

# 非均匀阵列上相干信号的空间谱估计\*

路 鸣 保 铮

(西安电子科技大学, 西安)

**摘要** 本文提出了两种处理非均匀或任意形状阵列上相干信号空间谱估计的方法: 阵列数据变换法和不变子空间旋转法。前一种方法对阵列数据进行预处理使之可用已有的降维技术处理。后一种方法采取不变子空间旋转运算的途径获得多个线性独立矢量以构建信号子空间。不同于传统的降维方法, 不变子空间旋转法不受阵列形状的限制, 也不会损失阵列的有效孔径。计算机仿真的结果证实了本文方法的有效性。

**关键词** 阵列信号处理; 空间谱估计; 测向; 相干信号

## 一、引 言

在雷达、声呐、地震勘探、通讯等许多领域中, 经常使用接收器阵列测量多个空间信号源的方向。信号子空间法<sup>[1]</sup>是从有噪的阵列输出数据估计信号方向的一类有效方法。然而, 当入射到阵列上的信号高度相关或相干时, 许多基于这类方法的算法性能会严重下降。近年来, 人们做了大量工作, 相继提出了一些解决这个问题的方法<sup>[2-8]</sup>。在已有的方法中, 以基于均匀线性阵列的降维处理方法<sup>[2,5-7]</sup>最有吸引力。但是这类方法有两个明显缺点: (1) 在不同程度上减小了阵列的有效孔径<sup>[2]</sup>, (2) 一般仅适用于均匀线阵。

在实际中, 由于以下几个方面的原因: (1) 阵列可能有各种各样的几何形状, 各阵元之间不是线性等间隔的; (2) 各阵元方向特性不一致; (3) 均匀线阵的个别阵元发生故障而失效, 接收阵列常常是非均匀的。与均匀阵列相比, 非均匀阵列的处理较复杂, 尤其是应用信号子空间法时, 对相干信号问题尚无成熟、有效的解决办法。为把降维处理技术推广到非均匀阵列上, 一般先要把非均匀阵列合成为均匀阵列。当非均匀阵列是均匀阵列的一个子阵列时, 文献[9]提出了一个内插-迭代算法。对任意几何形状的非均匀阵列, 文献[10]提出了一个扇区内插方法, 即将空域分割成若干个扇区, 每个扇区对应一个阵元个数很少的均匀线阵, 用若干个这样的均匀线阵就可以代表原非均匀阵列的总效应。但是, 当信号相干时, 由于需要进行空间平滑, 扇区内插方法未必能使阵列孔径得到充分利用。对非均匀阵列上相干信号的高分辨处理, 文献[11]提出了一个迭代性的基于信号“重构”的算法, 即以“重构”的信号去“激励”一个均匀线阵以产生阵列数据, 然后进行平滑处理。但是对算法的收敛性以及均匀线阵的设计问题, 文献[11]却未加说明。总之, 非均匀阵列上相干信号的空间谱估计是一个重要而又尚未解决好的问题, 也是本文将要研究的

1989年10月10日收到, 1990年6月18日修改定稿。

\* 国家自然科学基金资助项目。

问题。

我们在本文中提出了两种方法：阵列数据变换法和不变子空间旋转法。前者将非均匀阵列的输出数据变换为均匀阵列的输出以便用降维方法处理；后者则采取不变子空间旋转运算的途径获得多个线性独立矢量，其特点是不损失任何阵列的有效孔径，因而具有更好的性能。计算机仿真的结果说明了所提出的方法的有效性。本文的方法为非均匀阵列上相干信号的空间谱估计提供了有效的途径。

## 二、问题描述

假设用由  $N$  个阵元组成的  $x$ - $y$  平面上的二维阵列观察  $p$  个窄带空间信号源。阵元位置分别为  $[\delta_x(n), \delta_y(n)]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ；信号源与阵列共面也在  $x$ - $y$  平面上，信号方位角定义为到达方向与  $y$  轴的夹角，分别记为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ ；信号方向集合记为  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p\}$ 。阵列输出矢量可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^p s_i(t) \mathbf{a}(\theta_i) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

其中  $s_i(t)$  为第  $i$  个信号， $\mathbf{a}(\theta_i)$  为信号方向矢量，定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta_i) &= [e^{j\omega_0 \tau_1(\theta_i)}, e^{j\omega_0 \tau_2(\theta_i)}, \dots, e^{j\omega_0 \tau_N(\theta_i)}]^T \\ \tau_n(\theta_i) &= \frac{1}{c} [\delta_x(n) \cos \theta_i + \delta_y(n) \sin \theta_i] \end{aligned}$$

其中  $\omega_0$  为中心角频率， $c$  为传播速度。 $\mathbf{w}(t)$  为噪声矢量，本文假设  $\mathbf{w}(t)$  是具有未知方差  $\sigma^2$  的空间白高斯过程，即  $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^H(t)\} = \sigma^2 \mathbf{I}$ ，这里  $E\{\cdot\}$  表示数学期望，符号“ $H$ ”表示复共轭转置。方程(1)又可以写为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\Theta) &= [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \dots \mathbf{a}(\theta_p)] \\ \mathbf{s}(t) &= [s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)]^T \end{aligned}$$

阵列输出矢量的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\}$  为信号协方差矩阵。若信号不完全相关，即  $\mathbf{R}_s$  满秩，则阵列协方差矩阵有如下谱分解：

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sigma^2 \sum_{i=p+1}^N \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \quad (4)$$

