一种频域卷积反演的新方法 [1]

王岩飞
(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘 要 本文提出了一种卷积反演的新方法。这种方法也是通过离散傅里叶变换 (DFT) 在频域实现的，但是避免了通常所用的离散傅里叶变换方法当位于分母位置的信号频谱有零点存在时计算失效的问题。本文讨论了新方法与普通离散傅里叶变换方法之间的关系，并且给出了计算示例。

关键词 信号处理，卷积反演，信号恢复

中图号 TN911.72

1 引 言

在信号处理问题中经常遇到卷积反演的问题，即根据已知系统的输入和输出信号求解系统的冲击响应函数，或者根据已知的系统冲击响应函数和系统的输出信号求解系统的输入激励信号。通常可以表示为已知

$$g(n) = h(n) * f(n), \tag{1}$$

由 $f(n)$ 和 $g(n)$ 求解 $h(n)$ ，或者由 $h(n)$ 和 $g(n)$ 求解 $f(n)$ 。这里 $f(n)$ 为输入信号， $g(n)$ 为输出信号， $h(n)$ 为系统的冲击响应函数。这两种情况在数学上的表示是互相等效的。通常对于卷积反演问题是利用离散傅里叶变换（ DFT ） 的方法来求解的 [1] 。对 (1) 式做离散傅里叶变换可以得到

$$G(k) = H(k)F(k). \tag{2}$$

对于求解 $h(n)$ ，则有

$$H(k) = G(k)/F(k), \tag{3}$$

式中 $G(k)$ ， $H(k)$ 和 $F(k)$ 分别是信号 $g(n)$ ， $h(n)$ 和 $f(n)$ 的离散傅里叶变换。对 (3) 式的 $H(k)$ 做离散傅里叶逆变换（ IDFT ） 即可得到 $h(n)$ 。这种算法可以利用快速傅里叶变换 (FFT) 算法，使得求解过程简单方便，并且计算量也比较小，是在实际应用中常用的方法之一。然而，这种方法具有一定的局限性。从 (3) 式中可以看出，当 $f(n)$ 的离散傅里叶变换 $F(k)$ 有零点存在时， $H(k)$ 的求解将变得没有意义。当这种情况出现时，卷积反演问题的求解不能再采用上述频谱相除的方法，一般采用一些变通的方法，例如迭代方法、时域反卷积方法等 [2-4] 。这些方法从不同的角度解决了 $F(k)$ 有零点的问题，但同时也遇到了计算繁琐、运算量大、以及收敛速度慢等问题。

[1] 1994-04-05 收到， 1994-07-13 定稿

本文将给出一种新的频域卷积反演方法。这种方法仍然通过离散傅里叶变换在频域实现卷积反演，但是不象普通的离散傅里叶变换方法那样在频域将频谱相除，而是通过充分利用离散傅里叶变换本身的时域和频域特性来解决 $F(k)$ 有零点的问题。所给方法的运算比较简单，并且计算量也接近于普通的频域反卷积计算方法。

2 频域卷积反演新算法

不失一般性，假设 $g(n)$ 和 $f(n)$ 为有限长度序列，其长度分别为 N_g 和 N_f ，则 $h(n)$ 的长度为 $N_h = N_g - N_f + 1$ 。取 $N = N_h N_f$ ，对于 $g(n)$ 和 $f(n)$ 分别以零补齐到 N ，并分别做离散傅里叶变换得到 $G(k)$ 和 $F(k)$ 如下[1]：

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-j2\pi nk/N), \qquad k = 0, 1, \cdots N-1, \tag{4}$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j2\pi nk/N), \qquad k = 0, 1, \cdots N-1, \tag{5}$$

由于离散傅里叶变换的变换矩阵为满秩矩阵，并且 $f(n)$ 的长度为 N_f ，所以 $F(k)$ 最多只能有 $N_f - 1$ 个零点。令 $F'(k)$ 和 $F_e(k)$ 分别如下：

$$F'(k) = \prod_{m=1}^{N_h-1} F(k + mN_f), \tag{6}$$

$$F_e(k) = F(k)F'(k) = \prod_{m=0}^{N_h-1} F(k + mN_f). \tag{7}$$

因为 $F(k)$ 最多只能有 $N_f - 1$ 个零点，所以 $F_e(k)$ 最多只能有 $N_h(N_f - 1)$ 个零点，即 $F_e(k)$ 在 $k = 0$ 至 $N_h N_f - 1$ 内不全为零。又由于

$$F(k + mN_f) = F(k + mN_f|\mathrm{mod}(N)), \tag{8}$$

所以有

$$F_e(k) = F_e(k + mN_f), \quad m = 0, 1, \cdots N_h - 1, \quad k = 0, 1, \cdots N_f - 1. \tag{9}$$

