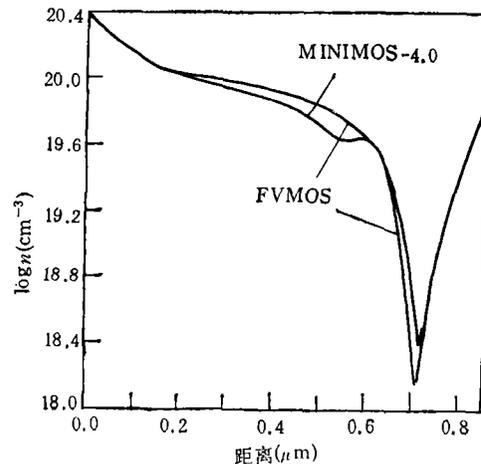


图 4 沟道表面电子浓度分布
(图中 FVMOS 应为 FUMOS)