且有性质<sup>[1]</sup>： $\mathbf{A}^H(\Theta) \mathbf{E}_n = 0$ ，这里  $\mathbf{E}_n \triangleq [\mathbf{e}_{p+1} \mathbf{e}_{p+2} \dots \mathbf{e}_N]$ 。这个性质是信号子空间法的依据。著名的 MUSIC 谱估计器定义为<sup>[1]</sup>

$$J_{\text{MUSIC}}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta) / [\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{a}(\theta)] \quad (5)$$

当信号相干时，矩阵  $\mathbf{R}_x$  奇异，(4)式和上述性质不再成立。对均匀线性阵列，当  $L > p$ ， $N - L + 1 \geq p$  时， $\mathbf{R}_x$  的所有  $L \times L$  阶主子矩阵的算术平均值具有类似于(4)式的性质<sup>[2]</sup>，这就是空间平滑法的根据。

下文中,我们将讨论当  $R_r$  奇异时,非均匀阵列的处理问题。

### 三、阵列数据变换方法

对于不规则的非均匀阵列,为了充分利用已有的相干信号处理方法,可采取的途径之一是将原阵列数据变换为一个虚拟的均匀线阵的输出,阵列数据变换方法即是基于这种思想。

设虚拟均匀线阵的信号方向矢量为

$$\mathbf{b}(\theta) = [1, e^{-j\omega_0 \tau(\theta)}, \dots, e^{-j(N-1)\omega_0 \tau(\theta)}]$$

$$\tau(\theta) = d \sin \theta / c$$

其中  $d$  为阵元间距。设有一个  $N \times N$  阶非奇异矩阵  $\mathbf{T}(\theta)$  满足如下关系:

$$\mathbf{T}(\theta) \mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{b}(\theta_1) \mathbf{b}(\theta_2) \cdots \mathbf{b}(\theta_p)] \triangleq \mathbf{B}(\theta) \quad (6)$$

矩阵  $\mathbf{T}(\theta)$  将原阵列的方向矩阵变换为虚拟的均匀线阵的方向矩阵。一旦获得这样的矩阵,矢量

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}(\theta) \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

可以看成上述虚拟均匀线阵的输出矢量。当信号相干时,便可用诸如空间平滑等方法处理。问题的关键是如何设计虚拟均匀线阵(即选择阵元间距  $d$ )和计算变换矩阵  $\mathbf{T}(\theta)$ 。

#### 1. 变换矩阵的选择

事实上,当  $p < N$  时,满足方程(6)的矩阵  $\mathbf{T}(\theta)$  总是存在且不是唯一的<sup>[3]</sup>。显然,无噪声时这些变换矩阵彼此等效。但实际上噪声总是存在的,而且当信噪比不高时,不同的变换矩阵性能差别非常显著。我们可将变换矩阵分为两类:正交矩阵和非正交矩阵。非正交变换矩阵一般会引起阵列信噪比损失,在处理变换数据的过程中还可能导致信号相消<sup>[12,13]</sup>。但这两个问题对正交变换并不存在,故应选择正交变换矩阵。注意到变换矩阵与信号方向  $\theta$  有关,并且一般来讲,满足方程(6)的正交矩阵不总是存在的,因此在所有正交矩阵中,应该选择使变换误差最小的矩阵。由于  $\theta$  不可能预先知道,所以只能从信号方向的初始估计  $\hat{\theta}$  来计算近似的变换矩阵<sup>1)</sup>。在最小二乘意义下,根据初始角度估计  $\hat{\theta}$ ,我们选择的变换矩阵是下列约束最小化问题的解:

$$\min_{\mathbf{T}(\hat{\theta})} \|\mathbf{B}(\hat{\theta}) - \mathbf{T}(\hat{\theta}) \mathbf{A}(\hat{\theta})\|_F \quad (8)$$

约束  $\mathbf{T}^H(\hat{\theta}) \mathbf{T}(\hat{\theta}) = \mathbf{I}$

其中  $\|\cdot\|_F$  为 Frobenius 范数。(8)式的解为<sup>[14,12]</sup>

$$\mathbf{T}(\hat{\theta}) = \mathbf{V} \mathbf{U}^H \quad (9)$$

其中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  均为  $N \times N$  阶酉矩阵,其列矢量分别为矩阵  $\mathbf{A}(\hat{\theta}) \mathbf{B}^H(\hat{\theta})$  的左奇异矢量和右奇异矢量,即有  $\mathbf{A}(\hat{\theta}) \mathbf{B}^H(\hat{\theta}) = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$ 。不难证明,酉变换矩阵(9)式具有下列性质

$$\mathbf{T}(\hat{\theta}) \mathbf{a}(\theta) \in \text{Range}\{\mathbf{B}(\hat{\theta})\}, \theta \in \hat{\theta} \quad (10)$$

也就是说,  $\hat{\theta}$  上的任一方向矢量  $\mathbf{a}(\theta)$  经  $\mathbf{T}(\hat{\theta})$  变换后必然落入虚拟均匀线阵信号方向矩阵  $\mathbf{B}(\hat{\theta})$  的列空间内。故从子空间来看,(9)式是没有变换误差的。但就单个方向矢

1) 信号初始角度估计问题将在下一节讨论。

量来讲,却是可能有误差的。不过,当  $\theta \in \hat{\Theta}$  时,最小化问题(8)式本身就迫使  $\mathbf{T}(\hat{\Theta})\mathbf{a}(\theta)$  尽量接近(或等于)  $\mathbf{b}(\theta)$ 。

变换矩阵(9)式一般不能保证满足方程(6)。为观察酉变换矩阵的误差,考虑  $\hat{\Theta} = \{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\}$  的简单情况。假设阵元是无方向性的即  $g_n(\theta) = 1, n = 1, 2, \dots, N$ 。可以证明

