

基于二进小波变换的实信号的多尺度 Hilbert 变换和瞬时频率提取¹

蔡 毓 刘贵忠 侯兴松

(西安交通大学电信学院信息与通信工程系 西安 710049)

摘 要 该文着重讨论了使用二进小波变换方法实现数字 Hilbert 滤波,特别是使用滤波器组实现多尺度 Hilbert 滤波所要考虑的各尺度滤波器的设计问题。将多尺度 Hilbert 方法应用到求信号的瞬时参数中,并利用小波变换的去噪思想,取得了比使用 DWT 方法去噪更好的去噪效果。

关键词 二进小波变换, 数字 Hilbert 滤波器, 多尺度

中图分类号 TN713, O177.6

1 引 言

在本文中,我们引进了一种实现实信号 Hilbert 变换的算法并考虑用不含抽取环节的二进小波滤波器组来实现。基于小波变换提取信号瞬时参数的方法,在文献 [1, 2] 中早有论述。文献 [3] 的论述只是基于 CWT 的,在不采用快速算法的情形下,复杂度约为 $O(N(\log_2 N)^2)$ [2] 在二进情形下,复杂度可以减少为 $O(N\log_2 N)$ 。而在文献 [1] 中的论述是基于离散小波变换,它的运算量比二进情形要小一些,但是冗余性降低导致对噪声较为敏感。因此本文采用无抽取的滤波器组实现信号多尺度,然后在各个尺度上分别对子带信号做 Hilbert 变换,通过对子带的取舍降低信号对噪声的敏感程度。因为数字 Hilbert 滤波器并非理想,在靠近低频和高频段性能不好。多尺度分解克服了单一 Hilbert 滤波器这一弱点。

值得注意的是,本文第 3 节中提到的定理 1 来源于 Daubechies 在文献 [3] 中的工作,该工作作为本文奠定了理论基础。

2 Hilbert 变换

设有一个实信号 $f(x)$, 我们定义有如下的 Hilbert 变换:

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds \quad (1)$$

对于 (1) 式,有频域表示:

$$(\hat{H}f)(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi) \quad (2)$$

考虑到 Hilbert 滤波器是非因果的理想滤波器,没法物理实现。我们在这里采用数字滤波器逼近。数字 Hilbert 滤波器的设计跟数字化采用的插值函数有密切关系。插值函数的不同,将直接决定数字滤波器的冲击响应和逼近效果。讨论插值函数的选取超出本文范围。

本文采用的设计方法是基于 0 阶尺度函数采样的冲击响应不变法。

$$(\hat{H}\phi)(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{\phi}(\xi) \quad (3)$$

¹ 2000-12-06 收到, 2001-06-11 定稿

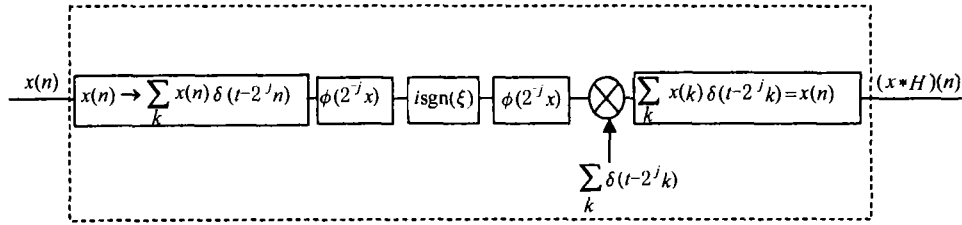


图 1 多尺度 Hilbert 变换数字滤波器设计准则框图 (DWT 情形)

对于紧支撑类 Daubechies 小波而言, 它们在频域上有足够快的衰减, 使得实际上相当于 (3) 式中对理想 Hilbert 滤波器做加窗处理, 使得我们的处理成为可能。同时, 我们可以通过改变 Daubechies 尺度函数的零点个数改善窗函数的性能。本文不再详述, 请参阅文献 [4]。

图 1 虚线框对应的就是我们设计的数字 Hilbert 滤波器, $\text{isgn}(\xi)$ 表示理想的 Hilbert 滤波器, 其中 $(x * H)(n) = \sum_k x(k)H(n-k)$, 即 $x(n)$ 和 $H(n)$ 的离散卷积, 也可以表示如下:

$$H(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-n)(H\phi)(x)dx \quad (4)$$

