

基于介质顶阵的到达角估计¹

柴舜连 姚德森 毛钧杰

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

摘 要 由于介质顶对来波的发散作用, 到达平面阵的波是非平面波。本文研究基于介质顶阵的到达角 (DOA) 估计方法。通过对采样协方差矩阵进行远场近似 (FFA) 处理, 用高分辨特征结构技术 (MUSIC 算法) 进行 DOA 估计, 得到了比较好的结果。计算机模拟结果证实了该方法的有效性。

关键词 DOA 估计, MUSIC 算法, 介质顶阵

中图分类号 TN911.6

1 引 言

高分辨多信号到达角 (DOA) 估计在雷达、声纳系统中有重要用途, 国内外进行了广泛的研究^[1-4], 比较典型的有基于特征结构的 MUSIC 算法、ESPRIT 算法和最大似然方法。但几乎所有的文献都是假设来波是平面波, 即源点位于天线阵的远场区域。

最近, 我们在圆顶阵^[5]的基础上发展了一种称为介质共形顶阵的天线^[6], 其目的是为了扩大平面相控阵的扫描范围。其结构如图 1 所示, 它是由一个平面阵和扣在阵上方的旋转对称的介质顶组成。介质顶自上而下是渐变厚度的, 从而给通过的电磁波提供一定的相位梯度。当天线处于被动接收时, 来波经介质顶的发散作用, 则在其内部形成一个发散波。显然, 尽管来波是平面波, 但对接收阵而言, 入射波是非平面波, 即相当于源点位于一有限远距离, 而并非远场。如果直接用此阵采样得到的协方差矩阵进行 DOA 估计, 我们发现不仅分辨力大大降低, 而且估计误差也比较大。为此, 我们提出了远场近似 (Far Field Approximation, FFA) 的方法: 根据介质顶内发散波的特性和远场条件下协方差矩阵 \hat{R} 的 Toplitz 特性, 首先将采样协方差矩阵 R 进行远场近似处理, 得到具有 Toplitz 特性且逼近 \hat{R} 的协方差矩阵 \bar{R} , 称之为远场近似协方差矩阵; 再用 \bar{R} 进行 DOA 估计。模拟实验证明, 该方法是有有效的。

2 介质顶阵及其模型

为了简单起见, 只考虑位于 x 轴上的线阵情形。设阵元数目为 M , 相对于阵中心均匀分布, 元距为 d 。设有 K 个位于远场的窄频带非相干辐射源, 并且在 xoz 平面内, 相对于 z 轴的入射角为 $\theta_0^k (k = 1, 2, \dots, K)$, 辐射信号幅度为 $a_k(t) (k = 1, 2, \dots, K)$ 。对每个辐射源 (如第 k 个), 选取波前面与介质顶相切的平面为相位参考平面, 阵元 m 和阵中心相对于参考面的相位延迟分别为 ψ_m^k 和 ψ_c^k 。由于介质顶的发散作用, 波到达每个阵元的相对幅度不

¹ 1997-06-17 收到, 1998-01-04 定稿

一致, 记为 q_m^k 。波对每个阵元的入射角也不一样, 因而相对增益不一样, 记为 g_m^k , 则阵元的输出为

$$v_m(t) = \sum_{k=1}^K g_m^k q_m^k a_k(t) \exp\{j[\omega t - (\psi_m^k - \psi_c^k)]\} + n(t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

其中 $n(t)$ 为零均值、方差为 δ^2 的高斯白噪声, 且与信号不相关。由介质顶阵的特性可以知道^[6], ψ_m^k 可以分解为一个线性相位项和非线性项的和, 线性项即是相应的平面波入射时对应的相位延迟, 即

$$\psi_m^k - \psi_c^k = \alpha x_m \sin(\theta_c^k) + \Delta\psi_m^k, \quad (2)$$

其中 α 表示波数, $\alpha = 2\pi/\lambda$, λ 为工作波长, $x_m = (m - c_x)d$, $c_x = (M + 1)/2$, θ_c^k 为阵中心处波的入射角, 由介质顶阵的特性^[6],

$$\theta_c^k = \theta_0^k/A, \quad (3)$$

其中 A 称为扫描放大系数, 一般地 $A = 1.5 \sim 2.0$ 。

将 (1) 式写成矢量的形式:

