

基于中值变换和金字塔分解的图像去噪方法¹

黄文涛 毕笃彦 毛柏鑫 马时平

(空军工程大学工程学院航空电子工程系 西安 710038)

摘 要: 该文基于中值变换提出了一种信号的非线性多尺度金字塔分解算法, 然后给出了一种利用它来对同时含有脉冲噪声和高斯噪声图像的去噪方法。由于图像经过中值金字塔变换后的系数表现出不同的特点, 能对噪声产生有效的分离, 可以对不同的噪声采用不同的系数抑制方法来达到去噪的目的。仿真试验结果表明本方法很有效, 且优于其它方法。

关键词: 图像去噪, 中值变换, 金字塔, 多尺度, 混合噪声

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)11-1686-07

A Image Denoising Method Based on Median Transform and Pyramid Decomposition

Huang Wen-tao Bi Du-yan Mao Bai-xin Ma Shi-ping

(The Aviation Electron Engineering Department,

Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract A nonlinear multiscale pyramidal decomposition based on median transform is presented in this paper at first. Then it gives a denoising algorithm which can restore the image distorted by impulse noise and Gaussian noise. The coefficients of the image via the median pyramidal transform represent different characteristics, so the transform can effectively detach noise from image. The different noise coefficients suppression means can be adopted to remove different noise. The simulation result indicates the method is effective, and superior over other methods.

Key words Image denoising, Median transform, Pyramidal, Multiscale, Hybrid noise

1 引言

近年来, 多尺度分析方法在信号及图像处理中得到了越来越广泛的应用, 其中小波分析方法在最近十多年的时间里得到了很大的发展, 在信息处理的各个领域得到广泛的应用。另外一种重要的多尺度方法是金字塔变换, 是由 Burt^[1] 于 1983 年针对数字图像的数据压缩提出的。在金字塔分解过程中, 原始信号被分解为一个经抽取后的近似信号和一个包含了其原始信号剩余信息的细节信号。这与小波分解的思想比较相似, 但是其细节信号未经抽取, 因而与小波分解相比信息是有冗余的, 这是它的主要缺点。但是它比小波分解更加灵活, 可使用各种算子 (包括线性与非线性的)。

中值变换作为一种重要的非线性算子广泛应用于信号处理及图像滤波方面。中值滤波有着很好的鲁棒性, 可对信号和图像进行自适应地光滑, 它实质上可看作一种自适应滤波。将中值滤波应用于金字塔变换比应用其它线性滤波有更多优势, 近几年来有一些文献开始研究这方面的内容。文献 [2] 利用一种中值插值来对信号进行金字塔分解; 文献 [3] 利用了中值滤波及样条

¹ 2003-06-25 收到, 2003-09-25 改回

全国骨干教师资助计划 (GG-020-90039-324) 资助课题

插值来进行金字塔分解; 文献 [4,5] 中利用一种非重叠的块中值变换进行抽取及多项式插值来进行分解信号。本文提出一种完全基于中值变换的信号金字塔分解方法。

图像去噪一直是图像处理的一个重要部分, 常见的噪声主要有高斯噪声和脉冲噪声。中值滤波及其改进如加权中值滤波^[6]等对脉冲噪声有很好的效果, 对高斯噪声也有较好的效果, 近几年发展起来的基于小波的多尺度去噪方法^[7-9]获得了很大的成功, 显示出了传统方法所不能比拟的优势。但它还是主要针对加性高斯白噪声的, 对于像脉冲噪声和高斯噪声为加性噪声这样的混合噪声的去噪方面, 现今还没有好的方法。本文将在我们提出的中值金字塔多尺度分解的基础上, 研究这种噪声的滤除。

2 中值金字塔变换

金字塔变换的一般结构包括分解和重构两步, 如图 1 所示, 滤波算子 H 首先对第 k 尺度的信号 $x^{(k)}$ 滤波, 然后经过一个 M 抽取, 就可得到下一级的平滑逼近信号 $x^{(k+1)}$ 。此平滑信号经过一个 M 插补, 再经过一个平滑预测滤波器 H' 得到 $x^{(k)}$ 的预测信号, 信号 $x^{(k)}$ 与信号 $\tilde{x}^{(k)}$ 相减就得到下一级的细节信号 $d^{(k+1)}$, 重构过程与此相反。Burt^[1] 提出此分解结构时 H , H' 都为线性滤波器, 但从这个结构可以看出 H , H' 也可为非线性结构, 本文利用 H , H' 都为中值滤波来进行此金字塔分解, 下面以二维信号为例来说明。