(4) 式可以在频域中写成:

$H(l) = -2 \int_0^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \sin(l\xi) d\xi$, 易知 $H(l) = -H(-l)$, $H(l)$ 的计算方法见文献 [4]。容易证明, 基于以上准则设计的 $H(n)$ 对于各个尺度上数字 Hilbert 滤波器都是一样的。如下:

$$H_{\phi_j}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-j} \phi(2^{-j}x - n)(H\phi)(2^{-j}x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-n)(H\phi)(x)dx = H_{\phi_0}(n) \quad (5)$$

以上算法是基于离散小波变换而言的, 对各个子带, 滤波器都是一样的, 对于二进小波的情况, 同样准则下, 情形是不一样的。

$$H_{\phi_j}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-j} \phi(2^{-j}x - 2^{-j}n)(H\phi)(2^{-j}x)dx = H_{\phi_0}(2^{-j}n) \quad (6)$$

同样的, 我们也可以得到当插值函数为小波函数的情形:

$$H_{\psi_0}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-n)(H\psi)(x)dx \quad (7)$$

二进小波方法对应的 Hilbert 滤波器是

$$H_{\psi_j}(n) = H_{\psi_0}(2^{-j}n) \quad (8)$$

同样地, 我们可以得到

$$\begin{aligned} H_{\phi_j}(-n) &= -H_{\phi_j}(n) \\ H_{\psi_j}(-n) &= -H_{\psi_j}(n) \end{aligned} \quad (9)$$

由此可以看出, 对于二进小波滤波器组, 基于图 2 准则, 我们可以计算出各个子带上的数字 Hilbert 滤波器。第 j 个尺度上的数字 Hilbert 滤波器为 0 尺度原型滤波器冲击响应 H_{ψ_0} 插入 2^j 个 0 得到。

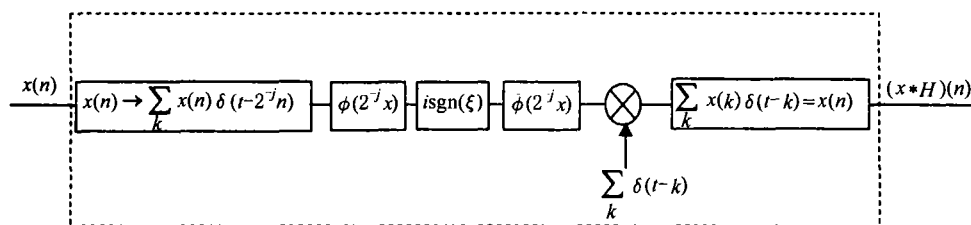


图 2 多尺度 Hilbert 变换数字滤波器设计准则框图 (二进小波情形)

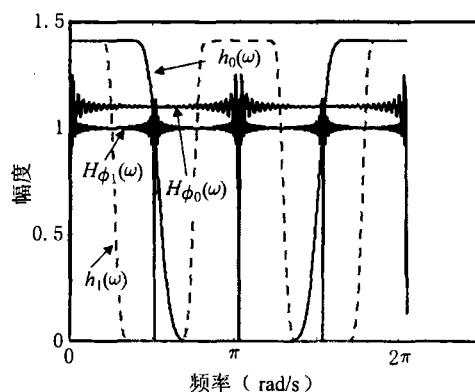


图 3 不同尺度上 Hilbert 滤波器和分析滤波器的幅频响应图

事实上,从图 3 中可以看出,如果对 Hilbert 滤波器的平稳性不做严格要求的话,我们可以在各尺度上使用统一的 Hilbert 滤波器。只是以牺牲一些边缘效应为代价。详细讨论超出本文范围,不详述。

