

互易多端口网络的等效二端口 测量方程组及其应用

吴 宏 雄

(中山大学无线电电子学系, 广州)

摘要 本文推导了互易 n 端口网络的等效二端口测量方程组; 以三端口网络为例, 讨论了这种方程组的应用、测量细节和数据处理; 提出了用自动测量线和程控短路活塞组成一套测试系统, 以实现对多端口网络 S 参数的快速、自动测量; 给出了 H 面 T 三端口网络的实验结果。

关键词 微波测量; 多端口网络; S 参数

一、引 言

多端口元件是微波工程中的重要部件, 因此对其 S 参数的测量一直十分重视, 提出了多种测量方案^[1-3]。文献[1]的方法为等效二端口短路活塞法。使用该法时, 除两个端口外, 其余端口均接匹配负载, 且需多次轮换端口, 不但不方便, 而且负载的失配还会产生误差。文献[2]的方法可修正失配误差, 但需要更多地轮换端口, 修正计算也稍嫌麻烦。与上两法不同, 文献[3]的方法为多短路活塞法。测量时, 除一个测量端口外, 其余各端口都接短路活塞, 只要顺序移动各个活塞, 并相应测出测量端口的反射系数, 不必轮换端口便可求得被测网络的 S 参数。显然, 此法是诱人的。然而, 其测量时间之冗长, 描绘 Deschamps 图之繁多, 人力难于胜任; 此外, 该文也没有给出 n 端口网络普遍适用的测量关系式, 实难推广应用。最近, 文献[4]已将多短路活塞法用于无耗多端口网络的测量中, 导出其广义测量方程, 给出测量实例, 使多短路活塞法获得了实际应用。然而, 其测量次数(时间)却大大地增加了, 这是美中不足之处。

本文根据微波等效电源的概念^[5], 一般地推导出互易 n 端口网络 S 参数的等效二端口测量方程组, 并利用文献[6]关于互易有耗、无耗二端口网络 S 参数测量的统一的结论, 将任何互易多端口网络 S 参数的测量问题归结为一个个等效二端口网络 S 参数的计算问题; 文中以三端口网络为例, 讨论了测量细节和数据处理; 提出用自动测量线^[7]和程控短路活塞组成一套自动测试系统, 以实现对多端口网络 S 参数的快速、自动测量, 并给出测量实例。

二、 n 端口网络的等效二端口测量方程组

若散射矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{12} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{1n} & S_{2n} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

的互易 n 端口网络,除端口 1 和 2 外,其余各端口分别接上反射系数为 $\Gamma_k (k=3,4,\cdots, n)$ 的负载,如图 1(a) 所示,则从实用的观点看,此网络已简化为一个等效的二端口网络。设此等效网络的等效散射参数为

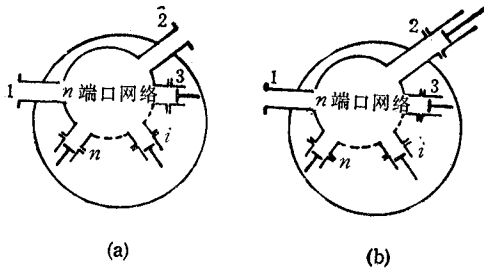


图 1 n 端口网络退化为两等效二端口网络

$$[S^R] = \begin{bmatrix} S_{11}^R & S_{12}^R \\ S_{12}^R & S_{22}^R \end{bmatrix} \quad (2)$$

显然,这些参数都是 $\Gamma_k (k=3,4,\cdots, n)$ 和 $S_{ij} (i,j=1,2,\cdots,n)$ 的关系式,

并可求出如下^[5]:

