

# 从噪声中恢复瞬态信号的 Gabor 级数法<sup>1</sup>

卢永刚 梅文博 周思永

(北京理工大学电子工程系 北京 100081)

**摘 要** 该文研究了从噪声中恢复原瞬态信号问题, 根据瞬态信号和噪声的 Gabor 系数在时-频平面上分布不同的特点, 借用假设检验理论, 提出了一种恢复被噪声污染的原瞬态信号的 Gabor 级数方法, 进行了计算机仿真和对实际信号的处理。

**关键词** 时-频分布, Gabor 级数, 信号复原, 噪声抑制

**中图分类号** TN911.7

## 1 前 言

瞬态信号是指与观测期间相比, 持续时间非常短的信号。在客观世界中, 它的存在很广泛。例如, 在雷达信号处理中要检测的目标回波信号、在非声反潜战中水面船只检测或地质测量中人们试图检测的瞬态磁场、生物医学信号处理中脑电图的唤醒电势信号、振动信号、地震信号等。实际应用中的瞬态信号往往受到噪声干扰, 使得对瞬态信号的分析与处理非常困难。因而如何从噪声干扰中恢复原瞬态信号显得尤为重要。常用的信号恢复方法有参数估计方法、滤波方法、非参量估计模型方法。近年来时-频分析方法受到重视并得到迅速发展。本文研究采用 Gabor 级数方法<sup>[1]</sup>恢复被噪声污染的瞬态信号。瞬态信号与噪声各自的 Gabor 系数在时-频平面上分布不同, 瞬态信号的持续时间短, 在时-频平面上其 Gabor 系数分布比较集中, 幅值较大; 而噪声的 Gabor 系数遍布整个时-频平面, 能量一定的情况下, 其幅值较低。因此可以选取合适的门限来抑制噪声, 实现信号与噪声分离, 达到恢复原瞬态信号的目的。本文先根据假设检验理论提出一种基于 Gabor 级数恢复淹没在高斯白噪声下原瞬态信号的方法, 然后用计算机仿真验证该方法的可行性和有效性, 并成功地用于对实际采集到的伴有噪声和干扰的接收信号进行处理, 取得了可信的结果。

## 2 Gabor 级数基本理论

Gabor 变换是一种时-频分析方法, 它把时域内一维信号映射为对应的时-频域二维信号, 在时-频域内分析信号, 从而揭示更多的信息, 如信号频率随时间变化的特性等。一连续实值函数  $y(t)\{-\infty < t < \infty\}$  的 Gabor 级数展开式为<sup>[1]</sup>

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} g(t - n\alpha) \exp[j2\pi m\beta(t - n\alpha)] \quad (1)$$

式中  $C_{m,n}$  为  $y(t)$  的 Gabor 系数,  $g(t)$  称为窗函数, 为了归一化, 一般取  $\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 1$ , 其中  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha\beta \leq 1$ 。为保证对 (1) 式的任意能量有限信号均存在, 一般选择  $\alpha\beta = 1$ 。不失一般性取  $\alpha = \beta = 1$ , 则 (1) 式可写为

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} g(t - n) \exp(j2\pi mt) \quad (2)$$

<sup>1</sup> 1999-01-18 收到, 1999-08-19 定稿  
雷达信号处理国防科技重点实验室基金资助项目

计算 Gabor 系数  $C_{m,n}$  常用的方法有两种: 第一种方法是基于 Zak 变换<sup>[2,3]</sup>。信号  $h(t)$  的 Zak 变换表达式定义为

$$\text{Zak}\{h(t)\} = H(z, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(z - k) \exp(-j2\pi k\omega) \quad (3)$$

对 (2) 式取 Zak 变换得

$$\text{Zak}\{y(t)\} = \text{Zak}\{g(t)\} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} \exp(j2\pi z(mt - n\omega)) \quad (4)$$

推出

$$C_{m,n} = \int_0^1 \int_0^1 \exp[-j2\pi(mz + n\omega)] \frac{\text{Zak}\{y(t)\}}{\text{Zak}\{g(t)\}} dz d\omega \quad (5)$$