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{B}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) - \mathbf{T}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\mathbf{A}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\|_F \\ &= \sqrt{2N(2 - \sqrt{1 + \text{Re}(\varphi_a\varphi_b^*)} + \sqrt{|\varphi_a + \varphi_b|^2 - [\text{Im}(\varphi_a\varphi_b^*)]^2}} \\ & \quad - \sqrt{1 + \text{Re}(\varphi_a\varphi_b^*)} - \sqrt{|\varphi_a + \varphi_b|^2 - [\text{Im}(\varphi_a\varphi_b^*)]^2}) \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\varphi_a = \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_1)\mathbf{a}(\hat{\theta}_2)/N$ ,  $\varphi_b = \mathbf{b}^H(\hat{\theta}_1)\mathbf{b}(\hat{\theta}_2)/N$ 。研究(11)式发现,当  $\varphi_b \rightarrow \varphi_a$  或当  $\varphi_a \rightarrow 0$  且  $\varphi_b \rightarrow 0$  时,(11)式左边趋近于零。这就是说,当  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  在一个波束宽度内时,要使变换矩阵误差较小,原阵列和虚拟均匀线阵的主波束之幅度特性和相位特性应尽量接近;而当  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  间隔超过一个波束宽度时,两个阵列旁瓣越低则变换矩阵误差越小。当选择酉变换矩阵(9)式时,上述结论不仅指出了阵列数据变换法对非均匀阵列的要求,而且对虚拟均匀线阵的设计也有启发作用。

## 2. 虚拟均匀线阵阵元间距的选择

一般初始角度估计  $\hat{\Theta}$  总有误差,我们设计的虚拟均匀线阵应该对初始角度估计的误差最不敏感,形成的变换误差也应最小。实际上,我们关心的是矩阵  $\mathbf{T}(\hat{\Theta})\mathbf{A}(\hat{\Theta})$  与  $\mathbf{B}(\hat{\Theta})$  的列空间是否一致。在列空间的意义上,矢量  $\mathbf{T}(\hat{\Theta})\mathbf{a}(\theta)$  与  $\mathbf{b}(\theta)$  之间的距离可用两者之间的夹角  $\beta(\theta; \hat{\Theta})$  表示:

$$\beta(\theta; \hat{\Theta}) = \text{Arccos} \left\{ \frac{|\mathbf{b}^H(\theta)\mathbf{T}(\hat{\Theta})\mathbf{a}(\theta)|}{\|\mathbf{b}(\theta)\|_2 \cdot \|\mathbf{T}(\hat{\Theta})\mathbf{a}(\theta)\|_2} \right\} \quad (12)$$

其中  $\|\cdot\|_2$  和  $|\cdot|$  分别表示谱范数和绝对值。最佳阵元间距  $d_{\text{opt}}$  应使  $\beta(\theta; \hat{\Theta})$  最小,即

$$d_{\text{opt}} = \text{Arg min}_d \beta(\theta; \hat{\Theta}) \quad (13)$$

一般  $d_{\text{opt}}$  对  $\theta$  和  $\hat{\Theta}$  不很敏感,因此为简单起见,  $\theta$  可以选择为波束形成器最大输出方向。尽管如此,  $d_{\text{opt}}$  的计算仍不方便。根据前面的讨论,为减小变换误差,原阵列和虚拟均匀线阵的主波束之幅相特性应尽量接近一致。故若原阵列的 3dB 主波束宽度为  $BW$ , 则均匀线阵阵元间距的一种简单方便的选择是

$$d_B = 0.886\lambda / (N \cdot BW) \quad (14)$$

其中  $\lambda$  为波长。这样可使原阵列和虚拟均匀线阵的 3dB 主波束宽度相等。计算实例表明,  $d_B$  一般接近于  $d_{\text{opt}}$ 。

## 3. 计算机仿真结果

设有  $N = 25$  个全向阵元分布在半径  $r = 3.0\lambda$  的半圆上,阵元位置分别为  $[r \cos[(n-1)\pi/24], -r \sin[(n-1)\pi/24]]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 阵列的 3dB 主波束宽度约为  $BW = 7.0^\circ$ 。设有  $p = 2$  个相干信号,方向分别为  $\theta_1 = 3^\circ$  和  $\theta_2 = 8^\circ$ , 信噪比均为 15dB。可利用的快拍个数  $K = 50$ 。根据(14)式选择的阵元间距  $d = 0.3\lambda$ 。为计算酉变换矩阵(9)式,选择一组初始角度估计  $\hat{\Theta} = \{2.0^\circ, 3.5^\circ, 5.7^\circ, 7.5^\circ, 9.0^\circ\}$ 。将得到的  $\mathbf{T}(\hat{\Theta})$  代入(12)式,计算  $\beta(\theta; \hat{\Theta})$ , 结果见图 1。可以看到当  $\theta \in [0.0^\circ, 10.0^\circ]$  时,变换误差较小。图 2 是用空间平滑技术处理变换后的阵列数据所得到的空间谱估计(两次独立

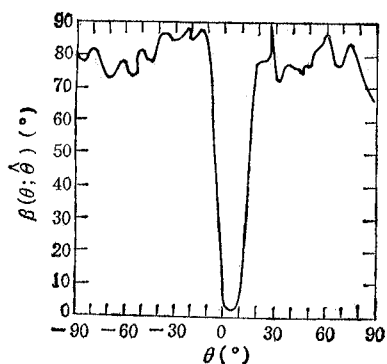


图 1 变换矩阵的误差特性(纵坐标的 \$\hat{\theta}\$ 应是 \$\hat{\theta}\$)

