

基于多级维纳滤波器的信号子空间拟合算法

黄 磊 吴顺君 张林让

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要: 提出一种信号子空间拟合的新方法。推导出信号子空间拟合一个新的基本公式,进而建立信号子空间拟合一个新的准则函数。分析表明,信号子空间可以由多级维纳滤波器的若干个匹配滤波器有效地构成,而且匹配滤波器只需要多级维纳滤波器的若干步前向递推,所以该方法具有小运算量和低复杂度的特点。最后,计算机仿真验证了该方法的有效性。

关键词: 波达方向, 信号子空间拟合, 降维, 多级维纳滤波器

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)08-1197-04

Signal Subspace Fitting Based on the Multi-stage Wiener Filter

Huang Lei Wu Shun-jun Zhang Lin-rang

(Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract A new method for signal subspace fitting is presented. Firstly, a novel criterion of signal subspace fitting is derived. It is shown that the correct knowledge of the number of signals is unnecessary since the columns of the signal subspace can be much lower than the number of signals. The proposed method does not resort to the estimate of the covariance matrix or its eigendecomposition, thereby implying much lower computational complexity. Finally, the effectiveness of the proposed approach is verified by numerical results.

Key words Direction Of Arrival (DOA), Signal subspace fitting, Rank reduction, Multi-Stage Wiener Filter (MSWF)

1 引言

参数化的子空间方法(如信号子空间拟合和噪声子空间拟合)具有与最大似然方法相同的统计性能,但其运算量比最大似然方法小,因而引起广泛的研究兴趣^[1-2]。遗憾的是,参数化的子空间方法也需要估计信号子空间或者噪声子空间,通常的估计方法是采用特征值分解或奇异值分解技术。这两种技术所需的运算量均为 $O(M^3)$,其中 M 是阵列的阵元个数。如果阵元数较多的话,协方差矩阵是高阶的,对其作特征值分解的运算量是相当大的。

已有很多学者提出比较有效的信号子空间估计方法,Xu提出一种基于Lanczos算法的快速子空间分解方法^[3],但是仍然需要 $O(M^2P)$ 次复数相乘,其中 P 是信源数。显然,当阵元数较多时,这种算法的运算量仍然很大。Witzgall等人提出了一种基于多级维纳滤波器(MSWF)^[4]的降阶相关核方法估计信号矢量,即所谓的ROCK MUSIC技术^[5]。但是,ROCK MUSIC方法需要多级维纳滤波器的后向递推。鉴于上述的问题,本文提出一种信号子空间拟合的新方法。该方法不需要估计阵列数据的协方差矩阵和对高阶矩阵作特征值分解,所以运算量大大减少,能够对相干信源作超分辨估

计,而且本方法只需要MSWF的若干步前向递推,从而能够有效地降低算法的复杂度。

2 信号模型

假设阵列是阵元数为 M 的等距线阵(ULA),则阵列在 k 时刻接收的 M 维观测数据矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(k) &= [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_P)] \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{s}(k) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$, $\mathbf{n}(k) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times P}$ 分别为信源复振幅矢量,噪声复矢量和 $M \times P$ 阶方向矩阵, $k=0,1,\dots,N-1$ 是采样时刻, N 是快拍数, P 是信源数。导向矢量具有如下的结构:

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\varphi(\theta_i)} & \cdots & e^{j(M-1)\varphi(\theta_i)} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

其中 $\varphi(\theta_i) = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_i)$, $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$, 且 $\theta_i \neq \theta_j (i \neq j)$, d 表示阵元间距, λ 是载波波长, T 表示转置。本文的所有讨论均假设阵元数大于信源数,即 $M > P$,而且 P 是先验已知的。加性噪声是均值为零的空时均白的复圆高斯随机过程,则有

$$E[n(k)n^H(l)] = \sigma_n^2 \delta_{k,l} \quad \text{和} \quad E[n(k)n^T(l)] = 0 \quad (3)$$

其中 $k, l = 0, 1, \dots, N-1$ 。假设信号和噪声是不相关的, 所以 $x_0(k)$ 也是复高斯随机过程, 而且其协方差矩阵:

$$R_{x_0} = E[x_0(k)x_0^H(k)] = A(\theta)R_sA^H(\theta) + \sigma_n^2 I_{M \times M} \quad (4)$$