3 信号的多尺度分解和小波滤波器组

3.1 二进小波变换的快速算法

众所周知,小波变换实际上是一种子带变换,即对一信号做多尺度分解。从频域上来说就是一种对频带的划分。

本文中采用的是二进小波变换。先给出如下记法:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{jk}(x) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}(x-k)) \\ \phi_{jk}(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}(x-k)) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于 $f \in L^2(R)$, 记 $T_j f$ 和 $S_j f$ 分别为 f 的二进小波变换和二进尺度函数变换, 记为

$$S_j f(x) = 2^{-j/2} \int f(y) \phi(2^{-j}(y-x)) dy \quad (11)$$

$$T_j f(x) = 2^{-j/2} \int f(y) \psi(2^{-j}(y-x)) dy \quad (12)$$

由上式可以看出, 下述式子可以理解成分解公式:

$$S_j f(k) = \langle f, \phi_{jk} \rangle = \sum_l h_l S_{j-1} f(k - 2^{j-1} l) = \sum_l h_{jl} S_{j-1} f(k - l) \quad (13)$$

$$T_j f(k) = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \sum_l g_l S_{j-1} f(k - 2^{j-1} l) = \sum_l g_{jl} S_{j-1} f(k - l) \quad (14)$$

本文所提算法的表示式可以用图表示如图 4.

事实上, 我们可以清楚地看到我们采用的滤波器设计标准不考虑各子带信号间相互窜扰, 即只考虑映射 $V_j \rightarrow V_j$. 显然, 这是一种近似的表达.

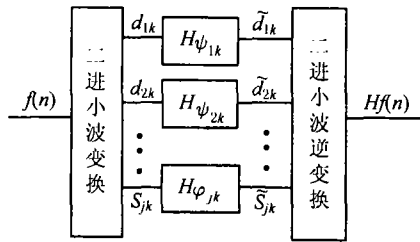


图 4 多尺度 Hilbert 滤波框图

3.2 信号的多尺度分解

我们知道, 尺度函数变换相当于一个低通滤波过程, 而小波变换相当于一个带通滤波过程。我们假设信号 f 的频带是有限的, 即紧支撑的, 在时域上即理解成足够光滑的。那么我们可以认为 $S_j f$ 作为原信号通过低通滤波器的信号是对原信号某种程度的近似。我们有如下定理^[1]。

定理 1 若 $f \in C^r(R)$, 有 $r > L$, 那么有 $S_j f(n) = f(n) + O(2^{jM})$, M 为 Daubechies 类小波的零点数。

定理 1 是本文算法的基础。由定理 1 可以得

$$f(k) = S_{j_0} f(k) + O(2^{j_0 M}) = S_J f(k) + \sum_{j=j_0+1}^J T_j f(k) + O(2^{j_0 M}) \quad (15)$$

由此可得

$$Hf(k) = S_{j_0}(Hf)(k) + O(2^{j_0 M}) \quad (16)$$

这样, 已知 f 求 Hf 的问题可以归结到已知 $S_{j_0} f$ 求 $S_{j_0}(Hf)$ 的问题。由二进小波和滤波器组理论, 可以按塔式分解重构算法得到如下表示 (记 $\frac{1}{2} \tilde{h}_j(k) = \bar{h}_j(k)$):

$$\begin{aligned} S_{j-1} f(k) &= \frac{1}{2} (S_j f * \tilde{h}_j(k) + T_j f * \tilde{g}_j(k)) = S_j f * \bar{h}_j(k) + T_j f * \bar{g}_j(k) \\ &= S_{j+1} f * \bar{h}_{j+1} * \bar{h}_j(k) + T_{j+1} f * \bar{g}_{j+1} * \bar{h}_j(k) + T_j f * \bar{g}_j(k) \end{aligned} \quad (17)$$

这里, $*$ 表示两个序列的离散卷积, 如 $(x * y)(n) = \sum_k x(k) y(n - k)$ 。由此, 我们简记:

$$S_{j_0} f(k) = S_J f * M_J(k) + \sum_{j=j_0+1}^J T_j f * N_j(k) \quad (18)$$

其中 $M_j(k)$, $N_j(k)$ 是与 f 无关的滤波器。(18) 式就是著名的塔式分解算法, 依此式可以将 $S_{j_0}f$ 分解成各个尺度上的分量 S_Jf 和 $T_jf (j_0 < j \leq J)$ 。

在各尺度下分别做 Hilbert 变换, 有

$$P_jf(k) = S_jf * H_{\phi_j}(k), \quad W_jf(k) = T_jf * H_{\psi_j}(k) \quad (19)$$

