利用因子分解方法计算网络的根通信可靠性 [1]

孔繁甲　　王光兴　　张祥德

(东北大学计算机系　沈阳　110006)

摘　要　本文使用因子分解 (factoring) 的方法计算网络的根通信可靠性 (存在从根点到每一个其它结点正常运行道路的概率)．我们充分利用无圈有向网络的拓扑结构提出了两个新的可靠性保护缩减 (Reliability-Preserving Reduction) 和一个进行因子分解的选边规则．在此基础上，给出一个因子分解算法 (factoring algorithm)．对于不是非常稠密的网络，该算法是非常有效的.

关键词　网络可靠性，因子分解算法，可靠性保护缩减

中图号　TP39

1　引　言

网络的可靠性是计算机网络和通信网络设计和运行的重要参数，所以得到了广泛的重视，已经取得了不少研究成果 [1-3]．设 $G=(V,E)$ 是一个边和结点可能失效的有向网络，s 是 G 的一个特定的结点称为根点．为了方便我们将 $G=(V,E)$ 连同其根点 s 定义为一个根通信网络 (RC-网络)，用 $G_s=(V,E,s)$ 表示． G_s 的根通信可靠性是指存在从根点 s 到所有其它结点正常运行道路的概率，用 $R(G_s)$ 表示． Ball 和 Provan[2] 提出一个计算无圈 RC-网络的线性时间算法，并证明了计算一般的 RC-网络的根通信可靠性确是一个 NP-困难问题．这意味着对一个 RC-网络 G_s，其有向圈的数量影响计算 $R(G_s)$ 的复杂性．于是我们猜测应该存在算法，其计算的复杂性应该是有向圈数量的函数．圈的数量越小，算法的复杂性越小，当圈的数量等于 0，即为无圈 RC-网络时，它是一个线性时间算法.

本文充分利用了无圈有向网络的拓扑结构，引进了两个新的可靠性保护缩减，建立了一个选边规则，使用因子分解的方法提出一个计算 $R(G_s)$ 的因子算法．该算法的计算复杂性正好符合上述猜想．由于篇幅的限制，本文只给出这个算法，其复杂性的详细讨论将在另文给出．对于无向网络，将每条边用两条方向相反的有向边代替，且每条边的可靠性与原来边相同 [4]，那么该算法也可以计算无向网络的根通信可靠性.

2　定义、记号、假设

定义

- 平凡 RC-网络：仅含一个结点的网络.
- 可达 RC-网络：根点能到达每一个其它结点的 RC-网络.
- 2(1)-邻域点：恰好有 2(1) 个邻域 (neighbor) 的结点.
- 入 (出) 邻域：一个结点 w 是另一个结点 v 的入 (出) 邻域，如果存在一条从 $w(v)$ 到 $v(w)$ 的边.
- 1-入邻域点 (in (out)-neighbor)：恰好有一个入邻域的结点.

[1] 1997-11-26 收到，　1998-10-14 定稿
国家自然科学基金 (19701006) 资助项目

• 0-出邻域点：没有出邻域的结点.

• 融合结点 w 进入结点 v：去掉所有其两个端点是 w 和 v 的边 (如果它们存在)，w 由 v 代替，每条与 w 关联的边现在与 v 关联.

记号

G'_s：由 G_s 生成的一个 RC-网络．(v,w)：一条从结点 v 到结点 w 的边．$G_s * e$：融合边 e 的一个端点进入另一个端点．$G_s - e(G_s + e)$：在 G_s 中删除 (增加) 边 e．$p_i(q_i)$：结点或边 i 的可靠性 (不可靠性)．$N_i(v)$ $(N_o(v))$：由所有 v 的入 (出) 邻域组成的结点集合．$E_i(v)$：由所有进入结点 v 的边所组成的边集合．Ω_i，Ω：可靠性保护缩减的乘因子．$L(G_s)$：因子分解算法计算 $R(G_s)$ 所生成的递归树的叶点的数量．f: 一个实数.

假设

(1) $G_s = (V, E, s)$ 没有自圈.

(2) 边和 RC-网络或者是运行的，或者是失效的．每条边的失效概率是已知的，且是 s-独立的.

