

# “用摄动法定量研究二阶锁相环的非线性性能”一文的商榷\*

李明中

(中国科学院电子学研究所)

## 提 要

本文从锁相环的基本原理出发对“用摄动法定量研究二阶锁相环的非线性性能”一文中存在的几个问题,提出不同意见进行商榷。

## 一、引 言

“用摄动法定量研究二阶锁相环的非线性性能”一文<sup>[1]</sup>(以后简称原文),在研究二阶锁相环的非线性性能时具有以下几个特点:

(1) 环路是高增益二阶环路;

(2) 调频带宽远宽于环路带宽;

(3) 在压控振荡器(VCO)上进行线性调频,用锁相环锁定起始频率的相位来获得相干“啾声”信号,即相干线性调频信号;

(4) 激励波形是周期性斜坡电压,如原文图1所示。它是对称双向斜坡电压波形。

原文在导出了二阶锁相环的一般调频锁相控制方程式(1)后,利用变量置换导出了含参数 $\varepsilon$ 的描述调频锁相环的总控制方程式(2),即

$$\ddot{\phi} + 2\zeta\omega_n \cos \phi \dot{\phi} + \omega_n^2 \sin \phi = -\mu, \quad (1)$$

$$\ddot{\phi} + 2\varepsilon\zeta \cos \phi \dot{\phi} + \varepsilon^2 \sin \phi = -1; \quad (2)$$

并对方程式(2)在 $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon > 1$ ,  $1 > \varepsilon > 0$ 三种情况下,进行了分析讨论。然后用摄动法求出方程式(2)的渐近解析解,最后进行归纳,给出了结论。

我们分析了原文的全过程,认为原文在方程的解法和结论等方面存在一些问题,值得提出商榷。

## 二、商榷的一些问题

1. 当 $\varepsilon$ 值在 $[0, 1]$ 之间时,环路能否变成近于线性系统? 能否用摄动法求渐近解?

\* 1983年8月29日收到,1984年10月15日修改定稿。

原文在结束语中有一个结论“由于调频带宽远宽于环路带宽, 环路呈现严重非线性, 因而不能按线性系统进行分析. 但是当  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  间时, 它变成近于线性的系统, 从而可用摄动法求渐近解.”.

这个结论是原文研究的核心, 但是前后之间存在着非常大的矛盾. 意思是说, 环路由于  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  间时, 就可使严重的非线性系统变成近于线性系统, 便可用摄动法求渐近解.

我们对这个结论, 特别是后几句话进行讨论.

首先原文中并没有证明环路的非线性微分方程式(2)当  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  间时能近似为线性微分方程. 因此结论中不能笼统地写“……环路呈现严重非线性, ……”, 但当  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  间时, 它变成近于线性的系统, 从而可用摄动法求渐近解”.

原文中选择  $\varepsilon$  为摄动参数, 采用(3)式作为方程式(2)的解, 即

$$\phi(\tau) = \phi_0(\tau) + \varepsilon\phi_1(\tau) + \varepsilon^2\phi_2(\tau) + \varepsilon^3\phi_3(\tau) + \dots \quad (3)$$

原文中仅讨论了当  $\varepsilon < 0.2$  时,  $\varepsilon^2$  项以上的影响可忽略不计的情况, 由此获得方程式(2)的一阶近似解(6)式<sup>[4]</sup>. 但是  $\varepsilon > 0.2$  的情况没有讨论, 这样就在结束语中得出了上述结论, 因此是很不严格的.

很清楚(3)式是  $\varepsilon$  幂级数逼近法, 这种方法只说明(2)式解的精确度取决于  $\varepsilon$  的幂次项,  $\varepsilon$  的幂次项越多, (2)式解的精度就越高, 其解也越复杂. 但这种方法没有证明(3)式当  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  之间时, 是方程式(2)的近似线性解. 这种解法适用于求解非线性方程. 不必要像原文结论中所写的那样要使非线性方程变成近于线性方程才可用摄动法来求解. 如果能使非线性微分方程近似为线性微分方程的话, 则像“锁相”技术中通常讨论的那样, 可得线性化环路方程, 这样, 分析、计算就都简单、方便了.