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^R &= [D_{(1S1)}/D_{(11)}]_{\Gamma_2=0} = D_{(1S1)(22)}/D_{(11)(22)} \\ S_{22}^R &= [D_{(2S2)}/D_{(22)}]_{\Gamma_1=0} = D_{(2S2)(11)}/D_{(11)(22)} \\ S_{12}^R &= [D_{(1S2)}/D_{(11)}]_{\Gamma_2=0} = D_{(1S2)(22)}/D_{(11)(22)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3)式中,记号 $D_{(isi)}$ 和 $D_{(ii)}$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 等都是特殊行列式,其意义和运算规则参见文献[5]。在下面的推导中,为了便于从等效散射参数的书写形式直接写出以特殊行列式表示的等效二端口的测量方程组起见,我们引入新的记号

$$S_{ij}^{(1,2,3,\cdots)}, i,j,k,l=1,2,\cdots$$

以代替 S_{ij}^R 。此新记号右上角括号中的数字表示特殊行列式中相应的反射系数为零,而数字的个数视情况而定。据此,有 $S_{11}^{(2)} = S_{11}^R$, $S_{22}^{(1)} = S_{22}^R$ 和 $S_{12}^{(2)} = S_{12}^R$ 。

现在,若在图 1(a) 的等效二端口网络的端口 2 也接上反射系数为 Γ_2 的负载,如图 1(b) 所示,则根据微波网络理论,可求出端口 1 的等效输入反射系数为

$$\hat{\Gamma}_1 = S_{11}^{(2)} + [S_{12}^{(2)}]^2 \cdot \Gamma_2 / [1 - S_{22}^{(1)} \Gamma_2] \quad (4)$$

利用特殊行列式的性质^[5],将(4)式中的 $S_{11}^{(2)}$ 展开成显含 Γ_2 的关系式,可写出

$$\begin{aligned} S_{11}^{(2)} &= D_{(1S1)(22)}/D_{(11)(22)} = [D_{(1S1)(22)(33)} - D_{(1S1)(22)(3S3)} \Gamma_3] / [D_{(11)(22)(33)} - D_{(11)(22)(3S3)} \Gamma_3] \\ &= \frac{D_{(1S1)(22)(33)}}{D_{(11)(22)(33)}} + \frac{[D_{(1S1)(22)(3S3)} D_{(11)(22)(3S3)} - D_{(1S1)(22)(3S3)} D_{(11)(22)(33)}] \cdot \Gamma_3}{1 - D_{(11)(22)(3S3)} \Gamma_3 / D_{(11)(22)(33)}} \end{aligned} \quad (5)$$

利用上述约定的记号,我们可写出

$$D_{(1S1)(22)(33)}/D_{(11)(22)(33)} = S_{11}^{(2,3)}, D_{(11)(22)(3S3)}/D_{(11)(22)(33)} = S_{33}^{(1,2)}$$

再将(5)式第二项分子展开,重新组合,可写成

$$\frac{D_{(1S1)(22)(33)}D_{(11)(22)(3S3)} - D_{(1S1)(22)(3S3)}D_{(11)(22)(33)}}{D_{(11)(22)(33)}D_{(11)(22)(33)}} = \left[\frac{D_{(1S3)(22)(33)}}{D_{(11)(22)(33)}} \right]^2 [1 - S_{13}^{(2,3)}]^2$$

于是,可写出

$$S_{11}^{(2)} = S_{11}^{(2,3)} + [S_{13}^{(2,3)}]^2 \cdot \Gamma_3 / [1 - S_{33}^{(1,2)} \Gamma_3] \quad (6a)$$

同理,有

$$S_{22}^{(1)} = S_{22}^{(1,3)} + [S_{23}^{(1,3)}]^2 \cdot \Gamma_3 / [1 - S_{33}^{(1,2)} \Gamma_3] \quad (6b)$$

在此和以后,凡下标不同的等效参数,如 $S_{12}^{(2)}, S_{13}^{(2,3)}, \dots$ 不展开,因不必由它们解出待求参数。

仿上做法,又将 $S_{11}^{(2,3)}, S_{22}^{(1,3)}$ 和 $S_{33}^{(1,2)}$ 展成显含 Γ_4 的关系式,可得

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^{(2,3)} &= S_{11}^{(2,3,4)} + [S_{14}^{(2,3,4)}]^2 \cdot \Gamma_4 / [1 - S_{44}^{(1,2,3)} \Gamma_4] \\ S_{22}^{(1,3)} S_{22}^{(1,3,4)} &+ [S_{24}^{(1,3,4)}]^2 \cdot \Gamma_4 / [1 - S_{44}^{(1,2,3)} \Gamma_4] \\ S_{33}^{(1,2)} S_{33}^{(1,2,4)} &+ [S_{34}^{(1,2,4)}]^2 \cdot \Gamma_4 / [1 - S_{44}^{(1,2,3)} \Gamma_4] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