对 $F_e(k)$ 做离散傅里叶逆变换得到 $f_e(n)$ 如下：

$$\begin{aligned} f_e(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_e(k)\exp(j2\pi nk/N), \qquad n = 0, 1, \cdots N-1, \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N_f-1}\sum_{m=0}^{N_h-1} F_e(k)\exp[j2\pi n(k + mN_f)/N] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N_f-1} F_e(k)\exp(j2\pi nk/N)\sum_{m=0}^{N_h-1}\exp(j2\pi nmN_f/N) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N_f-1} F_e(k)\exp(j2\pi nk/N)\left[\frac{1-\exp(j2\pi nN_hN_f/N)}{1-\exp(j2\pi nN_f/N)}\right], \tag{10}$$

由上式可知，当 $n = iN_h$ ，$(i = 0, 1, \cdots N_f - 1)$ 时，$f_e(n)$ 的值不为零；当 n 为其它值时，$f_e(n) = 0$ 。由于 $g(n) = h(n) * f(n)$ ，将 $F'(k)$ 的离散傅里叶逆变换 $f'(n)$ 在等式的两端相卷积可得

$$\begin{aligned} h'(n) &= f'(n) * g(n) \\ &= f'(n) * f(n) * h(n) \\ &= f_e(n) * h(n) \end{aligned} \tag{11}$$

因为 $h(n)$ 的长度为 N_h，而 $f_e(n)$ 是间隔 N_h-1 个零点的系列，所以 $g(n)*f'(n)$，即 $f_e(n)*h(n)$ 在 $0\sim N_h-1, N_h\sim 2N_h-1, \cdots, (N_f-1)N_h\sim N_fN_h-1$ ，的 N_f 个区间里分别为 $c_ih(n)$ ，$(n = 0, 1, \cdots, N_h - 1)$ 。c_i 由 $f_e(n)$ 决定为，$c_i = f_e(iN_h)$ ，$(i = 0, 1, \cdots, N_f - 1)$ 。这样就可以在 N_f 个区间里得到 N_f 组 $h(n)$ 的解。总结上述的分析可将卷积反演算法归纳为以下步骤：

(1) 取 $N \geq N_fN_h$ 。

(2) 分别对 $g(n)$ 和 $h(n)$ 进行离散傅里叶变换得到 $G(k)$ 和 $F(k)$ 。

(3) 根据 (6) 式和 (7) 式求出 $F'(k)$ 和 $F_e(k)$ 。

(4) 求出 $G(k)F'(k)$ 。

(5) 对 $G(k)F'(k)$ 和 $F_e(k)$ 分别做离散傅里叶逆变换得到 $h'(n)$ 和 $f_e(n)$ 。

(6) 由 $h'(n)$ 可以得到在 $0\sim N_h-1, N_h\sim 2N_h-1, \cdots, (N_f-1)N_h\sim N_fN_h-1$ 的 N_f 个区间里以 $f_e(iN_h)$ ，$(i = 0, 1, \cdots, N_f - 1)$ 加权的 N_f 组 $h(n)$ 的解。

3 普通傅里叶变换和本文方法的关系

在上面的讨论中，我们给出的卷积反演方法可以得到多组 $h(n)$ 的解，这些解的差别表现在不同的常数加权因子上。这里我们来考虑将得到的多组解做平均可以得到下式：

$$\overline{h(n)} = \sum_{m=0}^{N_f-1} h'(n - mN_h), \qquad n = 0, 1, \cdots, N_h - 1. \tag{12}$$

将上式转换到频域可以表示为

$$\begin{aligned} \overline{H(k)} &= \frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N_f-1} H(k)F_e(k)\exp(-j2\pi mN_hk/N)\right]\left[\sum_{l=0}^{N_h-1}\exp(-j2\pi lk/N)\right] \\ &= \frac{N_f}{N}\left[H(k)F_e(k)\sum_{i=0}^{N_h-1}\delta(k - iN_f)\right]\left[\sum_{l=0}^{N_h-1}\exp(-j2\pi lk/N)\right] \\ &= \frac{N_f}{N}\sum_{l=0}^{N_h-1}\exp(-j2\pi lk/N)\sum_{i=0}^{N_h-1}F_e(0)H(iN_f)\exp(j2\pi liN_f/N) \end{aligned}$$

$$= \frac{N_f}{N} F_e(0) \sum_{l=0}^{N_h-1} \exp(-j2\pi lk/N) \sum_{i=0}^{N_h-1} \sum_{n=0}^{N_h-1} h(n) \exp(-j2\pi niN_f/N) \exp(j2\pi liN_f/N)$$