可以证明 P_jf 和 W_jf 分别是 Hf 在各尺度上的分量 $S_J(Hf)$ 和 $T_j(Hf)$ 。以上式中 $T_j(Hf)$ 为例说明在本文中 $T_j(Hf)(n) = T_jf * H_{\psi_j}(k)$ 。易知

$$T_jf(t) = \sum_k T_jf(k)\psi_{jk} \quad (20)$$

由我们在文中第 2 节提到的数字滤波器的设计准则, 我们按下式对各尺度信号分别做数字 Hilbert 变换, 即 H 作用于 ψ_{jk} 时得

$$H(T_jf)(t) \approx \sum_k T_jf * H_{\psi_j}(k)\psi_{jk} \quad (21)$$

另由 (9) 式和 T_j 的定义得

$$T_j(Hf)(t) \approx \sum_k T_jf * H_{\psi_j}(k)\psi_{jk} \quad (22)$$

由此

$$T_j(Hf)(n) = H(T_jf)(n) = W_jf(k) \quad (23)$$

同理

$$S_j(Hf)(n) = H(S_jf)(n) = P_jf(k) \quad (24)$$

那么多尺度 Hilbert 变换后线性叠加后有:

$$P_Jf * M_J(k) + \sum_{j=j_0+1}^J W_jf * N_j(k) = S_J(Hf) * M_J(k) + \sum_{j=j_0+1}^J T_j(Hf) * N_j(k) \quad (25)$$

由此

$$S_{j_0}(Hf)(k) = S_J(Hf) * M_J(k) + \sum_{j=j_0+1}^J T_j(Hf) * N_j(k) \quad (26)$$

这样, 我们就通过图 4 的多尺度 Hilbert 方法求得了 $S_{j_0}(Hf)(k)$, 在 (16) 式的保证下, 即得到了 Hf 的平滑分量逼近。

因此, 欲求一个信号 f 的 Hilbert 变换, 可以先将信号做二进小波分解, 然后对每一个子带信号分别做 Hilbert 变换, 再合成, 即可得到原始信号的变换结果。

4 实信号瞬时参数的定义

4.1 实信号的局部相位和幅度表示

我们知道, 一个实函数都能用相应的解析函数表示, 更精确的, 可以表示如下:

$$Z_f(x) = f(x) + i[Hf](x) \quad (27)$$

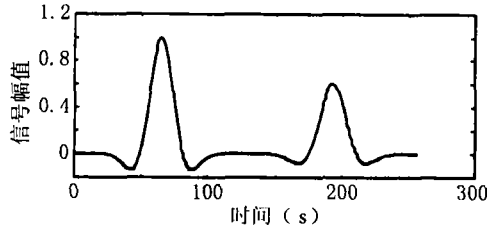


图 5 仿真地震信号

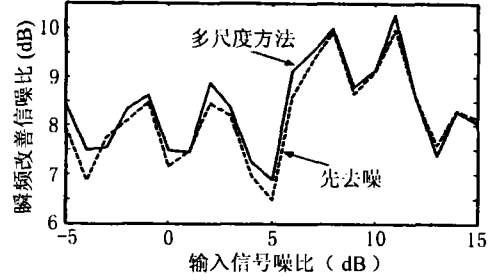


图 6 本文方法与先二进小波方法去噪后提瞬频信噪比对比图

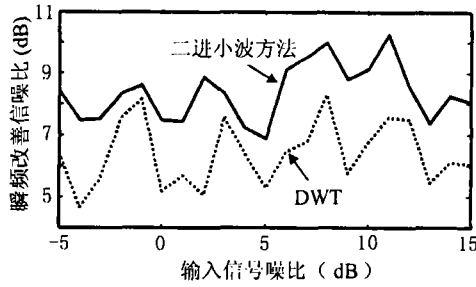


图 7 本文方法与 DWT 方法去噪后提瞬频的信噪比对比图

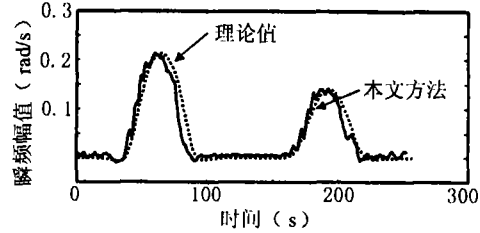


图 8 本文方法计算瞬频与理论值比较 (输入信号信噪比为 30dB)

这样我们得到了实信号 f 对应的解析信号 Z_f , 其中解析信号的虚部是实部的 Hilbert 变换。由此我们可以定义瞬时相位和瞬时振幅:

$$\left. \begin{aligned} A_f(x) &= |Z_f(x)| = \sqrt{f^2(x) + (Hf)^2(x)} \\ \omega_f(x) &= \arg Z_f(x) = \arg((Hf)(x)/f(x)) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