下面我们来讨论  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  之间时环路线性化的问题. 先来分析一下(3)式中  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  之间时的情况. 显然当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, (3)式收敛得越来越快; 当  $\varepsilon \rightarrow 1$  时, (3)式收敛得越来越慢; 当  $\varepsilon = 1$  时, (3)式不能收敛, 为无穷多项; 而当  $\varepsilon = 0$  时, (3)式为  $\phi(\tau) = \phi_0(\tau)$ .

根据这种情况  $\varepsilon$  值在  $[0, 1]$  之间时,  $\varepsilon^2$  项以上的影响不是都可以忽略不计的. 如用原文中的求解方法, 必定会带来极大的误差而不能使用.

为了更清楚起见, 我们再来讨论几种不同的情况:

(1) 当  $\varepsilon = 0$  时, (2)式变为  $\ddot{\phi} + 1 = 0$ , 则  $\phi = \frac{1}{2}\tau^2 + \dot{\phi}(0)\tau + \phi(0)$  (此式原文是这样写的, 有错, 应改为  $\phi = -\frac{1}{2}\tau^2 + \dot{\phi}(0)\tau + \phi(0)$ ), 此即(2)式的非摄动解. 在 VCO 上获理想线性调频波形, 相当于相位锁定开环, 调频不受环路影响. 这些原文中已讨论了. 显然此时的方程是个线性方程, 环路变成线性系统.

(2) 当  $1 \gg \varepsilon > 0$  时, 可认为  $\varepsilon \approx 0$  的情况, 则方程(2)变成  $\ddot{\phi} + 1 \approx 0$  的近似线性方程. 我们可以认为与(1)的情况相同.

(3) 当  $0.2 \geq \varepsilon > 0$  时, 且不包括  $1 \gg \varepsilon > 0$  的情况,  $\varepsilon^2$  项以上的影响可以忽略不计, (2)式变为  $\ddot{\phi} + 2\varepsilon\zeta \cos\phi \dot{\phi} \approx -1$ , 但不能认为此方程式是近似线性方程. 原文利用摄

动法将(3)式简化为  $\phi(\tau) \approx \phi_0(\tau) + \varepsilon \phi_1(\tau)$ , 求出了(2)式的一阶近似解(5)式<sup>[1]</sup>.

(4) 当  $1 > \varepsilon > 0.2$  时, 原文中没有讨论. 十分明显  $\varepsilon^2$  项以上的影响不能忽略, (3)式也不能简化. 我们可以任取二个数来证明, 例如取

$$\varepsilon = 0.5 \text{ 时, 则 } \varepsilon^2 = 0.25, \varepsilon^3 = 0.125;$$

$$\varepsilon = 0.9 \text{ 时, 则 } \varepsilon^2 = 0.81, \varepsilon^3 = 0.729, \varepsilon^4 = 0.6561.$$

将上述  $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$  之值代入(3)式可得:

$$\phi(\tau) = \phi_0(\tau) + (0.5)\phi_1(\tau) + (0.25)\phi_2(\tau) + (0.125)\phi_3(\tau) + \cdots,$$

$$\phi(\tau) = \phi_0(\tau) + (0.9)\phi_1(\tau) + (0.81)\phi_2(\tau) + (0.729)\phi_3(\tau) + \cdots.$$

将  $\varepsilon, \varepsilon^2$  之值代入(2)式可得:

$$\ddot{\phi} + 2(0.5)\zeta \cos \phi \dot{\phi} + (0.25) \sin \phi = -1,$$

$$\ddot{\phi} + 2(0.9)\zeta \cos \phi \dot{\phi} + (0.81) \sin \phi = -1.$$

从而证明  $\varepsilon^2$  项以上的影响是不能忽略的. 上述的方程是非线性方程, 其解也是个非线性的解. 若用摄动法求渐近解, 必须取  $\varepsilon$  幂次项足够多, 其解的精确度才能达到要求, 但太麻烦, 因而不实用. 若像原文中的解法, 取一阶近似解, 则随着  $\varepsilon \rightarrow 1$ , 其误差越来越大, 实际上是不能用的. 用原文中的数作为例子也可说明此种情况.