是 Hermite 矩阵。波达方向估计的问题就是从观测数据 $\{x_0(k), k=0, 1, \dots, N-1\}$ 中估计出方向参数 $\{\theta_i, i=1, 2, \dots, P\}$ 。

3 信号子空间拟合

3.1 经典的信号子空间拟合

对式(4)的协方差矩阵作特征值分解, 即

$$R_{x_0} = V_s \Lambda_s V_s^H + V_n \Lambda_n V_n^H \quad (5)$$

其中 $\Lambda_n = \sigma_n^2 I$ 。在一般的情况下, V_s 的列数等于信源协方差矩阵 R_s 的秩 P' , 从而其张成 $A(\theta)$ 的 P' 维子空间。这里 P' 表示独立信源的个数。由式(4)和式(5)则有如下关系:

$$V_s = A(\theta)T \quad (6)$$

其中 $T \in \mathbb{C}^{P \times P'}$ 是列满秩矩阵。上式构成经典信号子空间拟合的基础。如果用估计的 $\hat{V}_s$ 替代理论的 V_s , 上面的等式则不成立, 此时我们可以使 $\hat{V}_s$ 与 $A(\theta)T$ 之间的某距离的测度最小, 则有如下经典的信号子空间拟合问题:

$$\{\hat{\theta}, \hat{T}\} = \arg \min_{\theta, T} \|\hat{V}_s - A(\theta)T\|_F^2 \quad (7)$$

其中 $T \in \mathbb{C}^{P \times P'}$ 是不感兴趣的参数。类似于确定性最大似然准则, 式(7)是一个可分离的最小二乘问题, 从而可以把参数 T 去除, 并对信号特征矢量加权, 则加权的信号子空间拟合为

$$\hat{\theta}_{\text{WSF}} = \arg \min_{\theta} \left\{ \text{tr} \left(P_A^\perp \hat{V}_s W \hat{V}_s^H \right) \right\} \quad (8)$$

其中 $P_A^\perp = I - A(\theta)[A^H(\theta)A(\theta)]^{-1}A^H(\theta)$, 加权矩阵 W 的最优解为^[1] $W_{\text{opt}} = (A_s - \sigma_n^2 I)^2 A_s^{-1}$ 。

3.2 一种信号子空间拟合的新方法

Goldstein 等人提出的多级维纳滤波器在最小均方的意义下得到 Wiener-Hopf 方程 $R_{x_0} w_{\text{wf}} = r_{x_0 d_0}$ 的渐近最优解 $w_{\text{opt}} = R_{x_0}^{-1} r_{x_0 d_0}$ 。与其它的降维技术相比, MSWF 具有运算量小, 收敛速度快, 能应用在小样本支撑的信号环境中等突出优点。基于相关相减结构的多级维纳滤波器(CSS-MSWF)的算法^[6]如下所示:

步骤 1 初始化: $d_0(k)$ 和 $x_0(k)$

步骤 2 前向递推: For $i=1, 2, \dots, M$

$$h_i = E[d_{i-1}^*(k)x_{i-1}(k)] / \left\| E[d_{i-1}^*(k)x_{i-1}(k)] \right\|_2$$

