

# 一种基于正交多小波的自适应均衡算法<sup>1</sup>

王军锋 宋国乡

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

**摘要** 该文提出了用正交多小波来表示均衡器, 由于多小波可同时具有正交性、紧支性和线性相位等特点, 因此经多小波变换后所得到的信号相关阵的稀疏化估计与单小波变换相比非零元素较少, 边界效应减小。基于此, 文中给出了正交多小波变换域的一种 Newton-LMS 类自适应均衡算法, 其计算复杂性可通过有预处理的共轭梯度法进一步降低为  $O(N \log N)$ 。仿真结果表明了该算法收敛速度较快, 且易于实时实现。

**关键词** 自适应均衡, 正交多小波, 小波变换

**中图分类号** TN911.5, O177.6

## 1 引言

自适应均衡是现代通信中的一种重要技术, 它是利用前一时间刻获得的均衡器参数来自动调整现时刻的均衡器参数, 以适应信道等未知的或随时间变化的统计特征, 从而消除码间干扰。最简单的自适应均衡器是基于最小均方误差算法的线性横向均衡器, 其优点是结构简单, 运算量少, 缺点是收敛速度较慢, 而这主要是由于输入信号相关矩阵的特征值分散较大造成的。为了提高收敛速度, 可以通过对输入信号向量作正交归一预处理来降低特征值分散。常用的正交化方法有 Gram-Schmidt 正交化、格型滤波正交化、离散傅里叶变换以及小波变换<sup>[1-3]</sup>等。

在信号处理中, 分析工具同时具有正交性和对称性(线性相位)这两种性质十分重要, 它们能保持信号的能量并减少失真。可是在实数域中, 已经证明紧支、对称、正交的非平凡单小波是不存在的<sup>[4]</sup>, 这使得人们不得不在对称性和正交性之间进行折衷。而多小波可以同时具有正交性、紧支性和线性相位, 其构造也比单小波灵活, 因此关于多小波研究成为目前热点之一<sup>[5,6]</sup>, 但其应用还主要集中在解积分方程、图像压缩及图像去噪等方面<sup>[7,8]</sup>。本文基于对多小波的分析, 提出用多小波来表示均衡器。与单小波变换相比, 经多小波变换后所得到的稀疏相关阵因少了边界效应而更加规整, 非零元素也会减少。利用这一特点, 在研究文献[2]的算法基础上, 本文给出了基于正交多小波变换的一种 Newton-LMS 类自适应均衡算法。当采用有预处理的共轭梯度算法<sup>[9]</sup>时, 还可将该算法的计算复杂性进一步降低为  $O(N \log N)$ 。

## 2 多小波分析

单小波基是由一个小波母函数通过伸缩平移生成的, 可由多分辨率分析(MRA)来定义。而多小波基是由多个小波母函数通过伸缩平移生成的, 也可以从 MRA 出发来定义, 即设有 MRA 如下:  $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots V_{j-1} \subset V_j \subset \cdots$ , 且  $\cup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(R)$ ,  $\cap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ 。其中  $V_0$  是由  $r$  个尺度函数  $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_{r-1}(x)$  的平移生成的。令  $W_0$  是  $V_0$  在  $V_1$  中的直交补, 则与  $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_{r-1}(x)$  相应的  $r$  个小波函数  $\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots, \psi_{r-1}(x)$  构成  $W_0$  的基。

<sup>1</sup> 2001-04-13 收到, 2001-10-18 定稿  
国家自然科学基金(69972034)资助

在实际中, 信号  $s(n)$  的分辨率通常认为是有限的. 设  $s(n) \in V_0$ , 则在最大尺度  $J$  下利用正交多小波可将  $s(n)$  表示为

$$s(n) = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k \in Z} \sum_{j=1}^J w_{j,k}^l \psi_{j,k}^l(n) + \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k \in Z} v_{J,k}^l \varphi_{J,k}^l(n) \quad (1)$$

其中

$$w_{j,k}^l = \langle s(n), \psi_{j,k}^l(n) \rangle = \sum_i s(n-i) \psi_{j,k}^l(i) \quad (2)$$

$$v_{J,k}^l = \langle s(n), \varphi_{J,k}^l(n) \rangle = \sum_i s(n-i) \varphi_{J,k}^l(i) \quad (3)$$

称 (2), (3) 式为信号  $s(n)$  的离散时间多小波变换.