依此类推,直至将等效 S 参数展成显含 Γ_j 的关系式时,可得

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^{(2,3,\dots,j-1)} &= S_{11}^{(2,3,\dots,j)} + [S_{1j}^{(2,3,\dots,j)}]^2 \cdot \Gamma_j / [1 - S_{jj}^{(1,2,\dots,j-1)} \Gamma_j] \\ S_{22}^{(1,3,\dots,j-1)} &= S_{22}^{(1,3,\dots,j)} + [S_{2j}^{(1,3,\dots,j)}]^2 \cdot \Gamma_j / [1 - S_{jj}^{(1,2,\dots,j-1)} \Gamma_j] \\ S_{ii}^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,j-1)} &= S_{ii}^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,j)} + [S_{ij}^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,j)}]^2 \cdot \Gamma_j / [1 - S_{jj}^{(1,2,\dots,j-1)} \Gamma_j] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$i = 3, 4, \dots, j-1; j = 4, 5, \dots, n$$

(8)式中,左边等效参数的总个数为 2^{j-2} 个,其中头两个参数各有一个,而 $S_{ii}^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,j-1)}$ 则都有 $2^{i-2} (i = 3, 4, \dots, j-1)$ 个是相同的。要注意的是,当 $j = n$, 即按最后一个活塞的 Γ_n 展开时,可得

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^{(2,\dots,n-1)} &= S_{11} + S_{1n}^2 \Gamma_n / (1 - S_{nn} \Gamma_n) \\ S_{22}^{(1,3,\dots,n-1)} &= S_{22} + S_{2n}^2 \Gamma_n / (1 - S_{nn} \Gamma_n) \\ S_{ii}^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,n-1)} &= S_{ii} + S_{in}^2 \Gamma_n / (1 - S_{nn} \Gamma_n), i = 3, 4, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(4)式和(6)~(9)式就称为 n 端口网络的等效二端口测量方程组,其形式与接已知负载的互易二端口网络的输入反射系数的表示式完全一样。这样,从原理上讲,只要令各端口的反射系数 $\Gamma_i = \exp(j\varphi_i)$, ($i = 2, 3, \dots, n$), 就可按通常二端口网络的方法来测量和计算这些等效参数,从而求出待测 n 端口网络的 S 参数。文献[6]已经指出,互易有耗和无耗二端口网络 S 参数的测量方法和数据处理方法是完全统一的。这就表明: n 端口网络的等效二端口测量方程组既可用于无耗多端口网络,也可用于有耗多端口网络,以便求出它们各自的 S 参数。

三、三端口情况

现以三端口网络为例,具体地说明等效二端口测量方程组的应用。

对于三端口网络, $n = 3$, 只外加两个活塞。若按 $2 \rightarrow 3$ 的顺序(即先移动活塞 2, 后移活塞 3, 下同),则由(4)式和(6)~(9)式可写出

$$\hat{\Gamma}_1 = S_{11}^{(2)} + [S_{12}^{(2)}]^2 \cdot \Gamma_2 / [1 - S_{22}^{(1)} \Gamma_2] \quad (10a)$$

$$S_{11}^{(2)} = S_{11} + S_{13}^2 \Gamma_3 / (1 - S_{33} \Gamma_3) \quad (10b)$$

$$S_{22}^{(1)} = S_{22} + S_{23}^2 \Gamma_3 / (1 - S_{33}^2 \Gamma_3) \quad (10c)$$

