

从时频分布到连续子波变换*

张晓平 田立生 彭应宁

(清华大学电子工程系 北京 100084)

摘要 本文从时频分布的物理概念出发,首先指出了各种时频分析方法的内在联系和差别,然后着重从连续子波变换在信号分析中的物理意义来讨论它的数学表示和特有性质,并和短时傅里叶变换作了比较.接着对连续子波变换在时间尺度平面上的离散化的概念作了扼要描述.最后,基于文中叙述的物理概念,对子波变换的应用和进展作了简要评述.

关键词 时频分布,短时傅里叶变换,子波变换

1 引言

时间和频率是信号的两个极为重要的参数.傅里叶变换(FT)将信号的时域特征与频域特征联系起来,成为信号分析和处理的有力工具.也正是FT奠定了信号分析和处理领域的基石.但尽管FT使我们能分别从时域和频域观察信号,却不能把二者结合在一起.信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 表征了信号中各频率分量的总强度,却不能明确告诉我们这些频率分量何时产生.例如,通过对一段优美的音乐作FT,也许可以区别出长笛和小号的声音,却无法知道作曲家如何把它们巧妙地合在一起.

在对时变非平稳信号的分析中,信号在任一时刻附近的频域特征都很重要.这促使人们去寻找一种方法,能将一维的时域信号映射到一个二维的时频平面来观察信号的时频联合特征,构成信号的时变谱.基于此,最自然的想法就是对信号作短时傅里叶变换(Short-Time Fourier Transform, STFT)^[1],但实际上STFT有其本质的一些缺点,不能满足人们的要求.与STFT同时发展起来的时频分布(Time Frequency Distribution, TFD)同样也固有一些缺点.近年来迅速发展的子波变换(Wavelet Transform, WT)则是在前人工作的基础上提出的一种新的时频分析的形式.

要将WT方法实际应用于信号处理领域,首先应当明确WT在信号处理中的物理概念及其处理问题的特点.其次要了解WT在各种情况下如何实现和应用,即WT的算法及其离散化问题.文献[2]已描述WT的历史和发展现状,本文则从概念出发揭示各种时频分析方法的内在联系和一致性,以及连续子波变换(Continuous Wavelet Transform, CWT)在其数学背景下的物理意义.CWT在时间尺度平面上的离散化称为子波级数,进一步在时域的离散化称为时间离散子波变换(Discrete Wavelet Transform, DWT)

1994-01-21收到,1994-07-01定稿

* 国防科技预研基金资助课题

张晓平 男,1972年生,博士生,现从事信号处理与子波理论的研究工作.

田立生 男,1936年生,副教授,现主要从事自适应信号处理的研究工作.

彭应宁 男,1939年生,教授、博士生导师,现主要从事雷达信号处理的研究工作.

作者在文献[3]中,详细分析了从 CWT 到子波级数的过程、算法和数学表达式的内涵,并讨论了时间 DTWT 的概念和其中存在的采样问题。

2 时频分布的概念

信号 $s(t)$ 的 FT $f(\omega)$ 模平方定义了信号的能谱,即给出了信号能量在频域分布密度。同样,信号 $s(t)$ 的模平方给出信号能量在时域分布密度^[4],即

$$|s(t)|^2 \Delta t = \text{时刻 } t \text{ 点 } \Delta t \text{ 邻域内的信号能量,} \quad (1)$$

$$|f(\omega)|^2 \Delta \omega = \text{频率 } \omega \text{ 点 } \Delta \omega \text{ 邻域内的信号能量,} \quad (2)$$

其中

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (3)$$

由 FT 的保范性 (Parseval 定理),并对能量归一化,有

$$\text{信号总能量 } E = \int |s(t)|^2 dt = \int |f(\omega)|^2 d\omega = 1. \quad (4)$$