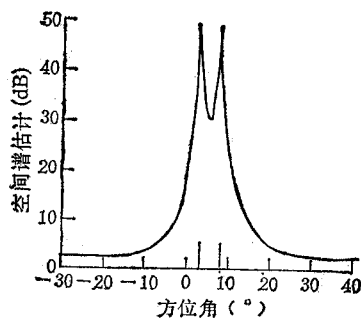


图 2 两个相干信号的空间谱估计(两次独立试验)

试验), 这里子阵列孔径  $L_s = 12$ 。可以看出两个相干信号的方位估计很准确。

#### 四、不变子空间旋转方法

当所有信号全都相干时, 它们之间的相位关系固定不变, 不可能通过多次快拍直接获取多个线性独立矢量; 而为了构建信号子空间和噪声子空间, 必须具有与信号个数相等的线性独立矢量。这一节中, 我们根据信号的空间方位的差异, 利用不变子空间旋转的概念, 提出一个不受阵列形状限制的处理相干信号的新方法。这个方法不走降维处理的途径, 而在原来的复矢量空间  $C^N$  上获取所需要的线性独立矢量来建立信号子空间, 因此阵列有效孔径不受任何损失。

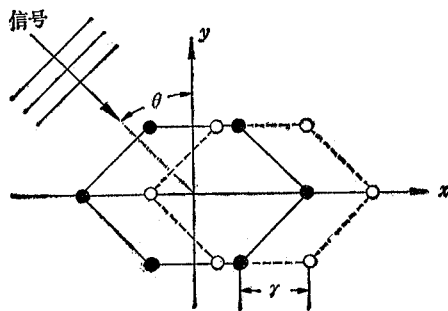


图 3 阵列的平移

我们知道, 阵列输出矢量  $\mathbf{x}(t)$  可由 (2) 表示式, 即

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{w}(t)$$

假设阵列相位参考点保持不变, 将原阵列形状不变地向右平移一段距离  $\gamma$  (如图 3 所示), 则阵列输出矢量  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  是信号场一新的采样, 可表示为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma)\mathbf{s}(t) + \tilde{\mathbf{w}}(t) \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma) = \text{diag} \{ e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \gamma \sin \theta_i}, i = 1, 2, \dots, p \} \quad (16)$$

这里  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, p$  是信号方向. 比较 (2) 式和 (15) 式, 可知阵列平移相当于用一对角矩阵  $\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma)$  右乘信号方向矩阵, 其对角线元素是二维平面上的旋转因子.  $\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma)$  右乘  $\mathbf{A}(\Theta)$  可视为信号方向矩阵的列空间 (即信号子空间) 在复矢量空间  $C^N$  上的“旋转”, 而信号子空间并不因此改变, 这种运算称为不变子空间旋转 (Invariant subspace rotation),  $\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma)$  称为旋转矩阵. 顺便指出, 著名的 ESPRIT 技术<sup>[5]</sup>正是基于不变子空间旋转的一种参数估计方法, 它的不变子空间旋转是通过两个平移等效的实际阵列实现

的。

可以证明: 无噪声时, 若  $\theta_i \neq \theta_j$ ,  $i \neq j$ , 则  $\mathbf{x}(t)$  和  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  是信号子空间中两个线性独立的矢量。这个原理是不变子空间旋转方法的根据。在我们的问题中, 由于阵列不可能移动, 所以必须寻找实现不变子空间旋转的途径。

### 1. 不变子空间旋转的实现

以一个非奇异线性变换矩阵  $\mathbf{T}(\Theta, \gamma)$  对阵列输出矢量  $\mathbf{x}(t)$  作线性变换, 由(2)式得

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}(\Theta, \gamma)\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(\Theta, \gamma)\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{T}(\Theta, \gamma)\mathbf{w}(t) \quad (17)$$

若变换矩阵  $\mathbf{T}(\Theta, \gamma)$  满足

$$\mathbf{T}(\Theta, \gamma)\mathbf{A}(\Theta) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma) \quad (18)$$

则上述线性变换等效于阵列平移。只要能够找到满足(18)式的矩阵  $\mathbf{T}(\Theta, \gamma)$ , 就可以实现信号子空间的旋转不变运算。

设想通过线性变换(17)式使阵列在空间做“平移运动”。如果  $\gamma$  为每次“平移”的距离, 阵列连续“平移” $m$ 次, 到达每个位置时相应的旋转矩阵为  $\mathbf{\Gamma}_m(\Theta, \gamma) = \mathbf{\Gamma}^m(\Theta, \gamma)$ ,  $\mathbf{\Gamma}(\Theta, \gamma)$  由(16)式给出。相应的变换矩阵为  $\mathbf{T}_m(\Theta, \gamma)$ , 这里  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ 。 $m$ 取正值相当于阵列“右移”; 取负值相当于“左移”;  $m = 0$ 则相当于阵列原地不动。(此时对应的旋转矩阵和变换矩阵均为单位矩阵。)由(18)式, 应有

$$\mathbf{T}_m(\Theta, \gamma)\mathbf{A}(\Theta) = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{\Gamma}_m(\Theta, \gamma), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (19)$$

实现不变子空间旋转的关键在于变换矩阵  $\mathbf{T}_m(\Theta, \gamma)$ 。而  $\mathbf{T}_m(\Theta, \gamma)$  与参数  $\gamma$  和未知的信号方向  $\Theta$  有关。由于一般只能得到  $\Theta$  的初始估计  $\hat{\Theta}$ , 根据  $\hat{\Theta}$  计算出的变换矩阵  $\mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma)$  只是  $\mathbf{T}_m(\Theta, \gamma)$  的估计, 因而只能近似实现不变子空间旋转。出于与第三节同样的考虑, 我们选择正交变换矩阵, 在确定了参数  $\gamma$  后, 根据初始角度估计  $\hat{\Theta}$ ,  $\mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma)$  可归结为下列约束最小化问题的解:

$$\min_{\mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma)} \|\mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma)\mathbf{A}(\hat{\Theta}) - \mathbf{A}(\hat{\Theta})\mathbf{\Gamma}_m(\hat{\Theta}, \gamma)\|_F \quad (20)$$

$$\text{约束: } \mathbf{T}_m^H(\hat{\Theta}, \gamma)\mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma) = \mathbf{I}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$$