从原文图 4(b) 可见, 当  $\varepsilon = 0.2$  时, 最大误差  $\leq 4.5\%$ , 而当  $\varepsilon = 0.32$  时, 从图 4(c) 可见最大误差接近 20%.

因此在  $1 > \varepsilon > 0.2$  的情况下环路呈非线性系统而不能近似为线性系统.

(5) 当  $\varepsilon = 1$  时, (2)式变为:

$$\ddot{\phi} + 2\zeta \cos \phi \dot{\phi} + \sin \phi = -1;$$

(3)式变为:

$$\phi(\tau) = \phi_0(\tau) + \phi_1(\tau) + \phi_2(\tau) + \phi_3(\tau) + \cdots.$$

显然也是非线性的, 环路呈非线性系统. 若用摄动法求渐近解, 则需无穷多项. 若取一阶近似解, 则误差太大, 故无实用价值.

(6) 当  $\varepsilon > 1$  时, 在原文中已经讨论了. 这里不再重复.

由上述讨论可见, (1)、(2)两种情况, 方程 (2) 可成为线性或近似线性方程, 其解为非摄动解. 环路在这两种情况下等于或接近开环状态. 因此这两种情况不用摄动法求渐近解.

(3)、(4)、(5)三种情况方程 (2) 可用摄动法求渐近解, 但原文中的方程解法仅适用于  $0.2 \geq \varepsilon > 0$  的范围. 对于  $0.2 < \varepsilon \leq 1$  的值就不适用. 因此原文结束语中结论的写法是不适当的.

## 2. 相干性和起始条件的讨论

原文中讨论了用锁相技术产生相干线性调频信号的方法和条件. 我们就原文中使用的激励波形来讨论它所产生的线性调频信号的相干性, 并讨论这种线性调频信号是不是像原文中所称的是用锁相环锁定起始频率的相位的线性调频信号?

为了方便讨论, 我们将原文图 1 的波形引用于下(图 1).

大家知道, 锁相环路中的 VCO 是一种电压——频率变换器. VCO 的频率受调制电

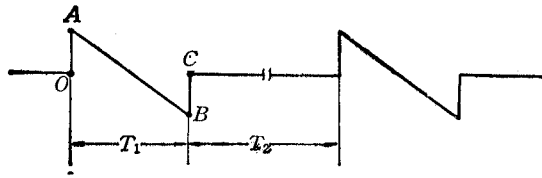


图 1 周期性斜坡电压波形

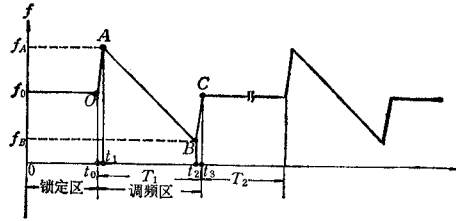


图 2 由图 1 信号激励 VCO 所产生的调频信号

压控制,按调制电压的波形变化。不同斜率的电压产生不同速率的频率变化。用图 1 的电压波形激励锁相环的 VCO, VCO 产生的调频信号的频率变化应如图 2 所示。

图 1 (原文也是图 1) 中的激励电压的前、后沿,均有一个上升或下降时间,但图 1 中没有画出。为了在讨论中能清楚地说明问题,我们把它画出来如图 2 所示。

由图 2 可得到 VCO 的输出信号的频率  $f(t)$  的表达式为:

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & (t \leq t_0, t \geq t_3); \\ f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}(t - t_0), & (t_0 \leq t \leq t_1); \\ f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2\pi} \mu_{AB}(t - t_1), & (t_1 \leq t \leq t_2); \\ f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2\pi} \mu_{AB}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2\pi} \mu_{BC}(t - t_2), & (t_2 \leq t \leq t_3). \end{cases} \quad (4)$$

相位为频率的积分,其相位变化的表达式为:

$$\phi(t) = \begin{cases} \omega_0 t, & (t \leq t_0, t \geq t_3); \\ \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}(t - t_0)^2, & (t_0 \leq t \leq t_1); \\ \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}(t_1 - t_0)^2 - \frac{1}{2} \mu_{AB}(t - t_1)^2, & (t_1 \leq t \leq t_2); \\ \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}(t_1 - t_0)^2 - \frac{1}{2} \mu_{AB}(t_2 - t_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_{BC}(t - t_2)^2, & (t_2 \leq t \leq t_3); \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\mu_{OA}$ 、 $\mu_{AB}$ 、 $\mu_{BC}$  是图 2 中 OA、AB、BC 部分对应的调频速率。

很明显,调频速率  $\mu_{OA}$ 、 $\mu_{AB}$ 、 $\mu_{BC}$  是各不相同的,它们的速率的起始点和方向都不一致。因此 O 点、A 点、B 点都有各自的瞬时频率。

相干线性调频信号为了实现信号的相干,要求本身的频率稳定度要非常高,通常瞬时频率稳定度要在  $10^{-8}$  以上。这样,必须考虑产生调频信号的调制波形的各部分的抖动。

这种抖动是随机的,将造成信号的频率和相位的随机变化,从而将影响信号的稳定度和相干性. 严重时可使所产生的线性调频信号不成为相干线性调频信号. 下面我们予以证明.

考虑到波形的抖动等的影响,反映在时间上的变化为  $\Delta t$ , 则(4)式要改写为:

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & (t \leq t_0, t \geq t_3); \\ f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}[(t - t_0) + \Delta t_1], & (t_0 \leq t \leq t_1); \\ f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}[(t_1 - t_0) + \Delta t_1] - \frac{1}{2\pi} \mu_{AB}[(t - t_1) + \Delta t_2], & (t_1 \leq t \leq t_2); \\ f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}[(t_1 - t_0) + \Delta t_1] - \frac{1}{2\pi} \mu_{AB}[(t_2 - t_1) + \Delta t_2] \\ + \frac{1}{2\pi} \mu_{BC}[(t - t_2) + \Delta t_3], & (t_2 \leq t \leq t_3). \end{cases} \quad (6)$$

(5) 式改写为:

$$\phi(t) = \begin{cases} \omega_0 t, & (t \leq t_0, t \geq t_3); \\ \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}[(t - t_0) + \Delta t_1]^2, & (t_0 \leq t \leq t_1); \\ \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}[(t_1 - t_0) + \Delta t_1]^2 - \frac{1}{2} \mu_{AB}[(t - t_1) + \Delta t_2]^2, & (t_1 \leq t \leq t_2); \\ \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}[(t_1 - t_0) + \Delta t_1]^2 - \frac{1}{2} \mu_{AB}[(t_2 - t_1) + \Delta t_2]^2 \\ + \frac{1}{2} \mu_{BC}[(t - t_2) + \Delta t_3]^2, & (t_2 \leq t \leq t_3). \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\Delta t_1$ 、 $\Delta t_2$ 、 $\Delta t_3$  为  $OA$ 、 $AB$ 、 $BC$  部分波形抖动等引起的时间变化, 这种时间变化也是随机变化.