则瞬时频率可以定义成

$$v_f(x) = (1/2\pi)\omega'_f(x) \quad (29)$$

从以上的式子可以看出 Hilbert 变换对于瞬时参数提取的重要性。事实上, 利用解析信号分析信号瞬时参数有许多局限性, 特别是对多分量信号而言, 利用解析信号得到的瞬时频率与传统的傅里叶分析对应的频率概念是不一致的。但对于单分量信号而言, 这个模型还是能反映实际信号特性的。

在后面的实际信号处理中, 我们将采用小波变换中固有去噪方法, 对各个尺度上做去噪处理。本文直接给出各尺度上作变换后合成结果。

5 仿真实验

我们以地震中常用的 Ricker 子波作为仿真信号 (图 5) 来考察本文算法在提取信号瞬时参数方面的应用。这里我们定义几个指标参数: 输入信噪比 ($\text{SNR}_{\text{in}} = \text{std}(s)/\text{std}(sn - s)$), s 为原始输入信号, sn 为含噪信号, 瞬频改善信噪比为 $\text{SNR}_{\text{in}} = \text{std}(\hat{f})/\text{std}(\hat{f} - f) - \text{std}(f)/\text{std}(\tilde{f} - f)$, 这里, f 为不含噪声时用频域方法算出的瞬时频率, $\tilde{f}$ 为含噪时频域方法算出的瞬频, $\hat{f}$ 是用本文方法计算出来的瞬频。本文采用 dB30 小波, 分解层数 5 层, 软门限去噪。

从图 6 可以看出, 本文提出的算法足够精确地逼近频域方法获得的 Hilbert 变换, 且取得跟同类的二进小波变换方法提取瞬频相同的效果。从图 7 则可看出二进小波方法提取瞬频对噪声的敏感程度远低于 DWT 方法, 这正是本文的出发点和重要应用背景之一。图 8 是使用本文的基于二进小波滤波器组的多尺度 Hilbert 滤波方法计算出来的瞬频与理论值的比较, 可以看出该方法是有用的。

6 小 结

本文着重讨论了如何通过改造二进小波滤波器组, 即通过多尺度 Hilbert 滤波的方法来实现求一个信号的 Hilbert 变换。注意到理想 Hilbert 模拟和数字滤波器均不能实现, 着重探讨了本文方法理论上的依据。

因为实信号的 Hilbert 变换的求法是提取实信号瞬频的关键, 因此笔者将本文方法用于提取信号瞬频的应用中, 同时利用小波固有的去噪方法, 得到了良好的去噪效果, 同时也说明了本方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] G. Beylkin, B. Torresani, Implementation of operators via filter banks: Autocorrelation shell and Hardy wavelets, Appl. and Comput. Harmonic Anal., 1996, (3), 164-185.
- [2] J. Gao, X. Dong, W. Wang, Instantaneous parameters extraction via wavelet transform, IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, 1999, GRS-37(3), 265-268.
- [3] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1988, 41(10), 909-996.
- [4] G. Beylkin, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, SIAM J. Numerical. Anal., 1992, 6(12), 1716-1740.

DYADIC WAVELET TRANSFORM BASED REAL SIGNAL MULTISCALE HILBERT TRANSFORM AND EXTRACTION OF INSTANTANEOUS FREQUENCY

Cai Yu Liu Guizhong Hou Xingsong

(*Institute of Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract In this paper, the method for designing digital filters and their implementation and application via filter banks are introduced. The design of digital Hilbert filters of each scale in dyadic wavelet filter banks is particularly discussed. Moreover, this method, which based on multiscale Hilbert filtering methods, is applied to the extraction of the instantaneous frequency and obtains a better denoising result compared with the traditional DWT denoising method.

Key words Dyadic wavelet transform, Digital Hilbert filter, Multiscale

蔡 毓: 男, 1977 年生, 硕士生, 研究兴趣为语音信号处理, 时频分析。
刘贵忠: 男, 1962 年生, 教授、博士生导师, 研究领域为非平稳信号信号分析及图像视频压缩方面的应用。
侯兴松: 男, 1972 年生, 博士生, 研究兴趣为图像压缩等。