(20)式的解可用同样方法得到。

### 2. 信号子空间和噪声子空间的估计

计算出  $\mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma)$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$  后, 分别用它们对阵列输出矢量  $\mathbf{x}(t)$  进行变换。

$$\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma)\mathbf{x}(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (21)$$

“空间平滑”协方差矩阵可定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y &= E \left\{ \sum_{m=-M}^M \mu_m \mathbf{y}_m(t) \mathbf{y}_m^H(t) \right\} \\ &= \sum_{m=-M}^M \mu_m \mathbf{T}_m(\hat{\Theta}, \gamma) \mathbf{R}_x \mathbf{T}_m^H(\hat{\Theta}, \gamma) \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\mathbf{R}_x$  为原阵列协方差矩阵,  $\mu_m > 0$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$  为权系数。

如果  $\hat{\Theta} = \Theta$  且变换矩阵无误差, 则由(2)、(19)和(22)式可得

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A}(\Theta) \tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma^2 \left( \sum_{m=-M}^M \mu_m \right) \mathbf{I} \quad (23)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{R}}_i = \sum_{m=-M}^M \mu_m \mathbf{F}^m(\Theta, \gamma) \mathbf{R}_i \mathbf{F}^{-m}(\Theta, \gamma) \quad (24)$$

其中  $\mathbf{R}_i$  为信号协方差矩阵,  $\tilde{\mathbf{R}}_i$  称为平滑的信号协方差矩阵. 设  $\Delta_{\max} = \max_{1 \leq i, j \leq p} \{|\sin \theta_i - \sin \theta_j|\} / 2$ , 可以证明<sup>[2,6]</sup>: 如果  $0 < \gamma < \lambda / (2\Delta_{\max})$  和  $2M + 1 \geq p$ , 则  $\tilde{\mathbf{R}}_i$  总是满秩的. 由此可知, 不论信号是否相干(即  $\mathbf{R}_i$  是否奇异), 矩阵  $\mathbf{R}_i$  总有类似于(4)式的谱分解, 因而其特征矢量分别张成信号子空间和噪声子空间.

### 3. 变换矩阵参数的选择

在计算变换矩阵之前应首先确定适当的参数  $\gamma$ 、“左移”或“右移”的次数  $M$ , 初步估计信号角度以得到  $\Theta$ . 此外还要选择适当的权系数  $\{\mu_{-M}, \dots, \mu_0, \dots, \mu_M\}$ .

(1) 信号方向初始估值的获得 在进行高分辨处理之前, 实际中往往要用常规方法对阵列数据做预处理, 如波束形成等. 可以认为我们一般具有一些关于信号的初步知识. 波束形成等传统方法虽不能分辨出一个波束宽度内的多个信号, 但对测量误差相当可靠. 如果信号角度间隔超过一个波束宽度, 不论信号相干与否, 用波束形成方法一般就可以把它们分辨开. 如果一组信号在一个波束宽度内, 则波束形成器的输出有一个主峰指向这组信号, 由此可知信号的大致方向, 误差一般不超过半个波束宽度. 要实现不变子空间旋转, 初始角度的个数不能少于实际信号的个数, 然而后者往往预先不知道. 为了不丢失信号, 可对信号个数作“过估计”, 一般可使估计值密集些(例如以间隔  $BW/N$  选择若干方向). 如果需要, 初始估计的个数可以超过阵元个数以减小估值误差.

(2) 其它参数的选择  $\tilde{\mathbf{R}}_i$  的数值条件除与  $\mathbf{R}_i$  和  $\Theta$  有关外, 还受参数  $\gamma$ 、 $M$  和权系数  $\mu_m$ ,  $-M \leq m \leq M$  的影响, 而且这三项参数的作用也不是互相独立的. 设  $\tilde{\mathbf{R}}_i$  和  $\mathbf{R}_i$  的第  $(i, j)$  个元素分别为  $(\tilde{\mathbf{R}}_i)_{ij}$  和  $(\mathbf{R}_i)_{ij}$ , 则由(24)式可得

$$\rho_{ij} \triangleq \left| \frac{(\tilde{\mathbf{R}}_i)_{ij}}{(\mathbf{R}_i)_{ij}} \right| = \left| \sum_{m=-M}^M \mu_m e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} m r (\sin \theta_i - \sin \theta_j)} \right| \quad (25)$$

从减小信号子空间受噪声扰动的角度出发, 我们希望  $\rho_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 尽量地小. 考查  $\rho_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 与各参数的关系, 我们看到, 由于  $M$  增大并不会降低  $\rho_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 的旁瓣峰值幅度, 而且大的  $M$  意味着使用更多的酉变换矩阵, 所以  $M$  不宜过大, 即使所有  $p$  个信号全都相干, 也只需满足  $2M + 1 \geq p$ . 采用权系数  $\mu_m$  是考虑到(22)式中各项的精度不同, 对原始数据给予较大的权重, 而对“平移”推算的数据适当减小权系数, 故宜采用类似汉明(Hamming)窗<sup>[16]</sup>的加权

$$\mu_m = 0.54 + 0.46 \cos 2\pi m / (2M + 1), \quad -M \leq m \leq M \quad (26)$$

当“窗函数” $\mu_m$  确定时, 决定  $\rho_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 的主瓣过渡区宽度和最小空间阻带衰减的是乘积  $(2M + 1)\gamma$ <sup>[16]</sup>. 原则上, 为使  $\tilde{\mathbf{R}}_i$  的数值条件尽可能好,  $\gamma$  选得大些效果较好, 但由于  $\Theta$  的误差和酉变换矩阵的变换误差,  $\gamma$  亦不宜过大. 对单信号组, 例如其中有两个相干信号的情况, 根据我们的计算经验, 取  $\lambda \leq \gamma \leq 2.0\lambda$  较适宜.