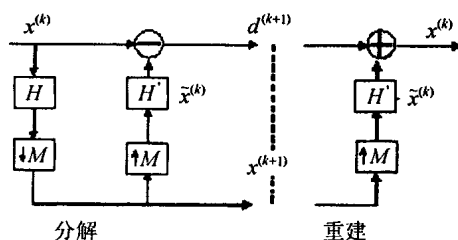


图 1 金字塔变换的一般结构

先给出几个定义。中值算子 $\text{Median}\{\cdot\}$ 定义:

$$\text{Median}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k + 1; \\ (x_k + x_{k+1})/2, & n = 2k; \end{cases} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (1)$$

对二维信号 $x(i, j)$, 用 W_{mn}^k 表示以 (m, n) 为中心, 大小为 $(2k+1) \times (2k+1)$ 的窗口所包括的所有元素的集合, $\text{Median}\{W_{mn}^k\}$ 表示对此窗口内元素进行中值操作。对于二维信号, M 抽取 (或插补) 操作可用一二维向量表示 $M = (p, q)$, 一般取 $p = q$, 表示行进行 p 抽取 (或插补), 列进行 q 抽取 (或插补)。

本文提出的多尺度中值金字塔分解算法可表示如下:

(1) 令 $x^{(n)}(i, j)$ 表示信号在第 n 尺度的近似信号, 从 $n = 0$ 开始, $x^{(0)}(i, j)$ 表示原始信号;

(2) 若 $M = (m, m)$, 则在第 $n+1$ 尺度时的近似信号 $x^{(n+1)}(i, j) = \text{Median}\{W_{mi, mj}^k\}$, $k \geq m-1$, 一般取 $m = 2$;

(3) 利用 $x^{(n+1)}(i, j)$ 对 $x^{(n)}(i, j)$ 用算子 H' 进行预测, 得到在尺度 n 的预测信号 $\tilde{x}^{(n)}(i, j)$, 细节信号 $d^{(n+1)}(i, j) = x^{(n)}(i, j) - \tilde{x}^{(n)}(i, j)$;

(4) 令 $n = n+1$, 如果 $k < J$ 则返回 (2), J 表示所要分解的最大尺度;

(5) 最后可获得变换系数 $\lambda = \{d^{(1)}(i, j), d^{(2)}(i, j), \dots, d^{(J)}(i, j), x^{(J)}(i, j)\}$ 。

重建过程与此相反。在上面的 (3) 中从 $x^{(n+1)}(i, j)$ 预测 $x^{(n)}(i, j)$ 也是基于中值变换实现的, 利用了一个类似中值变换的滤波器进行插值。下面以 $M = (2, 2)$ 为例来说明 H' 的实现:

$$\tilde{x}^{(n)}(2i, 2j) = x^{(n+1)}(i, j);$$

$$\tilde{x}^{(n)}(2i, 2j) = \text{Median}\{x^{(n+1)}(i-1, j), x^{(n+1)}(i, j), x^{(n+1)}(i+1, j), \\ x^{(n+1)}(i-1, j+1), x^{(n+1)}(i, j+1), x^{(n+1)}(i+1, j+1)\};$$

$$\tilde{x}^{(n)}(2i+1, 2j) = \text{Median}\{x^{(n+1)}(i, j-1), x^{(n+1)}(i, j), x^{(n+1)}(i, j+1), \\ x^{(n+1)}(i+1, j-1), x^{(n+1)}(i+1, j), x^{(n+1)}(i+1, j+1)\};$$

$$\tilde{x}^{(n)}(2i+1, 2j+1) = \text{Median}\{x^{(n+1)}(i, j), x^{(n+1)}(i+1, j), x^{(n+1)}(i, j+1), x^{(n+1)}(i+1, j+1)\}$$