$$d_i(k) = h_i^H x_{i-1}(k)$$

$$x_i(k) = x_{i-1}(k) - h_i d_i(k)$$

步骤 3 后向递推 $\varepsilon_M(k) = d_M(k)$, For $i=M, M-1, \dots, 1$

$$w_i = E[d_{i-1}^*(k)\varepsilon_i(k)] / E[\varepsilon_i(k)^2]$$

$$\varepsilon_{i-1}(k) = d_{i-1}(k) - w_i^* \varepsilon_i(k)$$

CSS-MSWF 的结构框图如图 1 所示, 其中虚线表示 MSWF 每级的基本模块, 且 $D \leq M$ 。

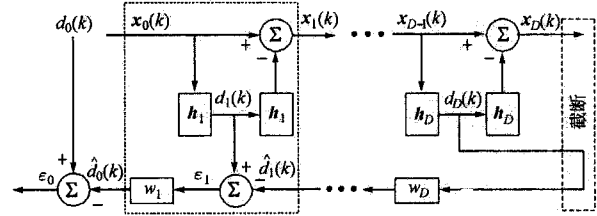


图1 CSS-MSWF 的结构框图

由多级维纳滤波器前 M 个相互正交的匹配滤波器构成的预滤波矩阵为 $T_M = [h_1, h_2, \dots, h_M] \in \mathbb{C}^{M \times M}$ ^[7]。由于每级的匹配滤波器 h_i 最大化相邻级期望信号的相关性, 而阻塞矩阵 $B_i = I - h_i h_i^H$ 使得相隔各级的期望信号不相关, 所以经过预滤波的协方差矩阵是三对角矩阵:

$$T_M^H R_{x_0} T_M = \begin{bmatrix} \sigma_{d_0}^2 & \delta_1^* & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1 & \sigma_{d_1}^2 & \delta_2^* & \ddots & \vdots \\ 0 & \delta_2 & \sigma_{d_2}^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta_{M-1}^* \\ 0 & \dots & 0 & \delta_{M-1} & \sigma_{d_{M-1}}^2 \end{bmatrix} \triangleq D \quad (9)$$

其中 $\sigma_{d_i}^2 = E[|d_i|^2]$, $i=0, 1, \dots, M-1$ 是各级期望信号的功率, $\delta_i = E[d_{i-1}(k)d_i^*(k)]$, D 是一个三对角矩阵。

由于所有的匹配滤波器是正交归一化的, 所以预滤波矩阵 T_M 是酉矩阵。于是, 由式(9)得到

$$R_{x_0} = T_M D T_M^H \quad (10)$$

由式(4)和式(10)得

$$\begin{aligned} A R_s A^H + \sigma_n^2 I &= T_M D T_M^H = \\ [T_s; T_n] &\begin{bmatrix} D_s & \vdots & 0_{(P-1) \times 1} & 0_{(P-1) \times (M-P-1)} \\ \vdots & \ddots & \delta_p^* & 0_{1 \times (M-P-1)} \\ 0_{1 \times (P-1)} & \delta_p & \vdots & \vdots \\ 0_{(M-P-1) \times (P-1)} & 0_{(M-P-1) \times 1} & \vdots & D_n \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} T_s^H \\ \vdots \\ T_n^H \end{bmatrix} &= T_s D_s T_s^H + T_n \begin{bmatrix} \vdots & 0 & \delta_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} T_s^H + T_s \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \delta_p^* & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} T_n^H \\ + T_n D_n T_n^H &= T_s D_s T_s^H + T_n D_n T_n^H + \delta_p h_{p+1} h_p^H + \delta_p^* h_p h_{p+1}^H \end{aligned} \quad (11)$$

其中第二个等式的省略号表示对矩阵分块。由于 T_M 是酉矩阵, 则 $T_n^H T_s = 0$ 。所以用 $T_s T_s^H$ 和 T_s 分别左乘和右乘式(11), 并利用 $T_s^H h_{p+1} = 0$ 和 $h_{p+1}^H T_s = 0^T$ 的正交特性, 可以得到

$$\begin{aligned} T_s T_s^H A R_s A^H T_s + \sigma_n^2 T_s T_s^H T_s &= \\ = T_s T_s^H T_s D_s T_s^H T_s + T_s T_s^H T_n D_n T_n^H T_s &+ \\ + \delta_p T_s T_s^H h_{p+1} h_p^H T_s + \delta_p^* T_s T_s^H h_p h_{p+1}^H T_s &= T_s D_s \end{aligned} \quad (12)$$

由于 $T_M T_M^H = I$, 即 $T_s T_s^H = I - T_n T_n^H$, 又因为 T_n 的所有列矢量均落在噪声子空间内, 所以

$$T_s(D_s - \sigma_n^2 I) = (I - T_n T_n^H) A R_s A^H T_s = A R_s A^H T_s \quad (13)$$