### 4. 变换矩阵的旋转特性

为研究变换矩阵  $\mathbf{T}(\Theta, \gamma)$  的特性, 定义

$$D(\theta) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{T}(\theta, \gamma) \mathbf{a}(\theta)}{\|\mathbf{a}(\theta)\|_2 \cdot \|\mathbf{T}(\theta, \gamma) \mathbf{a}(\theta)\|_2} \quad (27)$$

又设

$$D(\theta) = \alpha(\theta) e^{-i\beta(\theta)} \quad (28)$$

其中  $\alpha(\theta)$  和  $\beta(\theta)$  分别为  $D(\theta)$  的模和幅角。由(18)式不难证明下面的性质:

$$(1) \quad \alpha(\theta) = 1, \quad \theta \in \Theta \quad (29a)$$

$$(2) \quad [\beta(\theta_i) - \beta(\theta_j)] / [2\pi(\sin \theta_i - \sin \theta_j)] = \gamma / \lambda, \quad \theta_i \neq \theta_j; \quad \theta_i, \theta_j \in \Theta \quad (29b)$$

该性质揭示了实现不变子空间旋转的变换矩阵应该具有的特性。我们定义

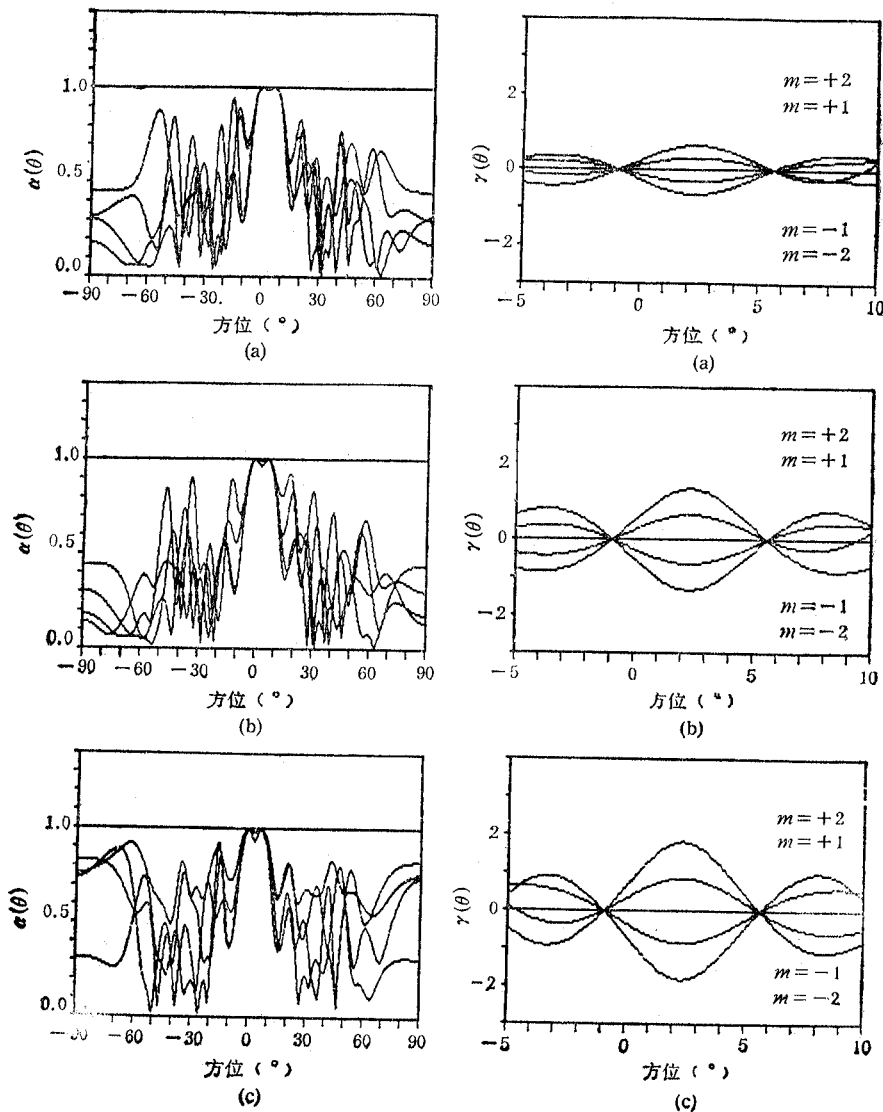


图4 变换矩阵  $\mathbf{T}_m(\hat{\theta}, \gamma)$  的特性

(a)  $\gamma = 0.6\lambda$ ; (b)  $\gamma = 1.2\lambda$ ; (c)  $\gamma = 1.6\lambda$