我们希望在时频平面找一个二维分布 $P(t, \omega)$, 该函数能如概率密度一样反映时频平面上每一点 (t, ω) 的能量密度,则应有

$$E = \int P(t, \omega) dt d\omega = 1. \quad (5)$$

时频平面分布在一个小的面积上的信号能量应为 $P(t, \omega) \Delta t \Delta \omega$, $P(t, \omega)$ 应满足边际分布

$$\int P(t, \omega) dt = |f(\omega)|^2, \int P(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2. \quad (6)$$

$P(t, \omega)$ 还应满足实性、正性等这样一些密度函数性质,同时还应反映如瞬时频率,群延时等信号特征^[4,5],即应有

$$\text{瞬时频率 } \omega|_t = \int \omega P(t, \omega) d\omega = \varphi'(t), \quad (7)$$

$$\text{群延时 } t_d|_\omega = \int t P(t, \omega) dt = \varphi'(\omega). \quad (8)$$

从其中的一些性质出发,可导出^[4,6]最常见的双线性分布——Wigner-Ville 分布 (WVD)。

$$\text{WVD}_t(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^* \left(t - \frac{1}{2} \tau \right) \exp(-j\tau \omega) s \left(t + \frac{1}{2} \tau \right) d\tau. \quad (9)$$

稍加推广便可得到双线性分布的 Cohen 族^[4]。它可写成用二维滤波器平滑了的 WVD,

$$\begin{aligned} P(t, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \iiint \exp(-j\theta t - j\tau \omega + j\theta u) \phi(\theta, \tau) s^* \left(u - \frac{1}{2} \tau \right) \\ &\quad \times s \left(u + \frac{1}{2} \tau \right) du d\tau d\theta \\ &= \int L(t - t', \omega - \omega') \text{WVD}_t(t', \omega') dt' d\omega'. \end{aligned} \quad (10)$$

取不同的核函数 $\phi(\theta, \tau)$ 便可得到满足不同性质的双线性分布。

WVD 是一个最常用的时频分布。它几乎具有所要求的全部性质^[4,6]。WVD 具有极

好的时域局部化特性,即很好的时频联合分辨力。但如果信号由多个信号分量叠加而成,则其 WVD 会在时频平面上没有信号的时间段内,出现不能被解释为能量密度的交叉项(crossterm)^[4-6]。从(9)式易看出,这是由不同信号分量相互作用而产生的。另外, WVD 一般不满足密度函数应有的正定性(即使 $WVD_s(t, \omega) \geq 0$)。

如果能更进一步寻找一个能满足所有期望性质的分布,问题似乎就都可以解决了。通过这样的能量分布函数就可以精确描述信号在时频平面上每一点的特征,但事实上却永远做不到这一点。原因之一在于所期望的性质之间有内在矛盾,比如用平滑的方法来消除 WVD 中的交叉项就会降低时频联合分辨力。而且时频联合分辨力要受到不确定性关系(见下节)的制约。另一原因在于所用到的概念本身不能准确描述信号特征,比如瞬时频率并不能完全反映信号在某一时刻的频率特性^[7]。(7)式表明它只是一个条件均值,不能反映信号频率在该时刻的发散程度(高阶矩)。这使得由这些概念确定的分布也不能准确反映信号时频联合特征。

如果用 STFT 和 CWT 的模平方来表征时频(时尺)平面上的信号能量分布,那么可以证明^[5,8,9],它们是被不同函数平滑了的 WVD。平滑消除了 WVD 的交叉项但降低了时频联合分辨力(如线性调频信号的 WVD 非常集中于时频平面上的一条直线,而其 STFT 就比较分散了)。但是能量分布并不能概括 STFT 和 CWT,它们的出发点不尽相同,由 STFT 和 CWT 构造的能量分布不满足如边缘分布这样最基本的分布性质。但 STFT 与 CWT 的结果常常有更直观的物理解释,其相位信息也有明确的意义^[10]。时频分析的各种方法不是孤立的,它们之间有本质的联系,在物理意义上也有内在的一致性,而在实际应用中,它们有各自不同的特点和适用场合。