或

$$T_s = A R_s A^H T_s (D_s - \sigma_n^2 I)^{-1} = A K \quad (14)$$

其中 $K = R_s A^H T_s (D_s - \sigma_n^2 I)^{-1}$ 。由于 $\{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ 落在信号子空间中而且两两正交, 从而 $T_s \in \mathbb{C}^{M \times P}$ 是满秩的信号子空间矩阵, 所以式(14)可以构成信号子空间拟合的基本公式, 则有如下新的信号子空间拟合准则函数:

$$\{\hat{\theta}, \hat{K}\} = \arg \min_{\theta, K} \|\hat{T}_s - A(\theta) K\|_F^2 \quad (15)$$

其中 $\hat{T}_s$ 是多级维纳滤波器的预滤波矩阵 T_s 的估计。

类似于经典的信号子空间拟合方法, 矩阵 $K \in \mathbb{C}^{P \times P}$ 也是不感兴趣的参数, 并且对式(15)可分离的非线性最小二乘问题, 若假定未知矩阵 $A(\theta)$ 固定不变, 则线性参数 K 的解为

$$\hat{K} = A^\dagger(\theta) \hat{T}_s \quad (16)$$

将式(16)代入式(15), 则可以得到没有参数 K 的信号子空间拟合准则函数:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \|P_A^\perp \hat{T}_s\|_F^2 = \arg \left\{ \min_{\theta} \left[\text{tr} \left(P_A^\perp \hat{T}_s \hat{T}_s^H \right) \right] \right\} \quad (17)$$

其中 $P_A^\perp = I - A(\theta) [A^H(\theta) A(\theta)]^{-1} A^H(\theta)$ 。

事实上, 对于式(17)的信号子空间拟合准则, 估计信号子空间不需要准确知道信源的个数, 只要保证 $\hat{T}_s$ 的列数不大于信源数 P 即可, 这为有效地降低运算量提供了可能性。当然, 为了取得较好的估计性能, 信号子空间的维数要求选取在 MSWF 取得接近满秩滤波器性能时的级数。一般情况下, 满足这个要求的多级维纳滤波器的秩不会大于信源数。

注意到式(15)所示的信号子空间拟合的新准则函数采用的信号子空间是由多级维纳滤波器前向分解的匹配滤波器张成, 不需要计算协方差矩阵和对其作特征值分解。所以本文的信号子空间矩阵与基于特征值分解估计得到的信号特征矩阵(矢量)具有明显的区别。在以下的性能仿真中也将看到, 本文的信号子空间拟合方法具有与基于特征值分解的加权信号子空间拟合方法(WSF)几乎有同样的估计精度。

3.3 复杂度分析

采用基于相关相减结构(CSS)的格形多级维纳滤波器可以避免阻塞矩阵的计算, 而且所有运算均是复矢量相乘运算, 因而在单个快拍的情况下, 每一级匹配滤波器所需要的运算量是 $O(M)$ 。所以采用本文方法估计维数是 D 的信号子空间所需的运算量是 $O(DMN)$, 而且对高阶系统, D 取为 8 就可以让降维的多级维纳滤波器接近于满秩维纳滤波器的性能^[7], 故 D 一般可以取一个比信源数小得多的整数。而常规的信号子空间拟合方法需要估计维数是 M 的协方差矩阵和对其作特征值分解, 所要求的运算次数为 $O(M^2 N + M^3)$ 。

4 仿真结果

为了证明本文方法的有效性和方便与常规的加权信号子空间拟合方法相比较, 我们做了如下的仿真。实验所使用的阵列是阵元数为 32 的等距线阵(ULA), 并假设阵元是无方向性的。阵元之间的间隔为半波长。所有独立实验的次数均是 200 次。

假设在阵列的远场有 2 个等功率的独立发射源。第 1 个发射源到达阵列有 3 条路径, 其中第 1 个是直达波, 其余两个是由多径传播而产生的相干信号, 传播常数分别是 1, $-0.8 + j0.6$ 和 $-0.3 - j0.7$ 。第 2 个是没有多径信号的发射源。4 个信号以不同的方向入射到接收天线阵列。入射角分别是 -9° , 0° , 6° 和 15° 。噪声是空时均白的复高斯随机过程。快拍数为 64。图 2 和图 3 分别是 MSWF 的级数为 2 时, 第 1 个和第 2 个信号的均方根误差(RMSE)随 SNR 变化的情况。表 1 给出了信噪比为 5dB 时, 4 个信号 DOA 估计的均值和均方根误差。