### 3 基于正交多小波的均衡器结构与算法

#### 3.1 基于正交多小波的均衡器表示

传统的线性均衡器结构如图 1 所示, 其相应的算法如下:

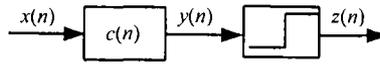


图 1 线性均衡器结构图

输出为  $y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(n)x(n-i)$ ; 误差为  $e(n) = d(n) - y(n)$ ; 权更新为  $c_i(n+1) = c_i(n) + 2\mu e(n)x^*(n-i)$ ,  $i = 1 \sim N$ . 其中  $N$  为均衡器的长度,  $c_i(n)$  为均衡器系数,  $d(n)$  为期望信号,  $\mu$  为收敛常数. 根据 (1) 式, 将均衡器用多小波来表示, 此时相应的输出  $y(n)$  可表示为

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=0}^{N-1} c_i(n)x(n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=1}^J \sum_k w_{j,k}^l(n) \psi_{j,k}^l(i) x(n-i) + \sum_{l=0}^{r-1} \sum_k v_{J,k}^l(n) \varphi_{J,k}^l(i) x(n-i) \right) \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} \left( \sum_{j=1}^J \sum_k w_{j,k}^l(n) \sum_{i=0}^{N-1} \psi_{j,k}^l(i) x(n-i) + \sum_k v_{J,k}^l(n) \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{J,k}^l(i) x(n-i) \right) \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} \left( \sum_{j=1}^J \sum_k w_{j,k}^l(n) d_{j,k}^l(n) + \sum_k v_{J,k}^l(n) c_{J,k}^l(n) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$d_{j,k}^l(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \psi_{j,k}^l(i) x(n-i), \quad c_{J,k}^l(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{J,k}^l(i) x(n-i) \quad (5)$$

将 (5) 式中的  $d_{j,k}^l(n)$  和  $c_{j,k}^l(n)$  依次排列后构成的矢量用  $\mathbf{r}(n) = [r_0, r_1, \dots, r_{N-1}]^T$  表示, 这样 (4) 式表示输入信号矢量  $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$  经正交多小波变换 (MWT) 后得到信号矢量  $\mathbf{r}(n)$ , 再将  $\mathbf{r}(n)$  作为输入信号进入均衡器, 调整均衡器的权系数  $w_{j,k}^l(n)$ ,  $v_{j,k}^l(n)$ , 最后得到输出  $y(n)$ , 此时均衡器的结构如图 2 所示。利用这一结构和多小波变换的特性, 我们讨论下面的一种快速自适应均衡算法。



图 2 基于多小波变换的自适应均衡器结构图

### 3.2 基于正交多小波变换的 Newton-LMS 算法

在传统 Newton-LMS 自适应算法基础上, 文献 [2] 提出的小波域算法中权矢量更新公式为

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) - \mu \hat{\mathbf{g}}(n) \quad (6)$$

其中  $\mathbf{c}(n) = [c_0(n), c_1(n), \dots, c_{N-1}(n)]^T$ , 下降方向  $\hat{\mathbf{g}}(n)$  由方程组:

$$\hat{\mathbf{R}}_r(n) \hat{\mathbf{g}}(n) = -2\mathbf{c}(n) \mathbf{r}(n) \quad (7)$$

确定,  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  为  $n$  时刻估计的输入信号相关阵  $\mathbf{R}_r(n)$  的稀疏化估计。为了确定  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  的稀疏结构, 文献 [2] 首先定义了一个稀疏矩阵模块  $\mathbf{M}$ , 然后令  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  与  $\mathbf{M}$  有相同的结构, 再用 Cholesky 分解法求解线性方程组 (7) 式。该算法可将计算复杂度从传统 Newton-LMS 算法的  $O(N^3)$  降低为  $O(N \log^2 N)$ , 是一种较好的算法。

然而上述算法中的  $\mathbf{M}$  与使用的小波、分解的次数以及输入信号的基本特征等都有关系, 因此实际中不便于使用。为此, 我们提出在对信号作小波变换后, 先根据下式:

$$\mathbf{R}_r(n) = \alpha \mathbf{R}_r(n-1) + (1-\alpha) \mathbf{r}(n) \mathbf{r}^T(n), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (8)$$