3 连续子波变换

WT 由法国数学家首先提出^[11],接着引起了其它一些数学家的浓厚兴趣和进一步研究^[12-20],这使得 WT 有了坚实的数学理论背景,为它在信号分析和处理中的应用打下良好基础。但 WT 文献中过多的数学理论常使一般的工程技术人员难于立刻接受。本节将就 CWT 的数学表示、物理意义以及与 STFT 的比较作一扼要讨论。

3.1 连续子波变换

CWT 定义为

$$W_s(a, b) = \langle s, \psi^{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int s(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (11)$$

由 FT 的内积不变性,可写成频域表示

$$W_s(a, b) = |a|^{-1/2} \int f(\omega) \hat{\psi}^*(a\omega) e^{ib\omega} d\omega. \quad (12)$$

$f(\omega)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 分别表示 $s(t)$ 和 $\psi(t)$ 的 FT。 $\psi(t)$ 称为母子波。由母子波进行伸缩和平移的仿射变换后得到函数集

$$\left\{ \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right\}_{a,b \in \mathbb{R}},$$

其中的函数称为子波函数, $s(t) \in L^2(R)$ 为信号函数。可看出伸缩尺度 a 和频率有关, a 较大时对应较低频率, a 较小时对应较高频率。

其中母子波 $\phi(t)$ 必须满足可允许条件

$$C_\phi = 2\pi \int |\hat{\phi}(\omega)|^2 \cdot \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty, \quad (13)$$

$$\text{上式} \Leftrightarrow \hat{\phi}(0) = 0 \Leftrightarrow \int \phi(t) dt = 0. \quad (14)$$

该条件使得 CWT 满足内积不变性。

$$\forall s, g \in L^2(R), \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(a, b) W_g^*(a, b) \frac{da db}{a^2} = C_\phi \langle s, g \rangle. \quad (15)$$

在 Hilbert 空间中, 保内积等价于保范, 即信号在变换域的总能量保持不变。联系(5)式可知, 这正是可以把 CWT 模平方看成是能量分布的一个原因。

条件(13)式使 CWT 有逆变换:

$$s(t) = C_\phi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(a, b) \phi^{a,b} \frac{da db}{a^2}, \quad (16)$$

其中子波函数 $\phi^{a,b}(t) = \phi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 。

不是任意函数都能成为一个函数的 CWT, 它必须满足可再生条件:

$$W_s(a, b) = C_\phi^{-1} \iint K(a, b; a', b') W_s^*(a', b') \frac{da' db'}{a'^2} \quad (17)$$

再生核 $K(a, b; a', b') = W_{\phi^{a,b}}^*(a', b') = \langle \phi^{a',b'}, \phi^{a,b} \rangle$ 。

这反映了 CWT 的冗余性, 其中再生核体现了变换域中两点 (a, b) 与 (a', b') 的相关程度。

3.2 短时傅里叶变换

STFT 又称加窗傅氏变换, 定义为

$$\begin{aligned} F(\omega, t) &= \langle s, g^{w,t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g^*(\tau - t) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= \exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) g^*(\omega' - \omega) \exp(-j\omega t) d\omega'. \end{aligned} \quad (18)$$

STFT 也具有保内积和保范性, 所以 $|F(\omega, t)|^2$ 也可看成是能量分布。

若设子波函数 $\phi(t) = g(t) \exp(-j2\pi f_0 t)$, 比较 $\phi^{a,b}$ 与 $g^{w,t}$ 的表达式, 易得到 $a = f_0/f$ 。从这我们可清楚地看到 STFT 中的频率 f 与 CWT 中的 a 有密切联系^[8,10], 但它们描述信号的侧重点不同。