(3) 由 RC-网络 G_s 的根通信可靠性的定义，每个结点的失效意味着 G_s 的失效．于是，G_s 的根通信可靠性能写为 $R(G_s) = \prod_{v\in V} P_v \cdot R(G'_s)$，这里 G'_s 表示 G_s 且 G_s 的每个结点都是运行的．由于这个原因，下面我们仅需考虑每个结点均是运行的 RC-网络.

3　可靠性保护缩减 (缩减) 和选边准则

许多文章已经说明，因子分解方法是计算网络可靠性非常有效的方法 [1,5-7]．该方法的本质是递归地应用因子定理 (1) 式进行可靠性计算：

$$R(G) = p_e R(G * e) + q_e R(G - e). \tag{1}$$

这个过程可由一棵递归树来表示，其根点表示原来的网络，其余结点表示使用因子定理后生成的缩减网络，算法的有效性 (复杂性) 取决于所使用的缩减和选取什么边进行因子分解．如果执行每一个缩减和选取每一条进行因子分解的边仅花多项式时间，那么，算法的复杂性取决于递归树的大小，进而取决于递归树中叶点的多少．对于无向网络，结合不同的缩减，已经获得了最优选边准则 [5]，也就是说生成的递归树含有最少的叶点，进而算法的复杂性最低．可是对于有向网络，由于每条边仅提供单向通路，能进行因子分解的边大大受到了限制，迄今为止，还没有得到象无向网络那样漂亮的结果．不过，计算有向网络的可靠性，因子分解方法仍然是非常有效的 [1]．

下面介绍我们算法所使用的缩减.

对 G_s 进行缩减后，它的某些结点或边被新的结点或边代替，新的边的可靠性和乘因子 Ω 被定义，使得缩减后的网络 G'_s 具有 $R(G_s) = \Omega R(G'_s)$．

• 并联缩减：让 $e_1 = (u,v)$，$e_2 = (u,v)$ 是 G_s 的两条并联边．于是用 $e_3 = (u,v)$ 代替 e_1，e_2 得到网络 G'_s，使得 $p_{e_3} = 1 - q_{e_1} q_{e_2}$，$\Omega = 1$．

• s-不相关边缩减：去掉所有进入根点 s 的边，$\Omega = 1$．

• $s-1$-邻域点缩减：让 $e = (s,v)$ 是从根点 s 出来的唯一的一条边，那么，融合结点 v 进入根点 s 获得 G'_s，且 $\Omega = p_e$．

• 2-邻域点缩减：让 v 是 G_s 的一个 2- 邻域点，它的两个邻结点分别是 u 和 w，$P_{(u,v)}$、$P_{(v,w)}$, $P_{(w,v)}$ 和 $P_{(v,u)}$ 分别是边 (u,v), (v,w), (w,v) 和 (v,u) 的可靠性 (如果某些边不存在，

相应的边的可靠性为 0）。 $P_{(u,w)}=P_{(u,v)}\cdot P_{(v,w)}$， $P_{(w,u)}=P_{(w,v)}\cdot P_{(v,u)}$ 。于是 G_s' 被生成通过删除结点 v ，并且如果 $P_{(u,w)}\neq 0$ ，那么增加一条边 (u,w) ，其可靠性为 $P_{(u,w)}$ ；如果 $P_{(w,u)}\neq 0$ 那么增加一条边 (w,u) 其可靠性为 $P_{(w,u)}$ 。并且 $\Omega=1-q_{(u,v)}\cdot q_{(w,v)}$ 。

• 0–出邻域点缩减：让 v 是 G_s 的一个 0–出邻域点，那么 G_s' 被生成通过删除结点 v ， $G_s'=G_s-v$ ，并且 $\Omega=1-\prod_{e\in E_i(v)}q_e$ 。

• 1–入邻域点缩减：让 v 是 G_s 的一个 1–入邻域点且 $e=(u,v)$ 是进入 v 的唯一的边，那么融合结点 v 进入结点 u 获得 G_s' ，并且 $\Omega=P_e$ 。

这里前 4 个缩减已经出现在不同的文章中 [1,5,7] (叙述略有不同，本质是一样的)，而后两个缩减是新的，它们在新的算法中起着重要的作用.

