一种改进的临界采样 Gabor 变换方法 [1]

王 俊　　张守宏　　焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要　利用对过采样 Gabor 变换系数的去冗余化设计，得到一种改进的临界采样 Gabor 变换。在这种改进的临界采样 Gabor 变换方法中，综合函数与分析函数可以同时具有良好的时频局域性及正则性，而其计算量则与一般的临界采样 Gabor 变换相当。

关键词　临界采样，Gabor 变换，时频局域性

中图号　TN911.7

1 引 言

Gabor 变换是一种在时间频率混合空间描述信号的非正交展开 [1−3]。在 Gabor 分析中，为了与信号的局域化特性相适应，分析函数 $g(t)$ 常常取为时频有限支撑的函数，例如高斯函数即为一种在时间和频率上都具有较好分析性能的窗函数。然而在临界采样情况下，我们难以找到它的一个对偶的综合函数 $\gamma(t)$，使得 $\gamma(t)$ 也具有相同的特性 [4−6]。换句话说，如果分析函数是一个具有较好的时频局域性和正则性的函数，那么其对偶函数则是一个无限支撑且不连续的函数 (能量可能还会无穷大)。采用过采样的 Gabor 变换可以部分地解决这一问题。然而，随着过采样率的提高，Gabor 展开系数的冗余性增加且计算的复杂度加大，在某些应用中可能会得不偿失。针对这一问题本文通过对过采样 Gabor 变换进行去冗余设计而得到一种改进的临界采样 Gabor 变换方法，其计算量与传统的临界采样 Gabor 变换相当，却保留了过采样 Gabor 变换的特点，如分析和综合函数可以同时具有良好的时频局域性及正则性。

2 去冗余设计方法

一般可将 Gabor 变换关系写为下式：

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}\,g(t-n\Delta)\exp[j2\pi m(t-n\Delta)/(\alpha\Delta)] \\ C_{m,n} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\gamma^*(t-na)\exp[-j2\pi m(t-n\Delta)/(\alpha\Delta)]\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 Δ 为采样速率，$\alpha=1$ 为临界采样 Gabor 变换，$\alpha>1$ 为过采样 Gabor 变换，而 $\alpha<1$ 为欠采样的情况，此时 (1) 式的变换关系是不成立的。在下面的讨论中，我们用 $\alpha=2$ 为过采样情况来进行讨论。

去冗余化设计的目的是既保持过采样 Gabor 变换较好的时频局域分析性能，又使得在一定的条件下利用部分的展开系数就可以重构原信号。它相当于消除过采样 Gabor 变换系数中部分或全部冗余项而不影响信号重构。因此，在过采样情况下可将 (1) 式变为

$$\begin{aligned} f(t) = &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}\,g(t-n\Delta)\exp[j2\pi m(t-n\Delta)/2\Delta)] \\ &+\sum_{m=-\infty}^{0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}\,g(t-n\Delta)\exp[j2\pi m(t-n\Delta)/(2\Delta)] \end{aligned} \tag{2}$$

[1] 2000-02-03 收到，2000-10-09 定稿
国家自然科学基金资助

注意到 (2) 式的右端与 (1) 式仅相差一个系数因子 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{0,n} g(t-n\Delta)$ ，可以看作该系数复用的情况。将 (2) 式化简，得

$$f(t)=2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{m,n} g(t-n\Delta)\cos(\pi m(t-n\Delta)/\Delta) \tag{3}$$

其中

$$C_{m,n}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\gamma(t-n\Delta)\cos(\pi m(t-n\Delta)/\Delta)\mathrm{d}t \tag{4}$$

若令 $m'=m+1/2, n'=n+1/2$ ，则 (3) ， (4) 式可写为

$$f(t)=\sqrt{2}\sum_{m'=0}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty} C_{m',n'} g(t-n'\Delta)\cos\{\pi(2m'+1)[2t-(2n'+1)\Delta]/(4\Delta)\} \tag{5}$$

$$C_{m',n'}=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\gamma(t-n'\Delta)\cos\{\pi(2m'+1)[2t-(2n'+1)\Delta]/(4\Delta)\} \tag{6}$$