第二种方法是基于双正交函数。在 (2) 式中窗函数  $g(t)$  的变换式  $\{g_{m,n}(t)\}$  构成 Gabor 系数空间的基底, 令

$$g_{m,n}(t) = g(t - n) \exp(j2\pi mt) \quad (6)$$

设  $g(t)$  的正交函数为  $\gamma(t)$ , 并令

$$\gamma_{m,n}(t) = \gamma(t - n) \exp(j2\pi mt) \quad (7)$$

$g(t)$ 、 $\gamma(t)$  二者有如下关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - n) \gamma^*(t - \eta) \exp[j2\pi(m - \mu)t] dt = \delta_{n,\eta} \delta_{m,\mu} \quad (8)$$

根据 (8) 式, 可由  $y(t)$  与  $\gamma_{m,n}(t)$  的内积表示 Gabor 系数, 即

$$C_{m,n} = \langle y(t), \gamma_{m,n}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \gamma_{m,n}^*(t) dt \quad (9)$$

称该式为 Gabor 变换。

### 3 基于 Gabor 变换的瞬态信号提取方法

Gabor 系数分布在时-频平面上, 其中很重要的特性是信号的 Gabor 系数集中在很小的区域里, 而白噪声的 Gabor 系数遍布在整个时-频平面上, 信号与噪声的 Gabor 系数特性的不同为从白噪声中分离信号提供了一种可行的方法。设接收信号  $y(t)$  为

$$y(t) = s(t) + n(t) \quad (10)$$

式中  $s(t)$  是待恢复的确定的瞬态信号,  $n(t)$  是零均值、 $\sigma^2$  方差的高斯白噪声, 并且具有遍历性。本文的目的就是要从 (10) 式中恢复出瞬态信号  $s(t)$ 。

根据假设检验思想, 构造如下模型

$$H_0: \quad y(t) = n(t) \quad (11)$$

$$H_1: \quad y(t) = s(t) + n(t) \quad (12)$$

$H_0$  为只存在噪声假设,  $H_1$  为噪声加信号假设. (11) 式和 (12) 式的相应 Gabor 系数模型为

$$H_0: C_{m,n} = C_{m,n}^n; \quad (13)$$

$$H_1: C_{m,n} = C_{m,n}^n + C_{m,n}^s; \quad (14)$$

由于 Gabor 变换是线性变换, 所以高斯白噪声的 Gabor 系数  $C_{m,n}^n$  仍是高斯分布的, 因此  $C_{m,n}$  也服从高斯分布. 记  $C_{m,n}$  的方差为  $\sigma_m$ , 有似然函数:

$$p(C_{m,n}|H_0) = [1/(2\pi\sigma_m^2)]^{1/2} \exp[-(C_{m,n})^2/(2\sigma_m^2)]; \quad (15)$$

$$p(C_{m,n}|H_1) = [1/(2\pi\sigma_m^2)]^{1/2} \exp[-(C_{m,n} - C_{m,n}^s)^2/(2\sigma_m^2)] \quad (16)$$

相应似然比

$$\lambda(C_{m,n}) = [p(C_{m,n}|H_1)]/[p(C_{m,n}|H_0)] = \exp[-((C_{m,n}^s)^2 - 2C_{m,n}^s C_{m,n})/(2\sigma_m^2)] \quad (17)$$

取对数得

$$l(C_{m,n}) = \ln\lambda(C_{m,n}) = (C_{m,n}^s/\sigma_m^2)C_{m,n} - (C_{m,n}^s)^2/(2\sigma_m^2) \quad (18)$$

根据贝叶斯准则, 当似然比大于一门限时, 判为信号存在; 当似然比小于一门限时, 判为信号不存在. 可以证明这一准则等价于当  $|C_{m,n}| \geq \lambda_0$  时, 认为瞬态信号的 Gabor 系数起主要作用, 保留 Gabor 系数  $C_{m,n}$  不变; 当  $|C_{m,n}| \leq \lambda_0$  时, 认为噪声的 Gabor 系数起主要作用, 令相应的 Gabor 系数为零<sup>[4]</sup>. 于是根据 (2) 式, 可得到从 (10) 式中恢复出原瞬态信号  $s(t)$  的公式为

$$\hat{s}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} U(|C_{m,n}| - \lambda_0) g(t-n) \exp\{j2\pi mt\} \quad (19)$$