根据原文的讨论, 由图 1, 图 2 可见,  $AB$  是实际使用的部分,  $OA$  和  $BC$  是不用的部分. 因此原文中调频的起始点是  $A$  点, 其频率是  $f_A$ . 由(6), (7)式可得  $A$  点的瞬时频率和相位为:

$$\begin{aligned} f_A &= f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}[(t_1 - t_0) + \Delta t_1] \\ &= f_0 + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA}(t_1 - t_0) + \Delta f_1, \end{aligned} \quad (8)$$

式中,

$$\Delta f_1 = \frac{1}{2\pi} \mu_{OA} \Delta t_1; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi_A &= \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}[(t_1 - t_0) + \Delta t_1]^2 \\ &= \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA}[t_1 - t_0]^2 + \frac{1}{2} \mu_{OA}[2(t_1 - t_0)\Delta t_1 + \Delta t_1^2] \end{aligned}$$

$$= \omega_0 t_0 + \frac{1}{2} \mu_{OA} (t_1 - t_0)^2 + \theta_{OA}, \quad (10)$$

式中

$$\theta_{OA} = \frac{1}{2} \mu_{OA} \Delta t_1 [2(t_1 - t_0) + \Delta t_1], \quad (11)$$

是由  $\Delta t_1$  引起的随机相位。

由锁相环路的基本原理可知,当环路锁定时, $O$ 点的瞬时频率,即锁定时的频率  $f_0$  为:

$$f_0 = f_r \quad (12)$$

或

$$f_0 = n f_r, \quad (12a)$$

式中,  $f_r$  为参考信号频率,  $n f_r$  为  $f_r$  的  $n$  次谐波。  $f_r$  一般采用高稳定度的晶体振荡器产生。

将(12)式代入(8)式可得

$$f_A = f_r + \frac{1}{2\pi} \mu_{OA} (t_1 - t_0) + \Delta f_1. \quad (13)$$

从(13)式可见,当  $\mu_{OA}$  是常数,  $t_1$ 、 $t_0$  为一定值时,  $f_A$  的频率稳定度与参考信号的频率稳定度是不一致的,它多了一项随机抖动频率  $\Delta f_1$ 。其次,频率  $f_A$  不等于频率  $f_r$  或  $f_0$ ,说明它不是锁定时的频率。

由(9)式可见,随机抖动频率  $\Delta f_1$  不但与波形抖动的大小成正比,而且与调频速率的大小也成正比。调频速率越高,抖动越大,产生的线性调频信号的频率稳定度就越差。

通常  $t_1 - t_0 \gg \Delta t_1$ , (11) 式可变为:

$$\theta_{OA} \approx \mu_{OA} \Delta t_1 (t_1 - t_0). \quad (14)$$

此式表明相位抖动的情况,不但也与  $\mu_{OA}$ 、 $\Delta t_1$  成正比,而且还与调频的时间成正比,调频时间越长,相位抖动越大。从而证明了  $A$  点的瞬时频率不是锁定时的频率,其频率稳定度要比锁定频率的频率稳定度低。因此以  $A$  点为起始点的线性调频信号不是起始频率被锁相环路锁住的线性调频信号。原文中把此种线性调频信号作为相干“嗽声”信号来讨论是不正确的。

原文 238 页第 14 行所写“确定起始条件在  $\tau = 0$  时,环路处于锁定状态,故有:  $\phi(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \omega - \omega_0 = \Delta\omega_0$ , 式中  $\phi(0)$  为起始相差,  $\Delta\omega_0$  为起始频差”。通过上述分析,原文中所指的这种情况,其起始点应是  $O$  点,实际上原文讨论的起始点是  $A$  点,因此原文在解方程时应该用  $A$  点所对应的频率和相位作为边界条件来讨论才正确。像原文中那样用  $O$  点的起始条件来代替  $A$  点的边界条件进行讨论,解方程,由此而引出的结果,其错误是很明显的。

### 3. 其他一些错误

原文在 236 页中有  $\phi_2(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2 + e_4(t) + \theta_2 = \omega_0 t + \int_0^t e_4(\xi) d\xi + e_4(0) + \frac{1}{2} \mu t^2 + \theta_2$  的表示式。其中有两处不妥之处应指出。