由(10)式可见,只有(10a)式的参数求得后,才可求解(10b)和(10c)式。这就导致二活塞移动的顺序有先有后,移动的次数有多有寡。其具体做法是:活塞3置于某一位置上,按通常二端口网络 S 参数的测量方法,在 $\lambda_g/2$ 内,将活塞2置于 $k(\geq 4)$ 个位置上,测出 k 个 $\hat{\Gamma}_1$,求解出一对 $S_{11}^{(2)}, S_{22}^{(2)}$;活塞3置于另一位置上,而活塞2则重复上述过程,求解出另一对 $S_{11}^{(2)}, S_{22}^{(2)}$;如此继续下去,直至算出第 k 对 $S_{11}^{(2)}, S_{22}^{(2)}$ 为止。最后,根据活塞3的 k 个位置读数和 k 对 $S_{11}^{(2)}, S_{22}^{(2)}$ 数据,由(10b)和(10c)式解出 S_{11}, S_{33}, S_{13}^2 和 S_{22}, S_{33}, S_{23}^2 。

现在,若按 $3 \rightarrow 2$ 的活塞顺序进行另一轮测量,则有

$$\hat{\Gamma}_1 = S_{11}^{(3)} + [S_{13}^{(3)}]^2 \cdot \Gamma_3 / [1 - S_{33}^{(3)} \Gamma_3] \quad (11a)$$

$$S_{11}^{(3)} = S_{11} + S_{12}^2 \Gamma_2 / (1 - S_{22} \Gamma_2) \quad (11b)$$

$$S_{33}^{(1)} = S_{33} + S_{23}^2 \Gamma_2 / (1 - S_{22} \Gamma_2) \quad (11c)$$

类似地,可求得 S_{11}, S_{22}, S_{12}^2 和 S_{33}, S_{22}, S_{23}^2 。

可见,要经两轮测量才能求得三端口网络的全部 S 参数。此外,由于测量误差等原因,不同公式和轮次算出的同一参数的值会有差别,这时可取其平均值作为该参数的最终结果。

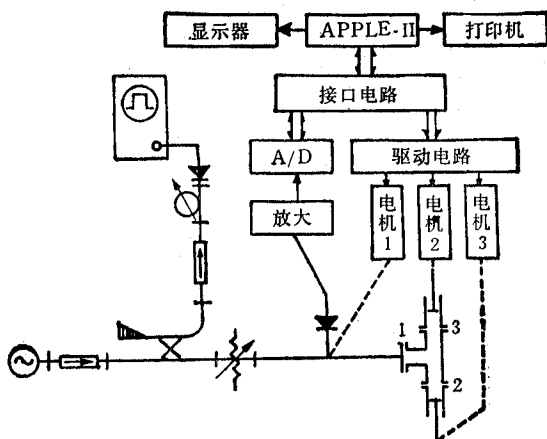
必须指出的是,在一般情况下,按(10a)和(11a)式求 $S_{11}^{(2)}, S_{22}^{(2)}$ 和 $S_{11}^{(3)}, S_{33}^{(3)}$ 的数值解时,可选用文献[8—12]中任一种方法都能顺利求得结果。但是,三端口网络有这样一性质:如果在三端口网络的任一端口接以短路活塞,则总可以找出活塞的一个位置使其它两端口间没有能量传输^[13]。这样,在按 $2 \rightarrow 3$ ($3 \rightarrow 2$)的活塞顺序进行测量时,活塞3(或2)有可能恰好在该位置上,使1—2(或1—3)端口间没有能量传输。这时,活塞2(或3)无论置于何处,由1端口测得的 $\hat{\Gamma}_1$ 都几乎相同。在这种情况下,只有用文献[9]的方法才能求得解。其原因文献[6]已提及,在此不赘述。顺便指出,对于无耗网络,还可用文献[14—16]的方法求出 $S_{11}^{(2)}, S_{22}^{(2)}$ 和 $S_{11}^{(3)}, S_{33}^{(3)}$ 。