式中  $U(x)$  为单位阶跃函数. 在 (19) 式中, 通过选择合适的门限  $\lambda_0$  就可以有效地分离信号与噪声. 其中当给定虚警概率  $P_{fa}$  时, 门限  $\lambda_0$  由下式确定:

$$\begin{aligned} P_{fa} &= P(\lambda_0 \leq |C_{m,n}|) \\ &= \int_{\lambda_0}^{\infty} p(|C_{m,n}|/H_0) dC_{m,n} = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{C_{m,n}^2}{2\sigma_m^2}\right) dC_{m,n} \end{aligned} \quad (20)$$

## 4 计算机仿真与应用

为验证上述方法, 本文先对噪声背景下常见的指数衰减型瞬态信号在计算机上进行仿真恢复, 然后将该方法用于解决实际系统的实际瞬态信号恢复问题. 在这两种情况下均采用如下窗函数:

$$g(t) = \sqrt{2\alpha} \exp(-\alpha t) u(t), \quad \alpha \geq 0 \quad (21)$$

### 4.1 仿真

信号

$$s(t) = \exp[-0.5(t-2)] \sin[4\pi(t-2)] u(t-2) \quad (22)$$

如图 1 所示. 图 2 所示为图 1 信号的 Gabor 系数在时-频域上的分布, 为一尖峰, 水平面内横轴为时间轴, 纵轴为频率轴, 显示信号时-频域的信息. 图 3 是信噪比为 0dB 的图 1 信号与具有均值为零、方差为 1 的高斯白噪声之和. 图 4 所示为图 3 信号的 Gabor 系数. 图

5 为用 (19) 式恢复出的原瞬态信号  $s(t)$ 。  $s(t)$  与恢复信号  $\hat{s}(t)$  的均方误差如图 6 所示。 实际仿真结果表明, 当原瞬态信号  $s(t)$  的信噪比大于  $-15\text{dB}$  时, 该信号有较好的恢复效果。