可以看到 STFT 和 CWT 具有形式上的相似性, 都是通过时域和频域的窗 (对比(11),(12),(18)式)和信号作用来分析观察信号, 但它们对窗的处理不同, 这使得 STFT 与 CWT 有不同的时频分辨力。

3.3 时频分辨力

3.3.1 不确定性关系 (uncertainty principle)

前面所提到的分布(概率密度)和这里所说的不确定性都是从量子力学引出的, 在那里, 概率是微观粒子运动的本质属性, 不确定性这个词是恰当的。但对于确定信号来说则

没有任何不确定性,不确定性描述的只是信号与其 FT 之间的一个固有关系,与量子力学中只有形式上的相似性^[21]. 不确定性关系表述如下:

若函数 $g(x)$ 的 FT 为 $\hat{g}(f)$,其有效带宽 Δf 和有效时宽 Δx 分别定义为

$$\Delta f^2 = \frac{1}{E} \int (f - \bar{f})^2 |\hat{g}(f)|^2 df, \quad (19)$$

$$\Delta x^2 = \frac{1}{E} \int (x - \bar{x})^2 |g(x)|^2 dx, \quad (20)$$

其中 $\bar{f} = \frac{1}{E} \int f |\hat{g}(f)|^2 df$, $\bar{x} = 1/E \int x |g(x)|^2 dx$, $E = \int |\hat{g}(f)|^2 df$, 则时宽带宽积必满足

$$\Delta x \Delta f \geq 1/(4\pi). \quad (21)$$

不确定性关系指出,信号的时域波形与其频谱不可能同时任意窄,其中一个变窄,另一个就变宽.

3.3.2 STFT 和 CWT 的时频分辨力

用加窗的方法观察分析信号时,窗函数的有效时宽可看作时域分辨力,有效带宽可看作频域分辨力.对 STFT,当窗函数确定后,它在不同中心时刻和中心频率的时、频窗宽都不变,因此 STFT 的时频分辨力在时频平面上每一点都是不变的.而对 CWT,从(11),(12)式可看出,在时频域中它都是用变宽的窗来观察信号.结合前面所述 a 与 f 的关系知频窗的相对带宽 $\Delta f/f$ 不变,亦即 CWT 对信号高频分量有较高时域分辨力(窄时窗)和较低频域分辨力(宽频窗).对低频分量则相反.人们也把这称为 WT 的变焦特性.

下面我们从信号上某一点在变换域(时频、时尺平面)的影响区域来更详细说明这一点.

假定母子波和 STFT 的窗函数都是时域有限(紧支)的,即只在某一区间 $[-t_c, t_c]$ 内不为零,则从(11)和(18)式易知,时刻 t_0 点的信号在时尺和时频平面上的影响域分别如图 1(a),1(b)所示^[12,10].图 1(a)中锥形区域边界斜率由 t_c 决定.同样若假定母子波和窗函数都是频域有限(紧支),则信号中某一频率分量在时尺和时频平面上的影响域如图 2(a),2(b)所示(频率分量 $2f_0, f_0, f_0/2$ 的影响域).