由图 2 和图 3 的仿真结果可以看出, 对相干信源 DOA 的估计, 本文方法具有与 WSF 方法几乎同样的分辨能力和估计精度, 在信噪比增大的情况下两种方法的均方根误差都趋近于 CRB 下界。表 1 说明, 采用本文方法估计到的结果几乎与 WSF 的相同, 但是本文方法的运算量远远小于 WSF 方法。注意到本文方法利用了信号的一部分先验知识, 即某个期望信号的训练信号, 所以在低信噪比的情况下本文方法优于 WSF 方法。

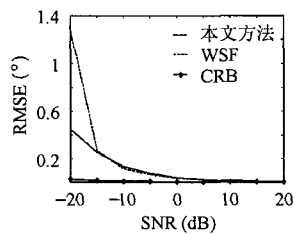


图 2 信号 1 的均方根误差

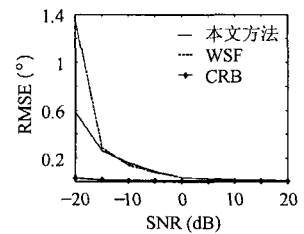


图 3 信号 2 的均方根误差

表 1 估计的均值和均方根误差

DOA(°)	均值(°)		均方根误差(°)		信号类型
	WSF	本文方法	WSF	本文方法	
-9	-8.9999	-9.0000	0.0181	0.0207	QPSK
-0	-0.0016	-0.0018	0.0217	0.0241	QPSK
6	5.9990	5.9995	0.0239	0.0274	QPSK
15	15.0029	15.0007	0.0192	0.0253	BPSK

5 结束语

本文提出一种信号子空间拟合的新方法。该方法的信号子空间是通过计算多级维纳滤波器的匹配滤波器得到的,不需要准确知道信源的个数。与一般的信号子空间拟合方法相比,本文方法不需要估计协方差矩阵和对高阶矩阵作特征值分解,也不需要计算多级维纳滤波器后向合成的标量维纳滤波器,从而使得其运算量和复杂度可以大大降低。所以本文方法具有小运算量和低复杂度的特点,易于实时处理。

参 考 文 献

- [1] Viberg M, Otterstem B. Sensor array processing based on subspace fitting. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, 39(5): 1110 – 1121.
 - [2] Cheung K W, Cheung S W. Analysis of ML and WSF in wireless channels. *Electronic Letter*, 1998, 34(7): 624 – 625.
 - [3] Guanghai X, Kailath T. Fast subspace decomposition. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(3): 539 – 551.
 - [4] Goldstein J S, Reed I S, Scharf L L. A multistage representation of the wiener filter based on orthogonal projections. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1998, 44(7): 2943 – 2959.
 - [5] Witzgall H E, Goldstein J S, Zoltowski M D. A non-unitary extension to spectral estimation. in the Ninth IEEE Digital Signal Processing Workshop Hunt, Texas, Oct. 15 – 18, 2000: 1 – 6.
 - [6] Ricks D, Goldstein J S. Efficient implementation of multi-stage adaptive weiner filters. Antenna Applications Symposium, Allerton Park, Illinois, 20 – 22 Sept. 2000: 29 – 41.
 - [7] Honig M L, Weimin X. Performance of reduced-rank linear interference suppression. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2001, 47(5): 1928 – 1946.
- 黄 磊: 男, 1975 年生, 博士生. 研究兴趣为阵列信号处理、降维自适应信号处理及其在雷达、通信中的应用.
- 吴顺君: 男, 1942年生, 教授, 博士生导师, 雷达信号处理重点实验室主任, 电子工程研究所所长, 长期从事雷达系统和雷达信号处理方面的教学和科研工作, 共发表论文60余篇, 出版专著4部, 研究领域为雷达系统分析、建模与仿真、雷达信号处理.
- 张林让: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 曾获电子部科技进步一等奖和陕西省教委科技进步二等奖, 发表论文 30 多篇, 研究兴趣为自适应信号处理、阵列波达方向估计、方向图综合.