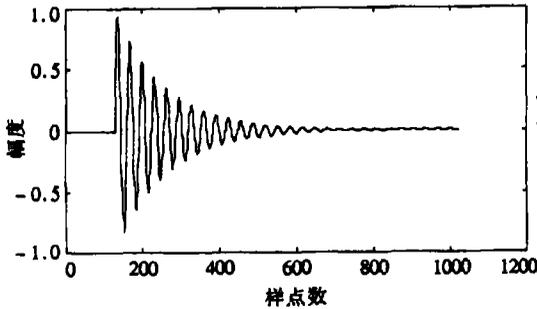


图 1 无噪声的信号

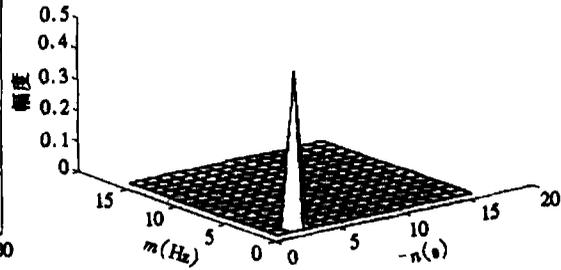


图 2 图 1 信号的 Gabor 系数在时-频域上的分布

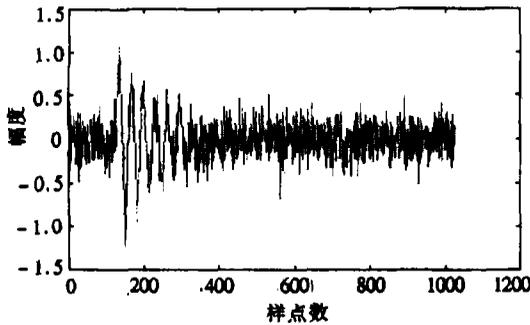


图 3 信噪比为 0dB 的有噪信号

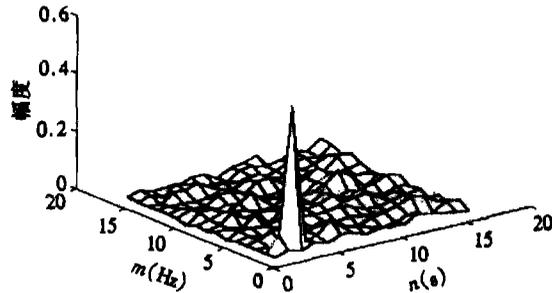


图 4 图 3 有噪信号的 Gabor 系数在时-频域上的分布

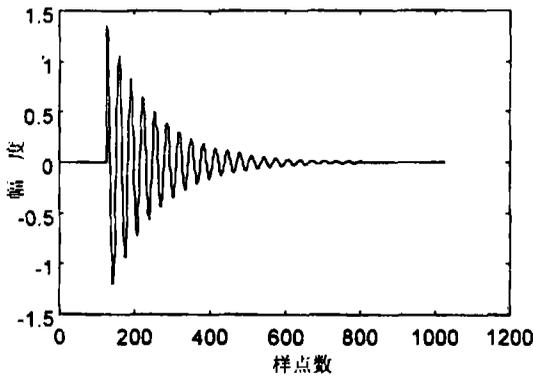


图 5 被恢复的瞬态信号

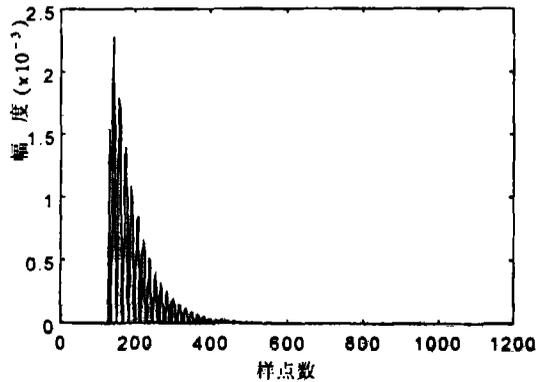


图 6 均方误差

### 4.2 应用

把上述方法用于图 7 所示的实际系统进行信号处理。脉冲产生器产生一个 5ns 的窄脉冲, 经发射机放大及天线发射, 由于天线馈线带宽的影响, 接收机接收到的信号不再是窄脉冲信号, 而为有振荡的拖尾信号。同时信号经过信道传输受到干扰, 宽带接收机也接收到其它干扰信号和干扰噪声。采集到的实际接收信号  $y(t)$  的波形如图 8 所示, 由于经过信道传输受到噪声干扰, 很难看出原始发射信号。图 9 为图 8 信号的 Gabor 系数在时-频域上的

分布，图 10 为图 9 Gabor 系数经门限处理后的分布，其中待恢复的原瞬态信号在时-频面上位于  $0 \leq m \leq 8$  和  $5 \leq n \leq 10$  组成的区域内。图 11 为经过加门限处理后恢复的原瞬态信号。