只有当信号时域上两点或频域上两个分量的影响域没有混叠(或混叠较小)时,才可能在变换域把它们区分开.从这点出发,结合图 1 和图 2,易于验证前面有关 CWT 和

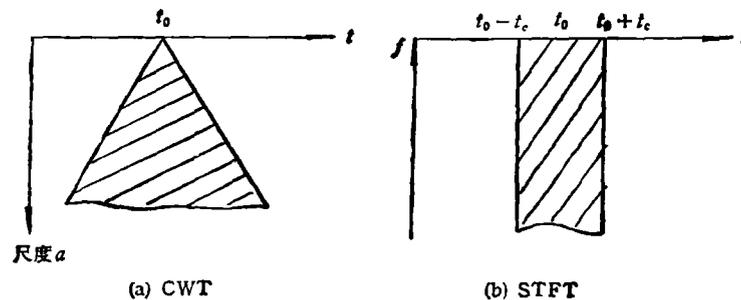


图 1

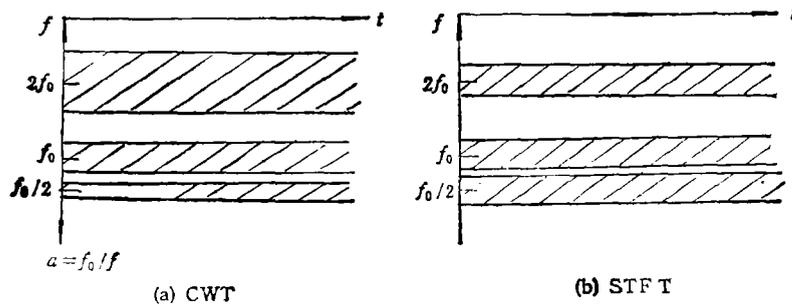


图 2

STFT 分辨力的说法。

由不确定性关系知道,用加窗方法观察分析信号的时频联合分辨力是有下界的。当母波和窗函数确定后,CWT 和 STFT 的时频联合分辨力也就确定了,无论是 CWT 还是

STFT,其时域分辨力和频域分辨力都不可能同时任意好,其中一个的提高以另一个的降低为代价。那么在 CWT 的这种分辨力转换中,能得到什么好处呢?在对实际信号的分析中,常希望对

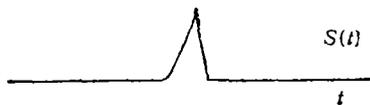


图 3

信号的低频部分有较高的频域分辨力,而对信号中的突变(即高频部分)能较好的定位,即有较高的时域分辨力,WT 正满足这个要求。如对于图 3 所示波形的信号,用 STFT 很难既知道信号在很大范围内平坦,又定位信号中的突变;利用 WT 则可在大尺度上描述出信号的平坦特点,在小尺度上定位突变(回忆图 1 和图 2)。

3.4 子波函数的一些数学性质的物理意义

从 CWT 的表达式(11)(12)式可看到,WT 是利用子波函数与信号函数的作用(内积)来检测分析信号函数的性质的。WT 的结果不仅与信号的特征有关,也与子波函数的特征有关。从 CWT 和 STFT 的定义式也可看出,子波函数 $\psi^{a,b}$ 比 STFT 中的窗函数 $g^{a,t}$ 有着更广泛的选择余地。我们不仅可以通过 WT 反映信号的时频特性,还可以通过选择具有适当数学性质的子波函数与信号作用,从而反映信号的一些数学性质。

例如,如果选取光滑函数(smoothing function)作为母波^[22],那么某一尺度下的子波函数与信号作用后,信号中的跃变点就成为结果函数中曲率较大的光滑点;如果选取光滑函数的一阶导数作为母波,则该点就成为结果函数中的极值点;而如果选其二阶导数作为母波,则该点成为结果函数中的零交(Zero-Crossing)点。可进一步证明^[22],通过观察 WT 的局部极大点在时间尺度平面沿尺度方向的演化可确定信号上一点 Lipschitz 指数的范围,即确定该点局部奇异性。选取具有适当性质的母波就可衡量信号不同程度的奇异性。通过该例可看到,适当选取具有一定性质的子波函数,可通过信号在变换域的特征反映信号的一些内在特征。

虽然 STFT 和 CWT 形式上类似,但人们也已经证明^[14-16,22],WT 有比 STFT 更优越的一些数学性质,而这些性质在工程实践中的应用仍是一个有待于进一步研究的课题。

4 子波级数及其它

已经指出 CWT 是冗余的, 就是说 CWT 在时尺平面上是相关的, 因此可以在时尺平面对之以适当方式采样, 这些采样点仍可以完全表达信号中的信息. 以如下方式^[16,17]定义子波级数 (wavelet series),

$$W_s(m, n) = \langle s, \phi_{m,n} \rangle = a_0^{-m/2} \int s(t) \phi^*(a_0^{-m}t - nb_0) dt, \quad (22)$$