$$= \frac{N_f N_h}{N} F_e(0) \sum_{l=0}^{N_h-1} h(l) \exp(-j2\pi lk/N)$$

$$= F_e(0) H(k). \tag{13}$$

从上面的推导可以看出，由本方法得到的解的平均解实际上也就是普通傅里叶变换方法所得到的解。在这一平均解中，是以 $F_e(0)$ 作为权因子的，这种情况下要求 $F_e(0)$ 不等于零。同样在对 (12) 式进行平均叠加时，如果分别加权于不同的相位因子则可以得到以 $F_e(k),(k=0,1,\cdots,N_h-1)$ 作权的普通的傅里叶变换方法的解。在 (6) 式和 (7) 式中如果取 $N_f=1$，$N_h=N$，可以得到

$$F'(k) = \prod_{m=1}^{N-1} F(k+m), \tag{14}$$

$$F_e(k) = F(k)F'(k) \prod_{m=0}^{N-1} F(k+m) = \prod_{m=0}^{N-1} F(m). \tag{15}$$

在这种情况下 $F_e(k)$ 是常数，上面所讨论的以 $F_e(k)$ 作权的各组解都相同，并且也就是普通傅里叶变换方法的解。但是当 $f(n)$ 的频谱 $F(k)$ 有零点存在时，普通的傅里叶变换方法失效；而由上面的讨论可知，本文给出的方法总可以保证解的存在。

作为示例，我们来考虑下述卷积反演问题。假设待求的 $h(n)$ 为

$$h(n) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,$$

因此当输入信号是

$$f(n) = 1,\ -2,\ 3,\ -2$$

时，输出信号为

$$g(n) = 1,\ -1,\ 2,\ 0,\ -1,\ 1,\ -2.$$

根据本文给出的方法，取 $N=16$，按照本文第 2 节步骤 (1) 至步骤 (6) 的计算可以得到 $h'(n)$ 和 $f_e(n)$ 分别如表 1 所示：

表 1

n	$f_e(n)$	$h'(n)$	n	$f_e(n)$	$h'(n)$
0	1.000000	1.000000	8	17.000000	17.000000
1	0.000000	1.000000	9	0.000000	17.000000
2	0.000000	1.000000	10	0.000000	17.000000
3	0.000000	1.000000	11	0.000000	17.000000
4	−2.000000	−2.000000	12	−16.000000	−16.000000
5	0.000000	−2.000000	13	0.000000	−16.000000
6	0.000000	−2.000000	14	0.000000	−16.000000
7	0.000000	−2.000000	15	0.000000	−16.000000

从上面计算的结果可以看出，所求的 $h(n)$ 为 $(1, 1, 1, 1)$，并分别被 1，−2，17 和 −16 加权得到四组解。如果将这四组解相加求平均则得到的结果为 $(0, 0, 0, 0)$，这是由于 $f(n)$ 的傅里叶变换 $F(k)$ 在 $k=0$ 处有零点所引起的。当用普通的傅里叶变换方法进行卷积反演时，由于 $F(k)$ 在分母的位置上有零点出现，所以不能保证解的存在。而利用本文给出的方法时，所涉及的计算只是频域的乘法及正逆傅里叶变换，始终可以保证有效的计算，所以反卷积解总是存在的。

4 结束语

本文给出了从频域进行卷积反演的新方法。一方面它可以等效于传统的傅里叶变换方法；另一方面又避免了普通的傅里叶变换方法由于频谱有零点而失效的问题。本文给出的卷积反演方法总可以保证解的存在，并且方法本身简单易行，计算量可以同普通的傅里叶变换方法相类比。

参 考 文 献

[1] Oppenheim A V, *et al.* Discrete Time Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc. 1989, chapter 8.

[2] Sarkar T K, *et al.* IEEE Trans. on AP, 1982, AP-30(4): 657–663.

[3] Schafer R W, *et al.* Proc. IEEE, 1981, 69(4): 432–450.

[4] 孔凡年. 电子学报，1985, 13(4): 8–13.

A NEW METHOD OF DECONVOLUTION IN THE FREQUENCY DOMAIN

Wang Yanfei

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract A new method of deconvolution in the frequency domain is proposed. The relationship between the proposed method and traditional Discrete Fourier Transform(DFT) method is also discussed. It can be seen from this paper that the new method based on the DFT techniques can overcomes the difficulties of using traditional frequency methods to do deconvolution, and the deconvolution problem can always be solved with the new method because there are only DFT, IDFT and multiplication calculations. An example is also presented to illustrate the calculation of the method.

Key words Signal processing, Deconvolution, Signal restoration

王岩飞：男，1963 年生，副研究员，主要研究方向包括信号及信息处理和应用.