3 中值金字塔在图像去噪中的应用

通过多尺度分析来对信号进行去噪, 关键在于用什么准则来去除属于噪声的系数, 而保留属于信号的部分。在用小波对图像进行去噪时, 通常采用阈值化^[7]的方法, 主要有“软阈值化”和“硬阈值化”两种。“软阈值化”用公式可表示为

$$W_{\delta} = \begin{cases} \text{sgn}(W)(|W| - \delta), & |W| \geq \delta \\ 0, & |W| < \delta \end{cases} \quad (2)$$

“硬阈值化”可表示为

$$W_{\delta} = \begin{cases} W, & |W| \geq \delta \\ 0, & |W| < \delta \end{cases} \quad (3)$$

这种方法主要是基于噪声为加性的高斯白噪声模型来讨论的, 在这种情况下, 它可以取得较好的效果。而对于像脉冲噪声这种非加性的噪声, 阈值化的方法效果是不会很好的, 由于脉冲噪声点也会产生大的系数。

由于中值滤波可看作一种自适应滤波, 它可对信号进行自适应光滑, 用它对含噪信号分解能起到对信号与噪声有效分离的效果。用 3×3 窗口对 Peppers 进行中值金字塔分解, 如图 2 所示。图 2(a) 为原始图像 I , 大小为 $256 \times 256 \times 8\text{bit}$; 图 2(b) 为加 20% 椒盐 (其中正负脉冲各占一半) 噪声图像 $I_n(256 \times 256)$; 图 2(c) 为 I_n 经过中值金字塔一次分解后的细节图像 $d_n^{(1)}(256 \times 256)$; 图 2(d) 为 I_n 经过中值金字塔一次分解后的近似图像 $I_n^{(1)}(128 \times 128)$; 图 2(e) 为 I_n 经过中值金字塔二次分解后的细节图像 $d_n^{(2)}(128 \times 128)$; 图 2(f) 为 I_n 经过小波 (FWT-7/9) 一次分解后的近似图像 $I_{nw}^{(1)}(128 \times 128)$ 。从中可以看出经过中值金字塔分解后, 大部分噪声的能量集中在经过一级分解后的细节系数上, 一级近似图像和经过二级分解后的细节系数上已基本没有了脉冲噪声。还可以看出经过小波分解后的一级近似图像受噪声影响很严重, 这主要是由于用小波变换对图像进行近似时, 是基于线性变换, 在平滑图像缺乏像中值变换那样的对噪声的自适应性。

当原始图像 I 加上 20% 椒盐噪声和标准差为 $\sigma = 50$ 的高斯混合噪声后, 分别对原始图像 I 和加噪后的图像 I_n 用中值金字塔进行三级分解, 得到系数 $\{d^{(1)}(i, j), d^{(2)}(i, j), d^{(3)}(i, j)\}$ 和 $\{d_n^{(1)}(i, j), d_n^{(2)}(i, j), d_n^{(3)}(i, j)\}$, 分别画出它们的概率分布函数 (pdf), 如图 3 所示。图 3(a)~图 3(c) 的实线分别为系数 $d^{(1)}(i, j), d^{(2)}(i, j), d^{(3)}(i, j)$ 的概率分布函数, 虚线分别为系数 $d_n^{(1)}(i, j), d_n^{(2)}(i, j), d_n^{(3)}(i, j)$ 的概率分布函数, 图像 I_n 的灰度值已归一化在 $(0, 1)$ 区间内。