(1)  $\mu$  表示不清 由图1、图2可见,  $\mu$  若包括  $\mu_{OA}$ 、 $\mu_{AB}$ 、 $\mu_{BC}$  这三部分, 则线性调频的起始点是  $O$  点,  $\phi_2(t)$  的表达式是错的, 应写成(7)式那样的表达式。  $\mu$  若指  $\mu_{AB}$  这一部分, 则线性调频信号的起始点在  $A$  点, 其错误已如上所述。

(2)  $e_4(t)$  表示不清 从原文的表示式  $\phi_2(t)$  中可见  $e_4(t)$  表示相位,  $e_4(t) = \int_0^t e_4(\xi) d\xi + e_4(0)$ 。但如原文图2所示,  $e_4(t) = F(p)e_3(t)$ ,  $e_3(t) = e_2(t)$  的低频分量,  $e_2(t) = e_1(t)e_5(t)$ ,  $e_1(t) = \sin \phi_1(t)$ ,  $e_5(t) = \cos \phi_2(t)$ , 则  $e_4(t)$  应是电压的表示式。我们分析后, 认为  $e_4(t)$  也应表示电压, 不表示相位。原文中可能漏掉了压控特性的斜率  $K_0$ 。

原文在导出二阶环的一般调频锁相控制方程时, 显得有些混乱。

原文 239 页上(6)式中的  $\phi(\tau)$  式里漏掉了  $\sin \Delta\omega_0^2$  项, 可能属于笔误。

### 三、结 束 语

原文提出用摄动法研究二阶锁相环的非线性问题是一种有益的探讨, 但是通过上述讨论可见原文在方程的解法和主要论点方面有不妥之处, 值得商榷。

由于涉及锁相环路和线性调频两方面的问题, 需要考虑相干、失锁等情况, 因此讨论的问题比较复杂。本文在商榷中必定存在错误之处, 恳请大家批评指正。

原文作者在一九八二年五月罗马“电路与系统”国际年会上发表的文章<sup>[2]</sup>, 同样存在着商榷中提出的一些主要问题。

在文献[3]中, 我们采用单向斜坡电压波形, 调制微波锁相环路中的 VCO, 直接获得了起始频率的相位被频率稳定度很高的晶振锁住的微波线性调频信号, 即微波相干线性调频信号。我们研制成的三公分相干线性调频固态源已用于我国研制的合成孔径侧视雷达样机, 并在 1980 年 11 月进行的试验飞行里, 获得了较高分辨率的图象照片<sup>[4]</sup>。

环路对线性调频信号的非线性影响, 准备以后再进行讨论。

北京邮电学院田永正副教授在百忙中审阅了本文, 提出了宝贵的意见; 一九一九所的蒋君章高级工程师审阅了本文, 并进行了多次专题讨论, 得到很大的帮助, 有助于文章的修改; 本所方永绥同志给予多次的帮助; 在此一并致以深切的谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 路益蕙, 电子学通讯, 4(1982), 235.
- [2] Lu Yihui, A Quantitative Research of Nonlinear Behaviour of a Phase-Locked Loop, IEEE 82CH 1681-6, p. 301—304.
- [3] 李明中、阮贵华、魏国栋, 三公分 CLFM 固态源及其脉压试验, 中国电子学会雷达学会, 雷达天线和射频技术交流会论文, 1982 年 12 月, 四川成都.
- [4] 陈宗鹭、张志诚、谢寿生, X 波段机载合成孔径雷达系统及其飞行试验, 遥感文选, 国家遥感中心编, 1981 年.

## **A DISCUSSION ON“A QUANTITATIVE RESEARCH OF NON-LINEAR BEHAVIOUR OF A SECOND-ORDER PHASE-LOCKED LOOP BY PERTURBATION METHOD”**

Li Mingzhong

*(Institute of Electronics, Academia Sinica)*

Based on the understanding of the fundamentals of PLL, several different opinions about some problems in the paper—“A Quantitative Research of Nonlinear Behaviour of a Second-Order Phase-Locked Loop by Perturbation Method” are presented.