有了上述等效参数后,再次用文献[8—12]中任一方法,便可求出被测网络的 S 参数。

四、多端口网络 S 参数的自动测量

由前述可见,为求三端口网络的 S 参数,需作两轮测量;每轮测量要用测量线测 k^{3-1} 个(对)数据;移动 $k^{3-2} + k^{3-1}$ 次短路活塞,求解 $k^{3-2} + (k-2)^{3-2}$ 次 S 参数。工作量极其浩繁,对于更多端口的网络尤甚。尽管现时 S 参数的求解已采用数值方法,不再受繁琐费时的图解法所困扰。但若采集数据、移动活塞仍靠人工操作的话,则所需的测量时间非常可观,亟待改进。

在此,我们提出用自动测量线^[7]和若干个程控活塞组成一套测试系统,如图2所示(图中仅给出两个活塞的情况),以实现多端口网络 S 参数的全自动测量。实践表明,在3 cm波段用该系统测量三端口网络时,若 $k=4$,则仅需20 min便可求得全部 S 参数。

图2 三端口网络 S 参数的自动测量系统

五、测量实例

我们按图2的系统,编制数据采集和处理程序,并用于3cm波段H-T接头的测量中。测得的原始数据和算出的等效参数 $|S_{11}^{(2)}| \exp(j\varphi_{11})$, $|S_{22}^{(1)}| \exp(j\varphi_{22})$ 和 $|S_{33}^{(1)}| \exp(j\varphi_{11})$, $|S_{33}^{(1)}| \exp(j\varphi_{33})$, 如表1所示。表中 φ_2 和 φ_3 分别为活塞2和3的相角, D_T 为短路参考面位置读数, $D_{\min}$ 为驻波最小点位置读数。因被测网络(其端口标号如图2所示)无耗,所以有 $|S_{11}^{(2)}| = |S_{22}^{(1)}|$ 和 $|S_{11}^{(3)}| = |S_{33}^{(1)}|$; 又 $S_{12}^{(2)}$ 和 $S_{13}^{(3)}$ 的值在后续计算中不必用到,为简洁起见,未列出。

表1 测量数据和求得的等效参数 ($\lambda_{g1} = 43.55\text{mm}$, $\lambda_{g2} = 43.52\text{mm}$)

2→3 顺序	180	90	0	-90	$\varphi_2^{(0)}/\varphi_3^{(0)}$	$\varphi_{11}^{(0)}$	$ S_{11}^{(2)} = S_{22}^{(1)} $	$\varphi_{22}^{(0)}$
$(D_{\min} - D_T)$ mm	9.3533	17.0912	10.4481	9.9751	180	-15.09	0.853923624	-95.51
	17.4931	7.7124	7.1207	6.5574	90	-62.10	0.845891066	179.28
	10.3803	7.0892	3.9908	18.3623	0	-64.72	0.33719153	94.17
	9.9148	6.4133	18.2813	12.4435	-90	-5.60	0.391880111	-24.30
3→2 顺序	180	90	0	-90	$\varphi_3^{(0)}/\varphi_2^{(0)}$	$\varphi_{11}^{(0)}$	$ S_{11}^{(3)} = S_{33}^{(1)} $	$\varphi_{33}^{(0)}$
$(D_{\min} - D_T)$ mm	9.3517	17.4210	10.3966	9.9176	180	-15.91	0.860004993	-94.61
	17.0197	7.7138	7.0821	6.4264	90	-62.83	0.829692327	178.51
	10.4758	7.1349	3.9934	18.2751	0	-63.08	0.329346509	92.80
	9.9892	6.5574	18.3902	12.4551	-90	-5.27	0.400525323	-23.16

表2给出的是利用表1的等效参数再经数值处理后而求得的H-T接头的 S 参数。表3给出的是该接头 S 参数的平均值和用文献[1]的方法测得的同一接头的 S 参数,以兹比较。

表 2 按表 1 等效参数求得的 H-T 接头的 S 参数

2→3 活塞顺序		3→2 活塞顺序	
S_{11}	$0.5546 \angle -36.63^\circ$	S_{11}	$0.5514 \angle -36.51^\circ$
S_{13}	$0.5929 \angle 91.79^\circ$	S_{12}	$0.5883 \angle 90.85^\circ$
S_{33}	$0.2286 \angle -130.07^\circ$	S_{22}	$0.2296 \angle -129.34^\circ$
S_{22}	$0.2263 \angle -131.53^\circ$	S_{33}	$0.2223 \angle -129.29^\circ$
S_{23}	$0.7774 \angle 42.43^\circ$	S_{23}	$0.7748 \angle 42.25^\circ$
S_{33}	$0.2230 \angle -130.38$	S_{22}	$0.2270 \angle -130.31^\circ$