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_M(t)]^T, \quad (4)$$

则阵输出协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^H(t)] = \sum_{k=1}^K a_k^2 \mathbf{R}^k + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_k^2 &= E[a_k(t)a_k^*(t)], \quad \mathbf{R}^k = \mathbf{P}^k \hat{\mathbf{R}}^k (\mathbf{P}^k)^H, \\ \mathbf{P}^k &= \text{diag}(p_1^k, p_2^k, \dots, p_M^k), \quad p_m^k = g_m^k q_m^k \exp(j\Delta\psi_m^k), \\ \hat{\mathbf{R}}^k &= \hat{\mathbf{s}}_k \hat{\mathbf{s}}_k^H, \quad \alpha^k = \sin \theta_c^k, \\ \hat{\mathbf{s}}_k &= [\exp(j\alpha x_1 \alpha^k), \exp(j\alpha x_2 \alpha^k), \dots, \exp(j\alpha x_M \alpha^k)]^T, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $*$ 表示共轭, H 表示共轭转置。由此可见, $\hat{\mathbf{R}}^k$, $\hat{\mathbf{s}}_k$ 分别是远场条件下的单位功率辐射源的协方差矩阵和相位矢量。 \mathbf{P}^k 表示了介质顶存在下对第 k 个辐射源的影响, $g_m^k q_m^k$ 和 $\Delta\psi_m^k$ 分别表示了阵元 m 的信号幅度和相位的变化。当介质顶不存在且波以 θ_c^k 入射时, 则 $\mathbf{P}^k = \mathbf{I}$, 此时远场协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^K a_k^2 \hat{\mathbf{R}}^k + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (7)$$

它是 Topplitz 矩阵, 即 $\hat{\mathbf{R}} = [\hat{r}_{(i-j)}^k]_{M \times M}$ 。由 (5), (6), (7) 式可知, $\hat{\mathbf{R}}$ 的信号子空间由 $\hat{\mathbf{s}}_k$ 生成, 而 \mathbf{R} 的信号子空间由 $\mathbf{P}^k \hat{\mathbf{s}}_k$ 生成。因此, 如果用远场假设下的空间谱估计算法进行 DOA 估计, 则性能大大变坏, 这是因为远场假设的相位矢量是 $\hat{\mathbf{s}}_k$, 而不是 $\mathbf{P}^k \hat{\mathbf{s}}_k$ 。对于介质顶阵, \mathbf{P}^k 很难用统一的解析表达式表示出来, 一般只能用数值方法求解^[6]。因此我们提出

了 FFA 方法, 首先对 \mathbf{R} 进行远场近似变换得到 $\bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{R}}$ 近似于 $\hat{\mathbf{R}}$; 再针对 $\bar{\mathbf{R}}$ 用传统的 MUSIC 算法进行 DOA 估计, 大大提高了估计的性能。

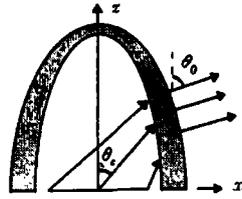


图 1 介质顶阵的结构

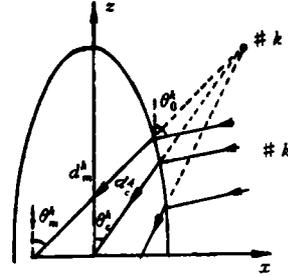


图 2 介质顶阵的等效球面波模型

3 FFA 方法

由介质顶阵的知识可知^[6], 介质顶内的发散波除边缘部分外, 近似于一个球面波。因此, 为简化起见, 以下的推导均假设入射波为球面波, 即第 k 个辐射源到阵中心为一有限距离 d_c^k , 入射角为 θ_c^k 。源点到阵元 m 的距离为 d_m^k , 入射角为 θ_m^k , 如图 2 所示。假设阵元的方向图为 $\cos \theta$, 则

$$g_m^k = \cos \theta_m^k / \cos \theta_c^k = d_c^k / d_m^k. \quad (8)$$

这里 g_m^k 对阵中心进行了归一。对球面波而言, 波的幅度与半径成反比, 因而有

$$q_m^k = d_c^k / d_m^k. \quad (9)$$

这里 q_m^k 也对阵中心进行了归一。令

$$\rho_m^k \triangleq g_m^k q_m^k = (d_c^k / d_m^k)^2. \quad (10)$$

由阵的几何关系:

$$d_m^k = [(d_c^k \alpha^k - x_m)^2 + (d_c^k \cos \theta_c^k)^2]^{1/2} \quad (11)$$

得

$$\Delta \psi_m^k \simeq \kappa [x_m^2 - x_m^2 (\alpha^k)^2] / (2d_c^k). \quad (12)$$