估计  $\mathbf{R}_r(n)$ , 再直接利用硬阈值得到稀疏阵  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$ 。经过  $L$  次迭代后 ( $L$  为  $N$  的较小倍数),  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  的结构基本稳定, 此时只需由 (9) 式来估计  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  中的非零元素, 即可得到  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$ 。

$$\hat{\mathbf{R}}_r(n) = \beta \hat{\mathbf{R}}_r(n-1) + (1-\beta) \mathbf{r}(n) \mathbf{r}^T(n), \quad 0 < \beta < 1 \quad (9)$$

从多小波在图像压缩处理等的应用可以看出, 多小波有比较好的去相关能力。比如我们对相关系数为 0.9 的一个 128 阶 Markov-1 信号的相关阵作两次 AMX2 多小波变换和 db4 小波变换, 它们的消失矩均为 2。取阈值  $\varepsilon$  为 0.001, 令绝对值小于  $\varepsilon$  的元素为零得到如图 3 所示的稀疏阵结构。图中黑影为非零元素的分布, nz 表示非零元素的个数。比较后可以看出, 用 AMX2 多小波变换后的非零元素个数 3918 少于 db4 小波变换后的个数 4322。而且得到的稀疏相关阵因没有边界效应而分布规整, 这样可减少由估计引起的计算误差。正是由于多小波对矩阵的这种稀疏化能力, 用它来构造的 Newton-LMS 类自适应均衡算法才会更有效。

对于 (7) 式, 我们采用有预处理的共轭梯度法<sup>[9]</sup>来求解。为此, 我们先取出  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  中对角线上的元素  $r_{ii}(i = 1 \sim N)$ , 然后令预处理阵为  $\mathbf{A} = \text{diag}(1/\sqrt{r_{11}}, 1/\sqrt{r_{22}}, \dots, 1/\sqrt{r_{NN}})$ , 则  $\mathbf{A} \hat{\mathbf{R}}_r \mathbf{A}^T = \mathbf{R}_v$  是对角线元素为 1 的矩阵, 且易证其条件数比  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  要小, 证明的方法类似于文献 [1], 在此从略。经过预处理后, 将方程组 (7) 式变为

$$\mathbf{R}_v(n) \hat{\mathbf{g}}(n) = -2\mathbf{e}(n) \mathbf{A} \mathbf{r}(n) \mathbf{A}^T \quad (10)$$

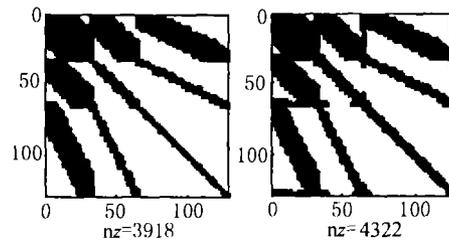


图3 128阶 Markov-1 信号的相关矩阵在 AMX2 多小波和 db4 单小波变换后元素绝对值大于 0.001 的稀疏阵结构图

再用共轭梯度法解方程组 (10) 式, 其迭代次数为  $O(\sqrt{N})$  数量级. 由于  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  每行约有  $O(\log N)$  个非零元素<sup>[2]</sup>,  $L$  很小, 则用 (9) 式估计时约需  $O(N \log N)$  次运算, 从而整个自适应均衡算法的计算量约为  $O(N \log N)$  数量级. 根据以上讨论, 可将新算法的步骤归结如下:

- (1) 设初值  $\mathbf{R}_r(0) = \mathbf{0}$ , 取阈值  $\varepsilon$ , 设定  $\alpha, \beta, L$ ;
- (2) 对输入信号矢量  $\mathbf{x}(n)$  作正交多小波变换后得到信号矢量  $\mathbf{r}(n)$ ;
- (3) 当  $n < L$  时根据 (8) 式估计  $\mathbf{R}_r(n)$ , 再由阈值  $\varepsilon$  得  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$ ; 否则根据 (9) 式估计  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$ ;
- (4) 用共轭梯度法解线性方程组 (10) 式, 求得  $\hat{\mathbf{g}}(n)$ ;
- (5) 更新权矢量  $\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) - \mu \hat{\mathbf{g}}(n)$ .

需要说明的是, 在实际中对  $\hat{\mathbf{R}}_r(n)$  一般要作对角加载处理, 以保证其正定性以及算法的稳定性.