表 3 按不同方法测得的 H-T 接头 S 参数的比较

方 法 参 数	本 文 方 法	文 献 [1] 的 方 法
S_{11}	$0.5530 \angle -36.57^\circ$	$0.5622 \angle -37.69^\circ$
S_{12}	$0.5883 \angle 90.85^\circ$	$0.5887 \angle 90.33^\circ$
S_{13}	$0.5929 \angle 91.79^\circ$	$0.5896 \angle 91.47^\circ$
S_{22}	$0.2276 \angle -130.39^\circ$	$0.2293 \angle -130.50^\circ$
S_{23}	$0.7761 \angle 42.34^\circ$	$0.7770 \angle 41.36^\circ$
S_{33}	$0.2246 \angle -129.91^\circ$	$0.2265 \angle 126.48^\circ$

六、结 论

多端口网络 S 参数的等效二端口测量方程组为任意互易(有耗和无耗)多端口网络 S 参数的测量提供了统一而简便的途径;而由自动测量线和程控短路活塞所组成的测试系统,则是能用多短路活塞法快速测量多端口网络 S 参数的强有力的工具;虽然,测量实例只在 3cm 波段进行,但本文的方法和测试系统完全可以推广用于其他波段。

参 考 文 献

- [1] R. W. Beatty, A. C. Macpherson, *Proc. IRE*, **41**(1953)9, 1112—1118.
- [2] C. T. M. Chang, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-20** (1972), 186—187.
- [3] S. Stein, *Proc. IRE*, **42**(1954)3, 599.
- [4] 邱长兴,梁昌洪,韩毅,电子科学学刊, **12**(1990)4, 352—360.
- [5] T. Nemoto, D.F. Wait, *Trans. on MTT*, **MTT-16** (1968), 866—873.
- [6] 吴宏雄,有耗二端口网络散射参数测量的推广,中山大学科学报告会论文,广州,1990 年.
- [7] 吴宏雄,郑小键,潘楚华,微波学报,1988 年,第 3 期,第 1—8 页.
- [8] J. D. Pieterse, W. Versnel, *Appl. Sci. Res.*, **21**(1969)8, 13—23.
- [9] D. Kajfez, *IEEE Trans. on IM*, **IM-24**(1975)1, 4—11.
- [10] 梁昌洪,李润旗,雷振亚,电子学报, **18**(1990)3, 1—6.
- [11] 吴宏雄,邱熹凡,梁伟雄,微波,1986 年,第 3 期,第 1—15 页.
- [12] 吴宏雄,电子科学学刊, **12**(1990)2, 196—198.
- [13] 吴培亨,微波电路,科学出版社,1980 年,第 30—71 页.
- [14] 梁昌洪,邱长兴,电子科学学刊, **10**(1988)1, 1—7.

- [15] 吴宏雄, 徐炜, 电子科学学刊, 12(1990)5, 482—487.
[16] 吴宏雄, 杨文超, 微波学报, 1990 年, 第 1 期, 第 62—66 页.

EQUIVALENT TWO-PORT MEASUREMENT EQUATIONS FOR RECIPROCAL MULTI-PORT NETWORK AND THEIR APPLICATIONS

Wu Hongxiong

(Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract Equivalent two-port measurement equations for reciprocal n -port network is derived generally. As an example, applications of these equations, measurement details and data-processing methods are discussed for any three-port network. A set of measurement system which is made from the automatic slotted line and the program controlled short-circuit is presented in order to realize rapid and automatic measurements of S -parameters of any reciprocal multi-port network. Experimental data are given of a H-plane T three-port network.

Key words Microwave measurement; S -parameters; Multi-port network