$$\gamma(\theta) = d\beta(\theta)/(2\pi d \sin \theta) \quad (30)$$

称之为变换矩阵的旋转因子, 符号“ $d$ ”表示微分。下面, 通过实例来考查酉变换矩阵的旋转特性。设有一个阵元数  $N = 6$  的线性非均匀阵列, 阵元在  $x$  轴上分别位于  $[0.0, 1.0, 4.0, 4.5, 6.0, 6.5]$  (单位  $\lambda$ ), 初始角度估计  $\hat{\Theta} = \{0.0^\circ, 0.5^\circ, 1.0^\circ, 1.5^\circ, 2.0^\circ, 2.5^\circ, 3.0^\circ, 3.5^\circ, 4.0^\circ, 4.5^\circ, 5.0^\circ\}$ , 选择  $M = 2$ 。对不同的参数  $\gamma = 0.6\lambda, 1.2\lambda, 1.6\lambda$ , 分别计算一组酉矩阵  $T_m(\hat{\Theta}, \gamma)$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ 。按(27)式计算  $D(\theta)$ , 得到其特性曲线  $\alpha(\theta) - \theta$  和  $\gamma(\theta) - \theta$  如图 4 所示。图中每组变换矩阵的特性曲线是重迭在一起画出的。观察每组变换矩阵在区间  $[0.0^\circ, 5.0^\circ]$  上的表现, 可以看出,  $\alpha(\theta)$  在此区间上均接近于 1。但是随着参数  $\gamma$  的变大,  $\alpha(\theta)$  在此区间平坦的程度就开始不太理想了。旋转因子  $\gamma(\theta)$  在区间  $[0.0^\circ, 5.8^\circ]$  上并不如理想的那样是水平直线, 即不是一个常数, 但对不同方向的信号方向矢量仍可旋转一定的角度。应该指出, 性质(29)式并不能保证变换矩阵的可用性<sup>[13]</sup>, 例如一些具有理想旋转特性的非正交矩阵对噪声过于敏感以致于没有多少实用价值。

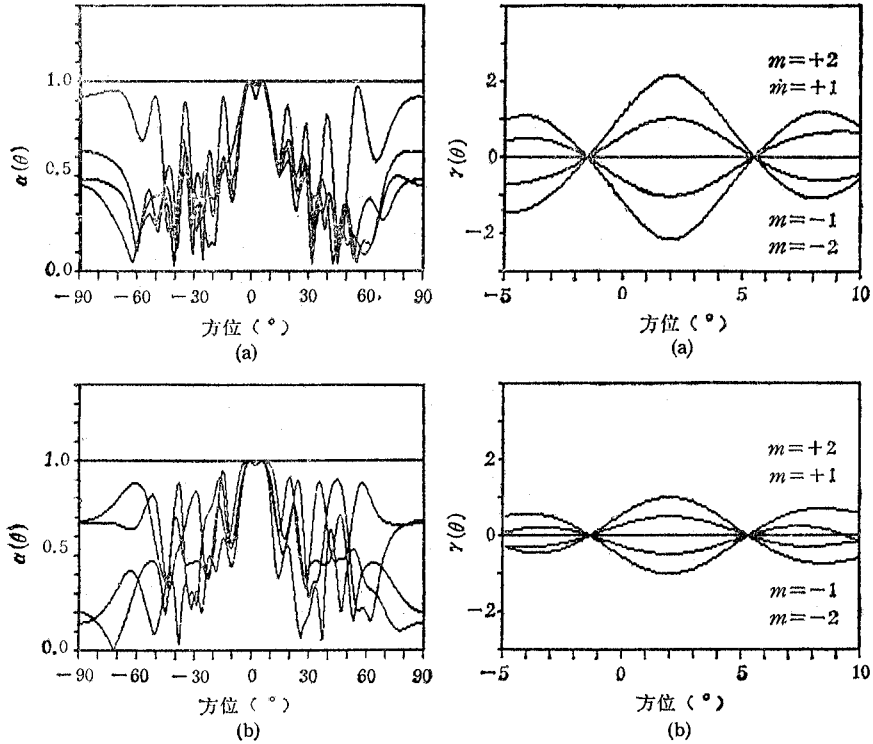


图 5 变换矩阵  $T_m(\hat{\Theta}, \gamma)$  在不同初始角度估计下的特性

(a)  $\hat{\Theta} = \{-1.2^\circ, 0.4^\circ, 2.0^\circ, 3.6^\circ, 5.2^\circ\}$ ; (b)  $\hat{\Theta} = \{0.0^\circ, 1.25^\circ, 2.74^\circ, 4.0^\circ\}$

## 5. 计算机仿真结果

考虑同一个线性非均匀阵列, 其波束宽度  $BW \approx 8.8^\circ$ , 两个等功率相干信号分别位于  $\theta_1 = 1^\circ$  和  $\theta_2 = 3^\circ$ , 其角度间隔约为  $0.23BW$ , 快拍个数  $K = 25$ 。作为性能比较的基准, 同时计算了具有相同信号参数的两个独立信号的 MUSIC 空间谱。表 1 和表 2 分别给出了不同信噪比下 100 组独立试验的统计结果, 包括估计量的偏倚 (Bias)、样本标准

离差 (Std. dev.) 以及空间谱的分辨概率。

表 2(a) 是由初始估计  $\hat{\Theta} = \{-1.2^\circ, 0.4^\circ, 2.0^\circ, 3.6^\circ\}$  出发得到的结果, 表 2(b) 是根据表 2(a) 选择新的角度估计重新计算的结果。不同角度估计下变换矩阵的特性如图 5 所示。由上面的图表可看出, 变换矩阵的误差越小, 估计量就越好。不变子空间旋转法获得的空间谱分辨性能以及估计量的性能几乎与独立信号情况相同。

表 1 两个独立信号(标准 MUSIC 算法)

| 信 噪 比<br>(dB) | $\hat{\theta}_1$ |        | $\hat{\theta}_2$ |        | 分辨概率 |
|---------------|------------------|--------|------------------|--------|------|
|               | 偏 倚              | 标准离差   | 偏 倚              | 标准离差   |      |
| 10            | -0.0594          | 0.2489 | 0.0377           | 0.2805 | 0.60 |
| 15            | -0.0617          | 0.1641 | 0.0668           | 0.1890 | 0.97 |
| 20            | -0.0182          | 0.0879 | 0.0192           | 0.0952 | 1.00 |