#### 4 计算机模拟

信道形式为  $H(z) = 0.3487 + 0.8z^{-1} + 0.3487z^{-2}$ , 输入为 2-PAM 信号, 信噪比 20dB. 均衡器长度 16, 阈值 0.01,  $L = 80$ , 用 AMX2 多小波和 db4 小波分别采用本文算法和文献 [2] 算法并作两次变换. 图 4 是平均 50 次后得到的算法的学习曲线, 图 5 是收敛后信道和均衡器的级联冲击响应, 从中可以看出, 用多小波的算法收敛要快一些且计算量较小.

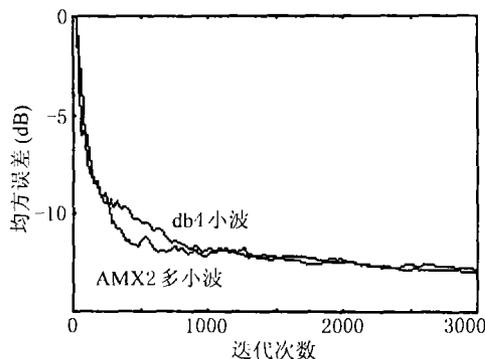


图4 算法学习曲线

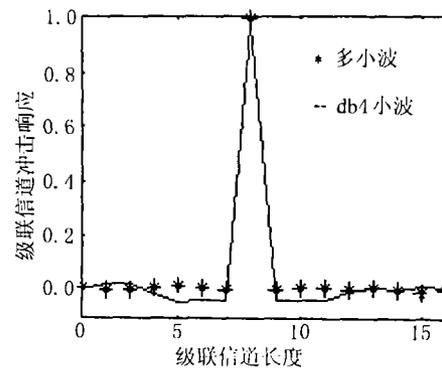


图5 信道与均衡器级联冲击响应

## 5 结 论

虽然对小波的理论和应用研究已有较长时间，但对多小波的关注还是近几年的事，其应用的领域还需进一步开发。本文尝试将多小波用于自适应均衡中，给出了用多小波表示均衡器的方法，并利用其特性提出了一种计算量较小的 Newton-LMS 类自适应均衡算法。由于多小波的构造较单小波更为灵活，如何根据自适应均衡处理的要求来设计合适的多小波有一定的应用价值，这一课题还需进一步的研究。

## 参 考 文 献

- [1] N. Erdol, F. Basbug, Wavelet transform based adaptive filters: Analysis and new results, IEEE Trans. on SP., 1996, SP-44(9), 2163-2171.
- [2] S. Hosur, A. H. Tewfik, Wavelet transform domain adaptive filtering, IEEE Trans. on SP., 1997, SP-45(3), 617-630.
- [3] 刘丰, 程俊, 王新梅, 基于规范正交小波的自适应均衡器, 电子科学学刊, 1997, 19(5), 637-642.
- [4] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, Philadelphia, SIAM, 1992.
- [5] Q. Jiang, Orthogonal multiwavelets with optimum time-frequency, IEEE Trans. on SP., 1998, SP-46(4), 830-844.
- [6] J. Lebrun, M. Vrtterli, Balanced multiwavelets theory and design, IEEE Trans. on SP., 1998, SP-46(4), 1119-1125.
- [7] B. K. Alpert, A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral operators, SIAM J. Math. Anal., 1993, 24(1), 246-262.
- [8] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala, C. Heil, The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing, IEEE Trans. on Image Proc., 1999, IP-8(4), 548-563.
- [9] 徐树方, 矩阵计算的理论与方法, 北京, 北京大学出版社, 1995, 162-168.

## A NEW ADAPTIVE EQUALIZATION ALGORITHM BASED ON ORTHOGONAL MULTIWAVELETS

Wang Junfeng      Song Guoxiang

(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract** A new equalizer represented by a set of orthogonal multiwavelets is presented. Since multiwavelets can be orthogonal, compactly supported and linear phase, the multiwavelets transformed correlation matrices have less non-zero elements and smaller boundary effects than that of wavelet. So, a new multiwavelet transform domain Newton-LMS adaptive equalization algorithm is described, and its complexity is  $O(N \log N)$  by using the preconditioned conjugate gradient algorithm. Simulation shows its convergence speed is faster and its realization is easier.

**Key words** Adaptive equalization, Orthogonal multiwavelets, Wavelet transform

王军锋: 男, 1969 年生, 讲师, 博士生, 主要从事小波分析、自适应信号处理等方面的研究.

宋国乡: 女, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事小波理论与应用, 有限元, 微分方程数值解, 数学建模等方面的研究.