其中

$$\phi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \phi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-m/2} \phi(a_0^{-m}t - nb_0). \quad (23)$$

取 $a_0 = 2$ 时, 称之为二进子波 (dyadic wavelet) 级数. 这是最常用的一类子波级数. 由于 STFT 也是冗余的, 因此也可以对它在时频平面离散化, 如下式:

$$F_s(m, n) = \langle s, g_{m,n} \rangle = \int s(t) g^*(t - nt_0) \exp(-jm\omega_0 t) dt, \quad (24)$$

其中

$$g_{m,n}(t) = g(t - nt_0) \exp(jm\omega_0 t). \quad (25)$$

子波级数和 STFT 级数在时尺和时频平面的离散化方式可用图 4(a), 4(b) 分别表示. 图中示意出采样点的分布.

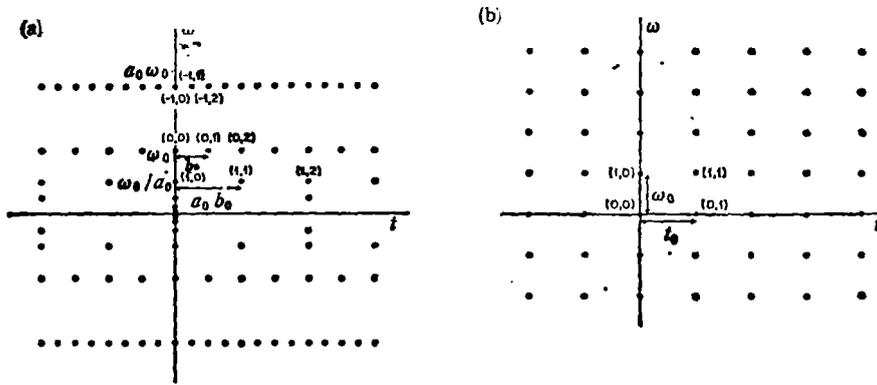


图 4 在变换域中的离散化方式
(a) 子波级数 (b) STFT 级数

联系第 3 节中对 CWT 和 STFT 时频分辨力的分析可知, 它们在变换域中的不同离散化方式是由这两种变换的不同性质决定的. CWT 在时间方向的相关性随尺度减小而减小 (时域分辨力提高), 在尺度方向的相关性随尺度的减小而增大 (频域分辨力降低). 而 STFT 在两个方向的相关性都不随时间和频率的变化而变化 (因为窗宽都不变). 图 4(a), 4(b) 中采样点的疏密程度分别体现了 CWT 和 STFT 的性质, 而从能量分布的角度来看, 用 CWT 和 STFT 的模平方表征能量分布时, 变换域上的每一点代表的都是一个区域的总能量密度. 这个区域的形状在 CWT 中是变化的, 而在 STFT 中却不变. 这从一个侧面体现了用 CWT 和 STFT 表达的能量分布同理想能量分布的差

距,理想能量分布期望分布上每一点只表示该点的能量密度(参见第3节)。

从连续到离散不仅仅是算法问题,它常是一个质变。CWT 离散化后,如求逆等问题须重新考虑。文献[16,17]中提出框架理论。文献[18,23,24]中把子波级数通过多分辨分析理论同子带编码滤波器组联系在一起,并给出了快速算法。文献[25,26]中又定义了时域离散的子波变换。还有很多文献研究了这些过程中的数学理论和滤波器理论。从连续到离散的过程中,究竟在多大程度上保持了连续变换的性质,又如何的物理意义上与连续变换联系在一起,本文作者在文献[3]中对这些概念作了较详细的分析和探讨。