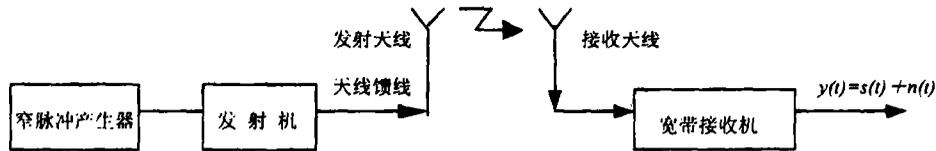


图 7 实际系统

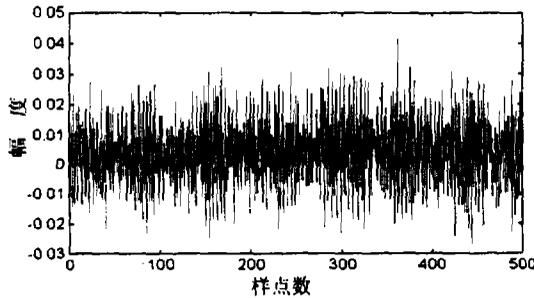


图 8 实际接收信号

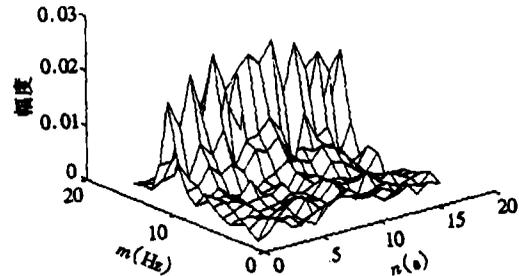


图 9 图 8 中信号的 Gabor 系数在时-频域上的分布

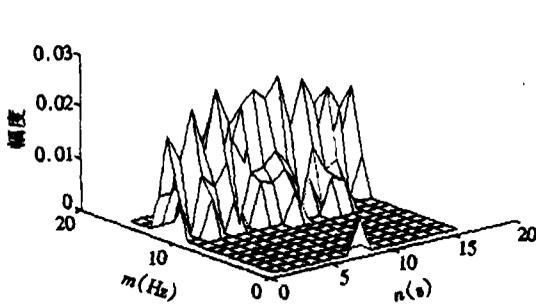


图 10 图 9 Gabor 系数经门限处理后的分布

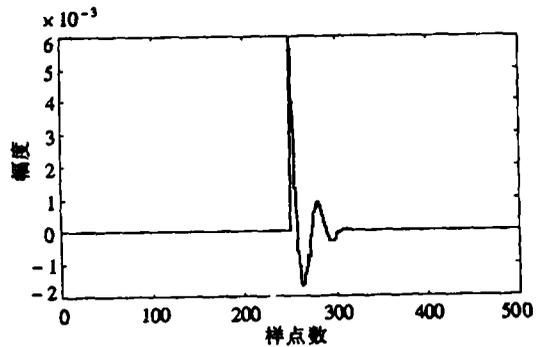


图 11 恢复出的瞬态信号

### 5 结 论

本文根据瞬态信号和噪声各自 Gabor 系数在时-频平面上分布不同的特点，利用假设检验理论，提出了一种从高斯白噪声背景下恢复原瞬态信号的 Gabor 级数方法，这是一种非参量估计、非模型化的波形估计方法。计算机仿真和对实际信号的处理结果均说明该方法可行、有效、实用。该方法的思想可推广到非高斯背景下的瞬态信号恢复问题上，亦可用作谱估计等等。但是如何最佳地设置门限，特别是未知有关噪声统计特性的情况下如何最佳地设置门限，有待在理论上进一步深入探讨。

致谢 本文实际信号数据的采集得到北京理工大学电子工程系高本庆教授、刘瑞祥研究员、薛正辉讲师的帮助,在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] B. Friedlander, Detection of transient signals by the Gabor representation, IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(2), 169-180.
- [2] A. J. E. M. Janssen, The Zak transform: A signal transform for sampled time-continuous signals, Philips Journal of Research, 1988, 43(1), 23-69.
- [3] R. S. Orr, Computational assessment of Gabor representations, Int. Conf. Acoust. Speech. Sig. Proc. Toronto, Canada, 1991, 2217-2210.
- [4] Mei Wenbo, Shark Lik-Kwan, Recovery of transient signals in noise by optimal thresholding in wavelet domain, Journal of Beijing Institute of Technology, 1997, 6(3), 274-279.

## RECOVERY OF TRANSIENT SIGNAL EMBEDDED IN NOISE USING GABOR SERIES

Lu Yonggang    Mei Wenbo    Zhou Siyong

(Dept. of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** In this paper, the recovery of transient signals embedded in noise is studied. It is noticed that there is different feature between the transient signal's Gabor coefficients and the noise's Gabor coefficients distributed in time-frequency plane, the Gabor series method is presented for recovering transient signals embedded in noise in terms of hypothesis test theory. The computer simulation is implemented for exponential transient signal. This method is also used to process real-life signals.

**Key words** Time-frequency distribution, Gabor series, Signal recovery, Noise elimination

卢永刚: 男, 1975年生, 硕士生, 现从事时频分析及应用的研究工作。

梅文博: 男, 1960年生, 教授, 现从事子波理论、时频分析、图像分类方面的研究工作。

周思永: 男, 1934年生, 教授, 长期从事信号处理、子波理论、时频分析及应用研究工作。