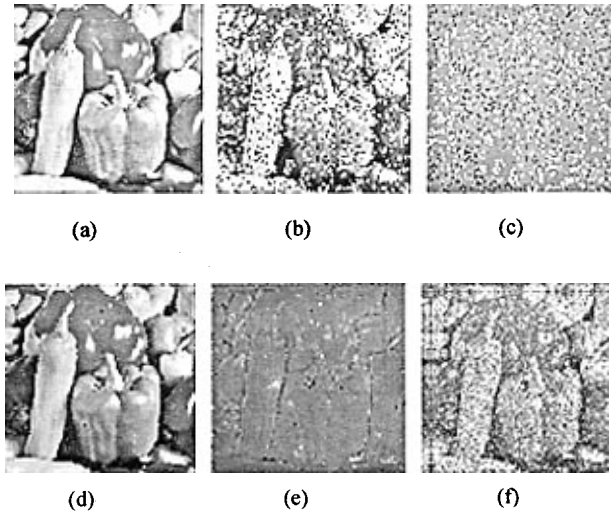


图 2 原始图像 (Peppers) 进行中值金字塔分解和小波变换后的近似图像及细节图像

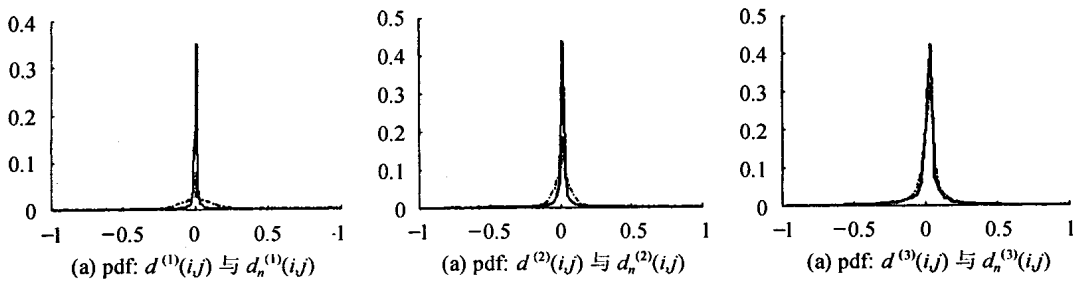


图 3 $d^{(1)}(i, j), d^{(2)}(i, j), d^{(3)}(i, j)$ 与 $d_n^{(1)}(i, j), d_n^{(2)}(i, j), d_n^{(3)}(i, j)$ 的概率分布函数 (pdf)

从图 3 可以看出 $d^{(1)}(i, j)$ 和 $d_n^{(1)}(i, j)$ 的概率密度分布函数差别最大, 在后来逐渐趋于相似, 这些差别主要是由于噪声影响造成的。脉冲噪声主要影响幅值大的部分, 高斯噪声主要影响幅值小的部分。

综上, 含有高斯噪声与脉冲噪声的图像 I_n 经过中值金字塔多尺度分解后的系数 $\{d_n^{(1)}(i, j), \dots, d_n^{(J)}(i, j)\}$ 表现出以下的特点:

- (1) 脉冲噪声的绝大部分包含在 $d_n^{(1)}(i, j)$ 中, 极少部分包含在 $d_n^{(2)}(i, j)$ 及其后面的 $d_n^{(k)}(i, j)$ ($2 \leq k \leq J$) 中, 且脉冲噪声点位置处的系数的幅值也同样很大, 表现一冲激点。
- (2) 高斯噪声的能量也是很大部分包含在 $d_n^{(1)}(i, j)$ 中, 少部分包含在 $d_n^{(2)}(i, j)$ 及其后面的 $d_n^{(k)}(i, j)$ ($2 \leq k \leq J$) 中, 且受到高斯噪声影响的主要是小幅值的系数。

利用这些特点我们就可以通过对系数 $\{d_n^{(1)}(i, j), \dots, d_n^{(J)}(i, j)\}$ 进行一些变换, 抑制噪声产生的系数, 再通过对变换后的系数进行逆变换, 就可以得到去噪后的图像。去噪的关键就在于如何选择对系数的变换才能有效地去除噪声, 这就要利用到前面说到的特点。由于 $d_n^{(1)}(i, j)$ 中包含了噪声大部分的能量, 所以可将其全部置零而不会有很大影响, 所以我们只需对 $\{d_n^{(2)}(i, j), \dots, d_n^{(J)}(i, j)\}$ 进行处理。

对于高斯噪声, 由于影响的主要是小幅值的系数, 所以可以对其采用阈值化的方法, 选用“软阈值化”:

$$d_{T_k}^{(k)}(i, j) = \begin{cases} \text{sgn}(d_n^{(k)}(i, j))(|d_n^{(k)}(i, j)| - T_k), & |d^{(k)}(i, j)| \geq T_k \\ 0, & |d^{(k)}(i, j)| < T_k \end{cases} \quad (4)$$