下面我们给出无圈 RC–网络的一个拓扑性质.

性质 1 每个非平凡的可达的无圈 RC–网络 G_s ，含有至少一个 0–出邻域点.

证明 限于篇幅，这里从略.

由性质 1 知，任何一个可达的无圈 RC–网络，可以连续的使用 0–出邻域点缩减计算其根通信可靠性，这意味着递归树中相应任一可达的无圈的 RC–网络一定是叶点. 因此，为了获得尽量小的递归树，也就是说降低算法的复杂性，我们选取进行因子分解的边的思想是：使分解后的两个缩减网络含有尽量少的圈，这样递归下去使所有缩减网络尽快变成无圈 RC–网络，进而有效地计算 $R(G_s)$. 因为在有向网络中，能进行因子分解的边是有条件的，但从根点 s 出来的边总可以进行因子分解，于是我们的选边准则 (ESS) 是：

ESS={选取从根点 s 出来的、另一端点至少在 G_s 的某一圈上的边 e} .

为了说明上述选边规则是可行的，我们给出下面的定理.

定理 1 让 G_s 是一个不能进行上述任何缩减 (除了并联缩减) 的非平凡的可达 RC–网络 G_s, 那么在 G_s 中一定存在一条满足条件 ESS 的边 e .

证明 根据已知条件，对任何 $v\in V$ $(v\neq s)$, $N_i(v)\geq 2$. 设 s 的出邻域为 $w_1,w_2,\cdots,w_l$. 利用反证法，假如不存在一条满足 ESS 的边，那么，结点 w_i $(1\leq i\leq l)$ 不可能位于任何圈上. 因为 G_s 一定含有圈，找 G_s 的一个圈，选择其上一个结点作为特定结点，将圈上其余结点均融合进入该结点. 重复上述过程直到 G_s 不含任何圈，于是得到一个无圈的 RC–网络 $G_s'=(V',E',s)$. 显然对于每个结点 $v\in V'$ ， $|N_i(v)|\geq 1$. 特别的， $|N_i(w_i)|\geq 2, 1\leq i\leq l$, 考虑无圈有向网络 $G''=G'-s$ $(G''=(V'',E''))$. 对每个结点 $v\in V''$ $|N_i(v)|\geq 1$. 在 G'' 上找一条最长的简单路 $v_1,e_1,v_2,e_2,\cdots,v_t$ ，用 $Path(v_1,v_t)$ 表示. 因为 $|N_i(v_1)|\geq 1$. 设 $v_0\in N_i(v_1)$. 对 v_0 有两种情况：

(1) v_0 在 $\mathrm{Path}(v_1,v_t)$ 上，设 $v_0=v_i$, $1\leq i\leq t$, 那么在 G'' 上 $v_0,v_1,\cdots,v_{i-1}$ 形成一个圈，这是一个矛盾.

(2) v_0 不在 $\mathrm{Path}(v_1,v_t)$ 上，于是简单路 $(v_0,v_1)\cup\mathrm{Path}(v_1,v_t)$ 比 $\mathrm{Path}(v_1,v_t)$ 更长，这又是一个矛盾. 总之，说明我们的假设是不对的，于是结论成立. 证毕

于是对一个进行了所有可能的缩减的非平凡 RC–网络 G_s ，定理保证满足条件 ESS 的边总是存在的. 并且使用深度优先搜索法很容易在 $0(|E|)$ 时间内找到满足条件 ESS 的边. 假设 $e\in$ESS ，对 e 进行因子分解后，缩减网络 G_s*e 含有的圈至少比 G_s 含的圈少 1 .

4 算 法

算法 Fac-alg(G_s、f)

(Fac-alg(G_s, f) 是一个递归函数，当第一次进入 Fac-alg 时，f 被赋值 1.0)．

(1) 如果 G_s 含有无向边，将每条无向边用两条方向相反的有向边代替，且每条边的可靠性等于原来边的可靠性.