其中 $\sqrt{2}$ 为归一化系数。为保证 (5) ， (6) 式为一有效的 Gabor 变换，需要满足如下条件：

定理　$\forall g(t)\in L^2(R)$ ，若存在函数 $\gamma(t)$ 满足如下似正交条件：

$$\sum_{n} g(t-n\Delta)\gamma(t-n\Delta-2m\Delta)=\delta(m)/(2\Delta) \tag{7}$$

其中 $\gamma(t)$ 可由如下的最小能量解给出 [3]

$$\gamma(t)=\sum_{m}\beta_m(t)g(t-2m\Delta) \tag{8}$$

$\beta_m(t)$ 为一周期函数，周期为 Δ ，则 (5) ， (6) 式构成有效的 Gabor 变换对，且 $g(t)$ 的对偶函数即为 $\gamma(t)$ 。

证明　将 (6) 式代入 (5) 式并记 m', n' 为 m, n ，经过简单的整理，有

$$\begin{aligned}f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-n\Delta)\int f(\tau)\gamma(\tau-n\Delta)\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{&\cos[\pi(2m+1)(\tau-t)/(2\Delta)]\\ &+[\cos\pi(2m+1)[t+\tau-(2n+1)\Delta]/(2\Delta)]\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{9}$$

将 (9) 式求和号中的三角函数写为指数形式，并利用 Poisson 求和公式，可得

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\cos[\pi(2m+1)(t-\tau)/(2\Delta)]=&\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[i(2m+1)(t-\tau)\pi/(2\Delta)](1+\exp[-i(t-\tau)\pi/\Delta])\\ &+\frac{1}{2}\exp[-i(t-\tau)\pi/(2\Delta)]=\Delta\sum_{m}(-1)^m\delta(t-\tau-2m\Delta)\end{aligned} \tag{10}$$

同理，有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left\{\pi(2m+1)[t+\tau-(2n+1)\Delta)]/(2\Delta)\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\sin[\pi(2m+1)(t+\tau)/(2\Delta)]$$
$$=\frac{1}{2i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\exp\{i\pi(2m+1)(t+\tau)/(2\Delta)\}\{1-\exp[-i\pi(t+\tau)/\Delta]\}$$
$$+\frac{1}{2i}(-1)^n\exp[-i\pi(t+\tau)/\Delta]=\Delta\sum_m(-1)^{m+n}\delta(t+\tau-2m\Delta-\Delta) \tag{11}$$

将 (10), (11) 式代入 (9) 式，可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(t-n\Delta)\int f(\tau)\gamma(\tau-n\Delta)\sum_{m=0}^{\infty}\{\cos(2m+1)(\tau-t)/(2\Delta)$$
$$+\cos\pi(2m+1)[t+\tau-(2n+1)\Delta]/(2\Delta)\}\mathrm{d}\tau$$
$$=\Delta\sum_m(-1)^m f(t-2m\Delta)\sum_n g(t-n\Delta)\gamma(t-n\Delta-2m\Delta)$$
$$+\Delta\sum_m(-1)^m f(t-2m\Delta)\sum_n g(t-n\Delta)\gamma(-t-n\Delta-2m\Delta) \tag{12}$$

由 (7) 式知上式中第 1 项即为 $f(t)$，而由条件 (8) 式，上式中的第 2 项为

$$\Delta\sum_m(-1)^m f(t-2m\Delta)\sum_n g(t-n\Delta)\gamma(t-n\Delta-2m\Delta)=\Delta\sum_m(-1)^m f(t-2m\Delta)$$
$$\times\sum_n\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k(-t-k\Delta-2m\Delta)(-1)^n g(t-n\Delta)g(-t-n\Delta-2(m-k)\Delta) \tag{13}$$