T_k 为选定的阈值, 其取值一般在 $d_n^{(k)}(i, j)$ 的绝对值的均值左右, 即 $T_k = V_k + \lambda_k \sigma_k$, λ_k 为参数, 取值在零附近, 而

$$V_k = \frac{1}{M_k \times N_k} \sum_i \sum_j |d_n^{(k)}(i, j)|, \quad \sigma_k = \left(\frac{1}{M_k \times N_k} \sum_i \sum_j (|d_n^{(k)}(i, j)| - V_k)^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

脉冲噪声点处的分解系数也表现为一脉冲点, 即为很大的值, 且与其邻域的点的幅值相差很大, 即表现出孤立点的特点, 我们可以利用这个特点来对脉冲点进行抑制, 首先选定一个阈值 $T'_k = V_k + \mu_k \sigma_k$, $\mu_k \geq 1$, 然后利用 T'_k 将 $|d^{(k)}(i, j)|$ 二值化, 得到

$$I_b^{(k)}(i, j) = \begin{cases} 1, & |d_n^{(k)}(i, j)| > T'_k \\ 0, & |d_n^{(k)}(i, j)| \leq T'_k \end{cases} \quad (6)$$

$I_b^{(k)}(i, j)$ 即为一二值化图像, 在 $I_b^{(k)}(i, j) = 1$ 的点处系数 $d^{(k)}(i, j)$ 就有可能为脉冲噪声产生的系数, 也可能为边缘点产生的系数, 对于边缘点, 它往往表现出线状的连通结构, 而脉冲噪声点产生的系数却表现出孤立点或小的连通分量, 如果能将些小的连通分量检测出来, 就可以确定出脉冲噪声点, 下面将讨论利用形态学方法进行处理。

设 B 为单连通结构元素, B 的轮廓 ∂B 定义为 B 的所有边缘点的全体, 如图 4 所示为一 5×5 结构元素例子, (a) 为单连通结构元素 B ; (b) 结构元素 B 的轮廓 ∂B 。

定义 $X \odot B = (X \oplus \hat{\partial} B) \ominus B$, $\hat{\partial} B = \{-b | b \in \partial B\}$, “ $\oplus$ ” “ $\ominus$ ” 分别表示形态膨胀与形态腐蚀, 对于 $X \odot B$ 有如下结论^[10]:

命题 设 Y 是 X 的一个连通分量, 则 $Y \cap X \odot B = \phi$, 当且仅当存在 z , 使得 $Y \subseteq B_z$, 且 $(\partial B)_z \subseteq X^c$ 。

X^c 表示 X 的补集, B_z 表示 B 以向量 z 平移, 即 $B_z = \{b + z | b \in B\}$ 。上面的结论表明了运算 $\odot$ 可除去 X 中的一些小的连通分量, 而保留大的连通分量, 这些除去小的连通分量的大小由结构元素 B 控制, 满足 $Y \subseteq B_z$, $(\partial B)_z \subseteq X^c$, 集合 $C_B(X) = X \cap X \odot B$ 即为 X 中保留下来的大的连通分量, 而集合 $D_B(X) = X - C_B(X)$, 即为 X 中那些小的连通分量的集合。

$I_b^{(k)}(i, j)$ 可看作为二值图像, 可取一 $(2q+1) \times (2q+1)$ 的正方形结构元素 B , $q \geq 1, q \in Z$, 对 $I_b^{(k)}(i, j)$ 作运算 $D_B(I_b^{(k)}) = I_b^{(k)} - C_B(I_b^{(k)})$, 若在 (i, j) 处 $D_B(I_b^{(k)})(i, j) = 1$, 即可看作脉冲噪声点的位置, 置 $d_n^{(k)}(i, j) = 0$, 这样就可以抑制脉冲噪声点产生的系数。

综上, 整个去噪算法的步骤如下:

- (1) 利用中值金字塔分解原始含噪图像 I_n , 得到分解系数 $\lambda = \{d_n^{(1)}(i, j), d_n^{(2)}(i, j), \dots, d_n^{(J)}(i, j), I_n^{(J)}(i, j)\}$;
- (2) 置 $d_n^{(1)}(i, j) = 0$, 对 $\{d_n^{(2)}(i, j), \dots, d_n^{(J)}(i, j)\}$ 进行脉冲噪声抑制, 得到变换后的系数 $\{d_g^{(2)}(i, j), \dots, d_g^{(J)}(i, j)\}$;
- (3) 对系数 $\{d_g^{(2)}(i, j), \dots, d_g^{(J)}(i, j)\}$ 进行高斯噪声抑制, 得到 $\{d^{(2)}(i, j), \dots, d^{(J)}(i, j)\}$;