我们知道, $\hat{\mathbf{R}}$ 具有 Toplitz 性质。由于介质顶的存在, \mathbf{R} 不具有此性质。因此, FFA 方法的目的是得到下面问题的解:

$$\min_{\mathbf{R} \in S_T} |\bar{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}| \quad \text{给定 } \mathbf{R}, \quad (13)$$

其中 S_T 表示 Toplitz 矩阵集合。首先考虑无噪声下单个辐射源的情形, (13) 式的问题化为

$$\min_{\mathbf{R}^k \in S_T} |\bar{\mathbf{R}}^k - \hat{\mathbf{R}}^k| \quad \text{给定 } \mathbf{R}^k. \quad (14)$$

由 (6) 式, $\hat{\mathbf{R}}^k$ 和 \mathbf{R}^k 的元素分别为

$$\hat{r}_{-m}^k = \exp\{jkmd\alpha^k\}, \quad r_{s(s+m)}^k = p_s^k (p_{s+m}^k)^* (\hat{r}_{-m}^k), \quad (15)$$

则由于介质顶的存在, 协方差矩阵的畸变为

$$|r_{s(s+m)}^k - \hat{r}_{-m}^k|^2 \simeq (d/d_c^k)^2 [(4-m)(\alpha^k)^2 + m](m+2s-2c_x)^2. \quad (16)$$

由上式可见, $|r_{s(s+m)}^k - \hat{r}_{-m}^k|^2$ 是 $(m+2s-2c_x)$ 的二次函数。当 $|m+2s-2c_x|$ 最小时, $|r_{s(s+m)}^k - \hat{r}_{-m}^k|^2$ 达到最小值。分两种情况:

(1) 当 $(c_x - m/2) \in Z$ (Z 表示整数) 时, $|m+2s-2c_x| = 0$, 即 $s = (c_x - m/2)$, 令

$$\bar{r}_{-m}^k = r_{s(s+m)}^k \Big|_{s=(c_x-m/2)}. \quad (17)$$

(2) 当 $(c_x - m/2) \notin Z$ 时, $|m+2s-2c_x| = 1$, 即 $s = c_x - (m-1)/2$ 或 $s = c_x - (m+1)/2$ 时, 令

$$\bar{r}_{-m}^k = \frac{1}{2} \left(r_{s(s+m)}^k \Big|_{s=(c_x-(m-1)/2)} + r_{s(s+m)}^k \Big|_{s=(c_x-(m+1)/2)} \right). \quad (18)$$

因此, 用 \mathbf{R}^k 中最小误差项生成 \bar{r}_{-m}^k , 从而构成 $\bar{\mathbf{R}}^k$, 即

$$\bar{\mathbf{R}}^k = [\bar{r}_{(i-j)}^k]_{M \times M}. \quad (19)$$

当多辐射源和噪声存在下, 由于源的不相关性, 可以线性叠加, 则

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= [\bar{r}_{(i-j)}]_{M \times M}, \\ \bar{r}_{-m} &= \frac{1}{2} (r_{g(m)g(-m)} + r_{h(m)h(-m)}) = \sum_{k=1}^K \bar{r}_{-m}^k + \sigma^2 \delta_{m0}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中

$$g(m) = [c_x - m/2], \quad h(m) = [c_x - (m-1)/2], \quad (21)$$

算符 $[\cdot]$ 表示取整。因此, 由 (5) 式

$$\bar{\mathbf{R}} = \text{FFA}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^K a_k^2 \text{FFA}(\mathbf{R}^k) + \sigma^2 \text{FFA}(\mathbf{I}) = \sum_{k=1}^K a_k^2 \bar{\mathbf{R}}^k + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (22)$$

由于 $\bar{\mathbf{R}}^k$ 最接近于 $\hat{\mathbf{R}}^k$, 则 $\bar{\mathbf{R}}$ 近似 $\hat{\mathbf{R}}$, 因此当用 $\bar{\mathbf{R}}$ 代替 \mathbf{R} 进行 DOA 估计时, 可以提高估计性能。

算法总结如下: (1) 估计基于介质顶阵的 $\mathbf{R} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{v}(lT) \mathbf{v}^H(lT)$, 其中 L 为采样样本数, T 为采样周期, 用 (4), (6) 式; (2) 进行 FFA 处理, 即 $\bar{\mathbf{R}} = \text{FFA}(\mathbf{R})$, 用 (20) 式; (3) 用 MUSIC 算法估计介质顶内的入射角 $\theta_c^k (k=1, 2, \dots, K)^{[1]}$; (4) 计算辐射源的 DOA $\theta_0^k (k=1, 2, \dots, K)$, 用 (3) 式。我们称之为 FFA-MUSIC 算法。