(2) 如果 G_s 不是可达网络，那么 return(0)．

(3) 进行所有可能的 s- 不相关边，$s-1$-邻域点，并联，2-邻域点，0-出邻域点及 1-入邻域点缩减，每进行一次缩减，让 $f \longleftarrow f*\Omega$．($\Omega$ 是相应缩减的乘因子.)

(4) 如果 G_s 是个平凡 RC-网络，那么 return(f)．

(5) 使用深度优先搜索法选择满足条件 ESS 的边 e．

(6) return(Fac-alg(G_s*e, $f\cdot P_e$)+Fac-alg(G_s-e, $f\cdot q_e$))．

这是一个递归算法，很容易用 C 语言或 Pascal 语言编程.

对于可达的无圈 RC-网络，由性质 1，总存在 0-出邻域点．于是算法总可以连续使用 0-出邻域点缩减计算其根通信可靠性，即 $R(G_s)=\prod_i \Omega_i=\prod_{v\in V-s}\left[1-\prod_{e\in E_i(v)} q_e\right]$. 有趣的是这个表达式与 Ball 和 Provan[2] 所得表达式完全一致．由于进行一次 0-出邻域点缩减所需工作量与其所删除边的数量成正比，所以，进行所有 0-出邻域点缩减所需工作量与 G_s 边的数量成正比，即我们的算法可在 $O(|E|)$ 时间内计算无圈 RC-网络的根通信可靠性．对于不是非常稠密的 RC-网络，经过各种缩减以后，含有较少数量的圈，于是算法仅需进行较少次数的因子分解就可将所有缩减网络变成无圈网络，进而容易地计算出其根通信可靠性．也就是说算法对于稀疏网络是非常有效的.

该算法已用 C 语言编程，对好几个网络在 486/33 个人计算机上进行了计算，计算的结果表明它是很有效的.

5 结束语

本文提出一个计算网络根通信可靠性的因子算法．并且提出了两个新的可靠性保护缩减，经过理论分析和实例说明，对于不是非常稠密的网络，该算法是非常有效的.

参 考 文 献

[1] Page L B, Perry J E. Reliability of directed networks using the factoring theorem. IEEE Trans. on Reliability, 1989, R-38(5): 556–562

[2] Ball M O, Provan J S. Calculating bounds on reachability and connectedness in stochastic networks. Networks, 1983, 13(2), 253–278.

[3] Zhao L C, Kong F J. A new formula and an algorithm for reliability analysis of network. Microelectron Reliab. 1997, 37(3): 511–518.

[4] Satyanarayana A. A unified formula for the analysis of some network reliability problems. IEEE Trans on Reliability, 1982, R-31(1): 23–32.

[5] Wood R K. Factoring algorithms for computing K-terminal network reliability. IEEE Trans. on Reliability, 1986, R-35(3): 256–278.

[6] Theologou O R, Carlier J G. Factoring and reductions for networks with imperfect vertices. IEEE Trans. on Reliability, 1991, R-40(2): 210–217.

[7] Colbourn C J. The Combinatorics of Network Reliability. Oxford: Oxford University Press, 1987, 1–100.

COMPUTING ROOTED COMMUNICATION RELIABILITY OF NETWORKS USING FACTORING METHOD

Kong Fanjia　Wang Guangxing　Zhang Xiangde

(*Department of Computer Science, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract This paper uses factoring method for computing rooted communication reliability of networks, i.e., the proability that there are operating paths from the root vertex to all other vertices. Two new reliability-preserving reductions and an edge-selection strategy are presented by using the topological structure of acyclic directed networks. Based on that, a factoring algorithm is developed. It is very efficient for networks which are not very dense.

Key words Network reliability, Factoring algorithm, Reliability-preserving reduction

孔繁甲：　男，1963 年生，工学博士，副教授，从事网络可靠性和容错计算的研究工作，已在国际和国内杂志发表约 20 篇文章.

王光兴：　男，1937 年生，教授，博士生导师，中国通信学会会士，国务院学科评议组成员，从事网络可靠性，容错计算和宽带计算机网络等的研究工作，已在国际和国内杂志发表百余篇文章.

张祥德：　男，1963 年生，理学博士，副教授，从事组合数学和网络通信方面的研究，已在国内外杂志上发表论文 30 余篇.