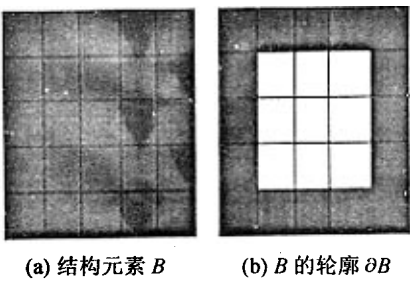


图 4 B 与 ∂B

(4) 利用 $\{d^{(2)}(i, j), \dots, d^{(J)}(i, j)\}$ 进行中值金字塔重构, 得到去噪后的图像 I 。

本文用图 2(a) 中的 Peppers($256 \times 256 \times 8\text{bit}$) 进行了仿真试验, 并与中值滤波及 FWT-7/9 小波“软阈值”去噪方法进行了比较, 在中值金字塔分解时, 选用 3×3 中值变换窗口, 抽取 $M = (2, 2)$ 。每次试验对其分别加入密度 (p) 不同的椒盐噪声 (正脉冲噪声和负脉冲噪声各含一半) 和方差 (σ^2) 不同的高斯噪声。表 1 是去噪信噪比的比较, 若 $s(i, j)$ 为原始信号, $x(i, j)$ 为加噪信号, 则其信噪比定义为

$$\text{SNR}(\text{dB}) = 10 \lg \left[\frac{\sum_{i,j} s^2(i, j)}{\sum_{i,j} (s(i, j) - x(i, j))^2} \right]$$

(7)

表 1 不同噪声密度情况下去噪的信噪比较 (dB)

噪声密度 (p, σ) 及输入图像的 SNR(dB)	(10%, 50)	(10%, 100)	(20%, 50)	(20%, 100)	(30%, 50)	(30%, 100)	(40%, 50)	(40%, 100)
中值滤波 3×3	14.66	9.33	13.25	8.284	11.41	7.09	9.32	5.89
中值滤波 5×5	17.15	12.61	16.31	11.73	15.21	10.69	13.96	9.43
FWT-7/9 小波	16.03	14.85	15.84	14.10	14.13	12.14	12.67	11.93
本文方法	18.64	17.24	17.87	16.80	16.60	15.62	16.22	14.07

图 5 是加上不同密度的混合噪声后, 用不同方法滤波的视觉效果比较。图 5(a) 为加上密度为 20% 的椒盐噪声和标准差为 $\sigma = 100$ 的高斯噪声后的图像; 图 5(b) 为用 3×3 的中值滤波对图 5(a) 滤波的效果; 图 5(c) 为用 5×5 的中值滤波对图 5(a) 滤波的效果; 图 5(d) 为用 FWT-7/9 小波“软阈值”对图 5(a) 去噪的效果; 图 5(e) 为用本文的中值金字塔去噪算法对图 5(a) 去噪的效果; 图 5(f) 为加上密度为 30% 的椒盐噪声和标准差为 $\sigma = 50$ 的高斯噪声后的图像; 图 5(g) 为用 3×3 的中值滤波对图 5(f) 滤波的效果; 图 5(h) 为用 5×5 的中值滤波对图 5(f) 滤波的效果; 图 5(i) 为用 FWT-7/9 小波“软阈值”对图 5(f) 去噪的效果; 图 5(j) 为用本文的中值金字塔去噪算法对图 5(f) 去噪的效果。可以看出, 中值滤波对高斯噪声滤除的效果不是很好, 而小波阈值法对脉冲噪声的效果不是很好, 在混合噪声方面, 本文的去噪算法无论在信噪比和视觉效果上都要优于中值滤波和小波阈值去噪方法。

4 结论及展望

本文首先提出了一种基于中值变换的金字塔分解算法, 然后讨论了利用它对同时含有高斯噪声和脉冲噪声的图像进行去噪的问题。由于经过中值金字塔分解后, 噪声可得到有效的分离, 并表现出不同的特点, 根据这些特点就可对不同的噪声采用不同的抑制方法, 最后的实验结果表明这种方法很有效。本文仅讨论了利用中值变换的金字塔分析进行去噪的情况, 其实我们还可以将其与小波分析相结合来进行多尺度去噪, 限于篇幅, 我们不再讨论。