4 模拟结果

选取阵元数 $M = 20$, 两个辐射源的入射角分别为 $\theta_0^1 = 55^\circ$, $\theta_0^2 = 60^\circ$, 采样平均数 $L = 100$, $\text{SNR} = 10\text{dB}$, $A = 1.5$ 。估计的结果如图 3 所示。图 3(a) 表示直接用 MUSIC 算法对采样协方差矩阵 \mathbf{R} 的估计结果, 图 3(b) 表示 FFA-MUSIC 算法估计的结果。显然, FFA-MUSIC 算法大大地提高了估计的性能, 包括 DOA 分辨力和估计精度。

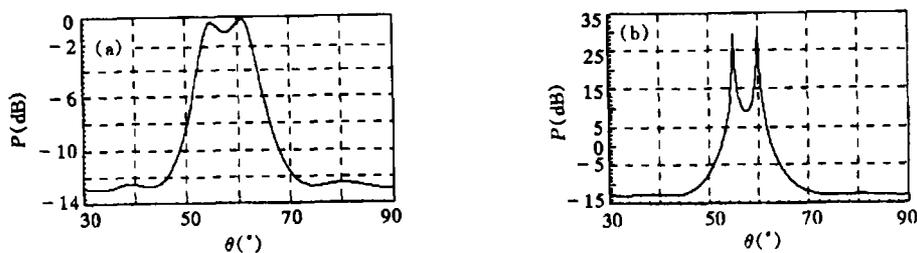


图 3 基于介质顶阵的 DOA 估计结果

(a) 基于 R 的 MUSIC 结果, (b) 基于 \bar{R} 的 FFA-MUSIC 结果

表 1 列出了 FFA-MUSIC 算法 100 次 Monte Carlo 试验的结果。

表 1 100 次 Monte Carlo 试验结果 (单位: 度)

θ_c^k	均值	方差
55	55.041	0.200
60	59.945	0.226

5 结 论

本文论述了基于介质顶阵的 DOA 估计方法,通过对采样协方差矩阵进行远场近似 (FFA) 处理,消除了由介质顶引起的非平面波的影响,提高了估计性能,得到了比较好的结果。计算机模拟结果证实了该方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans. on Antenna and Propagation, 1986, AP-31(3): 231-236.
- [2] Roy R, Kailath T. ESPRIT—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(7): 984-995.
- [3] Ziskind I, Wax M. Maximum likelihood location of multiple sources by alternating projection. IEEE Trans. on ASSP, 1988, ASSP-36(11): 1553-1560.
- [4] Swindlehurst A, Kailath T. Azimuth/elevation direction finding using regular array geometries. IEEE Trans. on AES, 1993, AES-27(1): 145-156.
- [5] Stangel J J, Valenfne P A. The dome antenna. Microwave Journal, 1975, 18(1): 31-34.

- [6] 柴舜连, 刘炎, 姚德森, 毛钧杰. 介质共形顶相控阵的研究. 电子学报, 已录用, 1997. 10.

DOA ESTIMATION BASED ON DIELECTRIC DOME ARRAY

Chai Shunlian Yao Demiao Mao Junjie

(*National University of Defence Technology, Changsha 410073*)

Abstract The performance of DOA estimation will be distorted in the presence of dielectric dome in the Dielectric Dome Array(DDA) because the dielectric dome diverges the planar wavefront into non-planar wavefront inside it. This paper proposes a Far Field Approximation(FFA) method to improve the performance based on DDA. This method first reconstructs a FFA covariance matrix, which is Toeplitz and approximates to the far field data covariance matrix, and then the high-resolution eigenstructure techniques can be utilized to estimate the DOAs without revising the planar wavefront assumption. Simulation results confirm the theoretical work.

Key words DOA estimation, MUSIC algorithm, Dielectric Dome Array(DDA)

柴舜连: 男, 1969年生, 博士生, 从事微带天线、共形阵、毫米波技术等研究工作.

姚德森: 男, 1938年生, 教授, 从事微波毫米波技术与天线教学与科研工作.

毛钧杰: 男, 1943年生, 教授, 从事微波毫米波技术与天线教学与科研工作.