5 子波变换的应用评述

在实际的信号处理过程中,WT 常用塔式的子带分析来实现^[23,27,28],即 WT 常与子带编码有相同的形式。但 WT 为子带编码和多分辨分析提供了一个统一的理论框架,从而更好地运用 WT 的许多数学性质。而同时,子带分解及其滤波器理论,不仅为 WT 提供了各种可能的算法,也直接充实了子波的数学理论本身^[29,30]。可以说,二者的研究已密不可分。实际问题是,这些理论上的结果尚未更有效和深入地结合工程应用背景。

WT 首先被广泛应用于图象分析和编码。并被认为是一种极有前途的新方法。对于反映在低频的大部分灰度信息,希望能分辨其中细微的明暗差别,即有较高的低频率分辨率。对反映在高频的边缘和纹理希望能准确定位,即有高的空域分辨力。这正符合 WT 的特点。用传统的子带分析方法来分析信号时,往往只用到了信号的频率信息,于是难以将信号中突变与噪声分开。而从 WT 理论知道(见第3节),不仅可通过每个尺度(子带)的变换结果来分析信号,还可通过它们在不同尺度上的演化来分析信号特性。文献[23,31]指出利用奇异性检测的方法可以区分图象边缘、纹理和噪声从而消除噪声。

由于子波变换对突变信号的波形信息有较高的分辨力,它还应用于瞬态信号检测^[32]。还可利用雷达目标回波波形进行目标识别。WT 与信号宽带模糊函数有形式上的相似性,可用于宽带信号处理^[33]。

时频分布和 STFT 等时频方法已被广泛应用于信号处理的各领域^[34,35]。WT 与它们有概念上的一致性。尺度作为一个描述信号特征的概念,与传统的时频分布方法相结合^[36],使我们对信号的描述更为深刻。多尺度分析还被应用于统计信号处理^[37]和分形过程分析^[38]。

文献[39]中提出了啾子波(Chirplet)变换的概念,子波函数是母子波经过伸缩和平移得到的,啾子波则在此基础上又加入了线性调频变换和透视变换的成份。文献[40]中讨论了子波基的选择并提出子波包(wavelet packet)的概念,文献[41]把它推广到时变。文献[42]给出了一种自适应时频变换。这些方法都是 WT 的直接推广,并都把 CWT 和 STFT 作为特例。从几何上看,它们能更灵活地改变分辨单元的形状,使之更适应对不同信号的分析。该类方法由于其本身的复杂性,难以象 CWT 一样分析其各种数学性质,而且常具有相当的计算复杂性(WT 和神经网络结合^[39,43]是处理问题复杂性和自适应要求的一种方法),但它们更适合于时变非平稳信号的自适应处理和信息压缩,因此无疑是子波研究的一个重要发展方向。

WT 研究的意义已不仅仅局限于一种简单的信号变换方法, 它提供了一种更高层次更灵活的对平稳和非平稳信号的理解和处理思想, 它牵动了数学和信号处理领域各方面的进一步深入研究。众多的学者认为 WT 在数学和信号处理领域都是本世纪下半叶的一个重大贡献。毫无疑问, WT 作为一种颇具魅力的时频分析方法, 值得深入研究和推广应用。