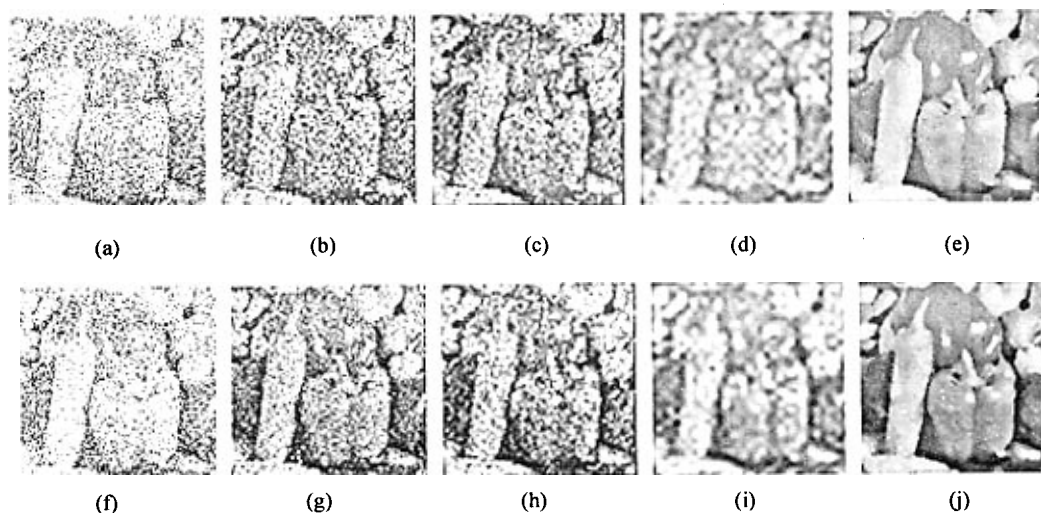


图 5 加入不同噪声后滤波效果比较

参 考 文 献

- [1] Burt P, Adelson E. The Laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. on Commun.*, 1983, 31(4): 532-540.
- [2] Donoho D L, Yu T P Y. Robust nonlinear wavelet transform based on median-interpolation. *Conf. Rec. Thirty-First Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, 1997, 1: 75-79.
- [3] Starck J L, Murtagh F, Louys M. Astronomical image compression using the pyramidal median transform. IV. *ASP Conference Series*, 1995, 77(1): 162-165.
- [4] Melnik V P, Shmulevich I, Egiazarian K, Astola J. Block-median pyramidal transform: analysis and denoising applications. *IEEE Trans. on IP*, 2001, 49(2): 364-372.
- [5] Melnik V, Shmulevich I, Egiazarian K, Astola J. Image denoising using a block-median pyramid, in *Proc. IEEE Int. Conf. Image Process.*, Kobe, Japan, 1999: 84-87.
- [6] Yin L, Yang B, Gabbouj M. Weighted median filters: a tutorial. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 1996, 43(3): 157-192.
- [7] Donoho D L. Denoising by soft thresholding. *IEEE Trans. Info. Theory*, 1994, 41(3): 613-627.
- [8] Zervakis M E, Sundararajan V, Parhi K K. A wavelet-domain algorithm for denoising in the presence of noise outliers. Washington, DC, USA, 1997, 1: 632-635.
- [9] Chang S G, Yu B, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising, *IEEE Trans. on IP*, 2000, 9(9): 1522-1531.
- [10] Gong W, Shi Q Y, Cheng M D. CB morphology and its applications, *Proc. Int. Conf. for Young Computer Scientists*, Beijing, 1991: 260-264.

黄文涛: 男, 1978 年生, 硕士生, 研究方向为小波分析、智能信息处理、图像处理与模式识别。
 毕笃彦: 男, 1962 年生, 教授, 博导, 研究方向为计算机视觉、数据压缩、图像处理与模式识别。
 毛柏鑫: 男, 1939 年生, 教授, 研究方向为信号处理、图像处理与模式识别。
 马时平: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向为计算机视觉、图像处理与模式识别。