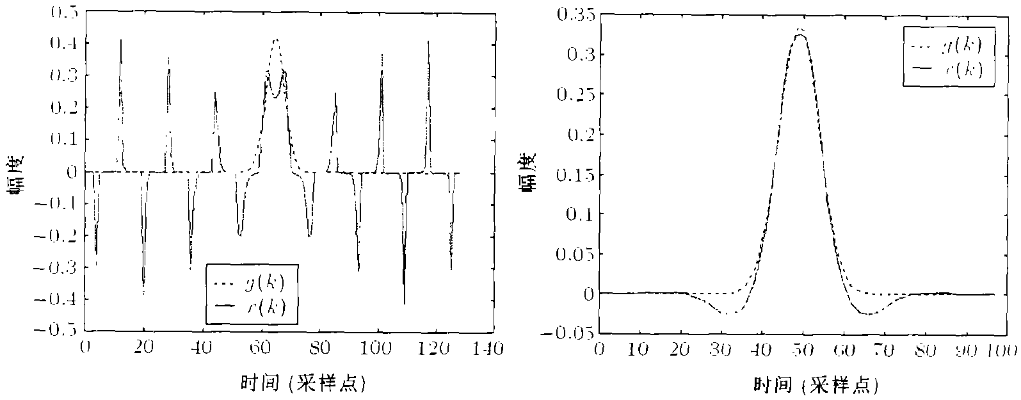
由 $g(t)$ 为有限支撑，有 $g(t-n\Delta)g(-t-n\Delta-2(m-k)\Delta)=0$，上式右端为 0，定理得证。

(8) 式中的函数 $\beta_m(t)$ 可利用下面的递推公式计算 [2,3] ：

$$\left.\begin{aligned}\beta_m(t)&=-\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i(t)\cdot\sum_n g(t-n\Delta-2i\Delta)g^*(t-n\Delta-2m\Delta)\Big/\sum_n|g(t-n\Delta-2m\Delta)|^2\\ \beta_0(t)&=1\Big/\left[2\Delta\sum_n|g(t-n\Delta)|^2\right]\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

3 数值仿真结果

取分析函数 $g(t)$ 为高斯函数，即 $g(t)=e^{-t^2/2\sigma^2}$ ，则图 1(a) 给出了利用传统临界采样 Gabor 变换方法得到的对偶函数 $\gamma(t)$ 。图 1(b) 给出了改进的临界采样 Gabor 变换方法计算得到的对偶函数 $\gamma(t)$ 。结果表明由于采用了去冗余的设计方法，分析和综合函数均具有良好的时频局域化特性及较高的正则度。



(a) 临界采样情况　　(b) 改进方法

图 1　高斯分析函数 $g(t)$ 及其对偶函数 $\gamma(t)$, $\sigma^2 = 25$

4 结 论

本文利用对 2 倍率过采样 Gabor 变换系数的去冗余化设计，得到一种改进的临界采样 Gabor 变换方法，在这种改进的临界采样 Gabor 变换方法中，综合函数与分析函数可以同时具有良好的时频局域性及正则性，而其计算量则与传统的临界采样 Gabor 变换相当。

参 考 文 献

[1] J. M. Morris, Y. Lu, Discrete Gabor expansion of discrete time signals in $L^2(\mathrm{Z})$ via frame theory, Signal Processing, 1994, 40(3), 155–181.

[2] Y. Lu, J. M. Morris, Fast computation of Gabor functions, IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(3), 75–78.

[3] 张贤达，保 铮，非平稳信号分析与处理，北京，国防工业出版社， 1998, 109–153.

[4] I. Daubechies, The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, IEEE Trans. on IT, 1990, 36(5), 961–1005.

[5] M. Zibulski, Y. Zeevi, Oversampling in Gabor scheme, IEEE Trans. on SP, 1993, 41(8), 2679–2683.

[6] J. Wexler, S. Raz, Discrete Gabor expansion, Signal Processing, 1990, 21(3), 207–220.

[7] 薛健，袁保宗，离散拟正交 Gabor 展开，电子学报， 1997, 25(4), 68–71.

AN IMPROVED CRITICAL SAMPLING GABOR TRANSFORM

Wang Jun　　Zhang Shouhong　　Jiao Licheng

(*Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an* 710071, China)

Abstract　By removing redundance from oversampling Gabor transform, an improved critical sampling Gabor transform is presented where its synthesis and analysis function possess favorable local properties and regularity simultaneously, while computation complexity of Gabor coefficient as much as that of conventional critical sampling Gabor transform.

Key words　Critical sampling, Gabor transform, Time-frequency local properties

王　俊：　男， 1969 年生，博士，副教授，研究方向为时频分析，数字信号处理及检测.
张守宏：　男， 1938 年生，教授，博士生导师，中国电子学会高级会员，研究方向为雷达系统及信号处理.
焦李成：　男， 1959 年生，教授，博士生导师， IEEE 高级会员，研究方向为智能信号处理.