参 考 文 献

- [1] Gabor D. J. IEE, 1946, Nov., 93: 429—457.
- [2] 焦李成, 保铮. 电子学报, 1993, 21(7): 91—96, 84.
- [3] 张晓平, 彭应宁, 田立生. 子波变换: 从连续到离散. [技术研究报告]. 清华大学电子工程系, 1994.
- [4] Cohen L. Proc. IEEE, 1989, 77(7) 941—981.
- [5] Hlawatsch F, Boudreaux-Bartels G F. IEEE SP Mag., 1992, 9(2): 21—67.
- [6] Classen T A C M, Mecklenbrauer W F G. Phillips J. Res., 1980, 355(3—6): 217—250, 276—300, 372—389.
- [7] Mandel L. Am. J. Phys., 1974, 42(5): 840—846.
- [8] Rioul O, Vetterli M. IEEE SP Mag., 1991, 8(4): 14—38.
- [9] Rioul O, Flandrin P. IEEE Trans. on SP 1992, SP-40(7): 1746—1757.
- [10] Grossmann A, *et al.* Wavelets, Time-frequency methods and phase space, Berlin: Springer, 1989, 68—98.
- [11] Grossmann A, Morlet J. SIAM J. Math. Anal., 1984, 15(4): 723—736.
- [12] Gohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Comm. Pure and Appl. Math., 1992, 45(4): 485—560.
- [13] Cohen A, Daubechies I. SIAM J. Math. Anal., 1993, 24(2): 520—527.
- [14] Daubechies I. Comm. Pure and Appl. Math. 1988, 41(7): 906—996.
- [15] Daubechies I. SIAM J. Math. Anal., 1993, 24(2): 499—519.
- [16] Daubechies I. IEEE Trans. on IT, 1990, IT-36(5): 961—1005.
- [17] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets, Philadelphia: SIAM, 1992.
- [18] Mallat S. Trans. Amer Math. Soc., 1989, 315(1): 69—87.
- [19] 迈耶 Y 著. 世界图书出版公司译. 小波与算子. 北京: 1992.
- [20] Rioul O. SIAM J. Math. Anal., 1992, 23(6): 1544—1576.
- [21] Scolnik M I. Introduction to Radar Systems, New York: McGraw-Hill, 1980.
- [22] Mallat S, Hwang W L. IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2): 617—643.
- [23] Mallat S. IEEE Trans. on PAMI, 1989, PAMI-11(7): 674—693.
- [24] Mallat S. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(12): 2091—2110.
- [25] Rioul O. IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(8): 2591—2606.
- [26] Shensa M J. IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(10): 2464—2482.
- [27] Vetterli M, Herley C. IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(9): 2207—2232.
- [28] Akansu A N, Haddad R A. Multiresolution Signal Decomposition. New Jersey; Academic Press, 1992.
- [29] Steffen P, *et al.* IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(12): 3497—3511.
- [30] Somun A K, Vaidyanathan P P. IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(3): 1170—1183.
- [31] Mallat S, Zhang S. IEEE Trans. on PAMI, 1992, PAMI-14(7): 710—732.
- [32] Friedlander B, Porat B. IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2): 665—673.
- [33] Weiss L G. IEEE SP Mag., 1994, 11(1): 13—32.
- [34] Altes R. J. Acoust. Soc. Am., 1980, 47(4): 1232—1246.
- [35] Kumer B V K V, Carroll W C. Opt Eng., 1984, 23(6): 732—737.
- [36] Cohen L. IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(12): 3275—3292.
- [37] Claus B. IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(12): 3266—3274.
- [38] Wornell G W. Proc. IEEE 1993, 81(10): 1428—1450.
- [39] Mann S, Haykin S. Opt. Eng., 1992, 31(6): 1243—1256.
- [40] Coifmun R, Wickerhanser M V. IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2): 713—718.
- [41] Queiroz R L, *et al.* IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(12): 3293—3305.
- [42] Mallat S, Zhang S. IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(12): 3397—3415.
- [43] Pati Y C, Krishnaprasad P S. IEEE Trans. on NN, 1993, NN-4(1): 73—85.

FROM TIME-FREQUENCY DISTRIBUTION TO CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM

Zhang Xiaoping Tian Lisheng Peng Yingning

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract Based on the concept of time-frequency distribution, the relationship and differences among various time-frequency methods are described. Then the mathematical expression of continuous wavelet transform and its significant meaning in signal processing are discussed. Compared with short-time Fourier transform the special characteristics of continuous wavelet transform are shown. The concept of the discrete case of continuous wavelet transform in time-scale plane is introduced. Finally, some applications and advances of wavelet transforms are reviewed based on concepts proposed in this paper.

Key words Time-frequency distribution, Short-time Fourier transform, Wavelet transform