表 2(a) 两个相干信号(基于不变子空间旋转的 MUSIC 算法)  
 $\hat{\Theta} = \{-1.2^\circ, 0.4^\circ, 2.0^\circ, 3.6^\circ, 5.2^\circ\}$ ,  $r = 1.2\lambda$ ,  $M = 2$ , 汉明窗

| 信 噪 比<br>(dB) | $\hat{\theta}_1$ |        | $\hat{\theta}_2$ |        | 分辨概率 |
|---------------|------------------|--------|------------------|--------|------|
|               | 偏 倚              | 标准离差   | 偏 倚              | 标准离差   |      |
| 10            | -0.2533          | 0.1753 | 0.2535           | 0.2069 | 0.55 |
| 15            | -0.3038          | 0.1279 | 0.3003           | 0.1280 | 0.94 |
| 20            | -0.2848          | 0.0707 | 0.2854           | 0.0715 | 1.00 |

表 2(b) 两个相干信号(基于不变子空间旋转的 MUSIC 算法)  
 $\hat{\Theta} = \{0.0^\circ, 1.25^\circ, 2.0^\circ, 2.74^\circ, 4.0^\circ\}$ ,  $r = 1.2\lambda$ ,  $M = 2$ , 汉明窗

| 信 噪 比<br>(dB) | $\hat{\theta}_1$ |        | $\hat{\theta}_2$ |        | 分辨概率 |
|---------------|------------------|--------|------------------|--------|------|
|               | 偏 倚              | 标准离差   | 偏 倚              | 标准离差   |      |
| 10            | -0.1329          | 0.2593 | 0.1168           | 0.2905 | 0.58 |
| 15            | -0.0791          | 0.1199 | 0.0774           | 0.1321 | 1.00 |
| 20            | -0.0266          | 0.0512 | 0.0269           | 0.0566 | 1.00 |

## 五、结 束 语

本文针对任意形状阵列, 提出了两种处理相干信号的方法: 阵列数据变换法和不变子空间旋转法。一般来说, 不变子空间旋转法特别适用于阵列较长而相干信号个数不多的场合。因为此时只需做少量“平移”, 而且初始角度估值误差要小些, 从而不变子空间旋转运算的误差也较小。

为了改善估计量的精度, 本文提出的算法可以迭代执行。一般来说, 迭代过程的收敛性难以证明。不过, 根据计算实践, 只要初始角度估计较好(我们可通过密集选择  $\hat{\Theta}$  来控制估值误差), 迭代 1—2 次即可收敛。

## 参 考 文 献

- [1] R. O. Schmidt, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33**(1985)4, 387—392.
- [2] T. J. Shan, et al., *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33**(1985)8, 806—811.
- [3] H. Wang and M. Kaveh, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33**(1985)8, 823—831.
- [4] F. Haber, M. Zoltowski, *IEEE Trans. on AP*, **AP-34**(1986)9, 1069—1079.
- [5] R. Kumaresan, A. K. Shaw, *IEEE Trans. on AP*, **AP-36**(1988)1, 34—44.
- [6] R. T. Williams, et al., *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-36**(1988)4, 425—432.
- [7] 高世伟, 相干信号源的高分辨阵列处理方法研究, 西安电子科技大学博士论文, 1988年5月.
- [8] I. Ziskind, M. Wax, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-36**(1988)10, 1553—1560.
- [9] A. J. Weiss, et al., *IEEE Trans. on AES*, **AES-25**(1989)1, 48—55.
- [10] T. B. Bronez, Sector Interpolation of Non-uniform Arrays for Efficient High Resolution Bearing Estimation, *IEEE Proc. of ICASSP* (1988), pp. 2885—2888.
- [11] M. J. Rendas, J. M. F. Moura, Resolving Narrowband Coherent Paths with Non-Uniform Arrays, *IEEE Proc. of ICASSP* (1989), 2625—2628.
- [12] H. Hung, M. Kaveh, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-36**(1988)8, 1272—1281.
- [13] 路鸣, 高分辨阵列信号处理方法研究, 西安电子科技大学博士论文, 1990年, 4月.
- [14] G. H. 格罗布, C. F. 万罗安著, 廉庆荣译, 矩阵计算, 大连理工大学出版社, 1988年, 498—994页.
- [15] R. Roy, T. Kailath, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-37**(1989)7, 984—995.
- [16] A. V. 奥本海姆, R. W. 谢弗著, 董士嘉等译, 数字信号处理, 科学出版社, 1982年, 176—180页.

## SPATIAL SPECTRUM ESTIMATION OF COHERENT SOURCES IMPINGING ON NONUNIFORM ARRAYS

Lu Ming    Bao Zheng

(Xidian University Xi'an)

**Abstract** The problem of bearing estimation of coherent signals impinging on an array of arbitrary geometry is studied. Two methods are developed. The first one synthesizes the observed array data into the outputs of a linear uniform array and then processes them via conventional techniques such as spatial smoothing etc.; the second method is based on the invariant subspace rotation operation which is equivalent to the translational displacement of the array, linearly independent signal vectors are obtained thereby to span completely the signal subspace. As compared with the conventional processing techniques, the method based on invariant subspace rotation does not lead to an effective decrease in aperture size and therefore a decrease in resolution capability. The computer simulations are conducted to demonstrate the effectiveness of the presented methods.

**Key words** Array signal processing; Spatial spectrum estimation; Direction finding; Coherent signals