

通道失配条件下的 MUSIC 算法性能分析¹

苏卫民 倪晋麟* 刘国岁 张光义* 周德全

(南京理工大学电子工程系 南京 210094)

*(南京电子技术研究所 南京 210013)

摘 要 本文分析了通道失配对高分辨率谱估计算法 (MUSIC) 的影响, 推导了通道失配与方向估计误差的关系表达式, 给出了 Cramer-Rao 界和计算机模拟结果。理论和仿真结果表明: 通道失配会增大方向估计误差, 使其性能变坏。

关键词 通道失配, 方向估计, 自适应阵列

中图号 TN911.7

1 引 言

在阵列信号处理中, 基于特征分解的高分辨率方向估计技术自从被 Pisarenko^[1]、Schmidt^[2]等人提出以来, 一直受到人们极大的关注和研究。这种方法通常利用来自传感器阵列输出信号的协方差矩阵的某些特性而产生实际信号方向上的空域谱峰值。从而估计出实际的目标信号方向。这就是所谓的 MUSIC^[3](Multiple Signal Classification) 算法。在实际系统中, 存在着各种各样的误差, 如噪声模型、有限采样以及通道之间频率特性上的差异等等。本文采用了 FIR 通道模型^[4], 分析了通道的不一致性 (幅相误差) 对算法的影响。给出了宽带信号下的 MUSIC 算法及通道模型并进行了误差分析, 推导了幅相误差对空域谱方向估计的影响, 给出了计算机模拟结果。

2 MUSIC 算法及通道模型

2.1 MUSIC 算法

我们考虑的阵列是由 N 个各向同性阵元以线性等间距 d 排列, 假定 D 个远场宽带目标信号源的方向为 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)$ (θ_i 为入射方向与阵元面法向夹角), 则在第 n 个阵元 ($n = 1, 2, \dots, N$) 上所接收到的信号可以表示为

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^D S_i(t - 2\pi(n-1)d \sin \theta_i / \lambda) + n_n(t), \quad (1)$$

其中 $S_i(t)$ 是第 i 个目标源所发出的信号, λ 是载波波长, $n_n(t)$ 是 n 个阵元通道的高斯热噪声, 这里我们以第一个阵元作为参考点。对 (1) 式进行傅里叶变换, 可以在频域分析所接收到的信号, 我们有

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^D S_i(\omega) e^{-j2\pi(n-1)d \sin \theta_i / \lambda} + n_n(\omega) = x_{sn}(\omega) + n_n(\omega). \quad (2)$$

¹ 1996-01-18 收到, 1996-12-12 定稿

以矩阵形式可以表示为

$$X(\omega) = A(\theta)S(\omega) + N(\omega) = X_s(\omega) + N(\omega), \quad (3)$$

这里 $X(\omega) = [x_1(\omega), x_2(\omega), \dots, x_N(\omega)]^T$, $A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_D)]$,
 $a(\theta_i) = [1, e^{-j2\pi d \sin \theta_i / \lambda}, \dots, e^{-j2\pi(N-1)d \sin \theta_i / \lambda}]^T$, $S(\omega) = [s_1(\omega), s_2(\omega), \dots, s_D(\omega)]^T$,
 $N(\omega) = [n_1(\omega), n_2(\omega), \dots, n_N(\omega)]^T$, $X_s(\omega) = [x_{s1}(\omega), x_{s2}(\omega), \dots, x_{sN}(\omega)]^T$,

上标 T 表示矩阵的转置, 方向矩阵 $A(\theta)$ 的第 i 列 $a(\theta_i)$ 是第 i 个目标源的方向矢量。基于特征结构的参数估计技术的实现是对上述接收到信号的协方差矩阵的特征分解。为此, 假定信号与噪声是不相关的, 且均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯白噪声。所以有

$$R = \varepsilon\{X(\omega)X^*(\omega)\} = A(\theta)\varepsilon\{S(\omega)S^*(\omega)\}A^*(\theta) + \sigma_n^2 I. \quad (4)$$

这里我们先假定各通道频率特性一致, 且各个通道的噪声功率均为 σ_n^2 。采用 MUSIC 方法, 要求 $S(\omega)S^*(\omega)$ 是满秩矩阵, 即 $\text{rank}\{\varepsilon\{S(\omega)S^*(\omega)\}\} = D$, 对 R 进行特征分解可以得到

$$R = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i e_i^* = E_s \Lambda_s E_s^* + \sigma_n^2 E_n E_n^*. \quad (5)$$

这里 $E_s = [e_1, \dots, e_D]$, $E_n = [e_{D+1}, \dots, e_N]$, 并且 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_D \geq \lambda_{D+1} = \dots = \lambda_N = \sigma_n^2$, 特征矢量 $E = [E_s E_n]$ 可以被假定为一组正交基, 即 $EE^* = E^*E = I$ 。 D 个矢量 E_s 所张成的空间被称为信号子空间, 而 E_n 被定义为噪声子空间, E_s 和 E_n 正交, 也就是实际信号的方向矢量 $A(\theta)$ 和 E_n 正交, 即 $A(\theta)^* E_n = 0$ 。由此可以定义 MUSIC 空域谱:

$$f(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} a^*(\theta) E_n E_n^* a(\theta), \quad (6)$$

这里 $a(\theta) = [1, Z, Z^2, \dots, Z^{N-1}]$, $Z = e^{-j2\pi d \sin \theta / \lambda}$, 显然, 当 $\theta = \theta_i (i = 1, 2, \dots, D)$ 时, $f(\theta)$ 出现零点, 我们称之为零谱。但在计算机仿真时所作的空域谱通常采用上式的倒数。

2.2 通道模型

由于信号具有一定的带宽, 且实际系统通道包括高放、混频、解调等模拟电路, 也具有一定的带宽。可用横向滤波器模拟接收通道的频率特性, 其传输函数为

$$h_n(\omega) = \sum_{m=0}^L a_{nm} \exp(-j\omega m T_0), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

式中 T_0 为抽头延迟时间。当 N 个通道的频率特性一致时, 即有 $a_0 = a_{10} = a_{20} = \dots = a_{N0}$,
 $a_1 = a_{11} = a_{21} = \dots = a_{N1}, \dots, a_L = a_{1L} = a_{2L} = \dots = a_{NL}$, $h(\omega) = h_1(\omega) = \dots = h_N(\omega)$ 。所以, 理想情况下的传输函数可以表示为

$$h(\omega) = \sum_{m=0}^L a_m \exp(-j\omega m T_0). \quad (7a)$$

3 误差分析

理想情况下, 阵元所接收到的信号经过通道以后变为

$$S(\omega) = [s_1(\omega)h(\omega), s_2(\omega)h(\omega), \dots, s_N(\omega)h(\omega)]^T = [s_1(\omega), s_2(\omega), \dots, s_N(\omega)]^T h(\omega), \quad (8)$$

从而阵列输出信号协方差矩阵为

$$R = \varepsilon\{X(\omega)X^*(\omega)\} = A(\theta)\varepsilon\{S(\omega)h(\omega)h^*(\omega)S^*(\omega)\}A^*(\theta) + \sigma^2 I. \quad (9)$$

然而实际的系统很难保证各通道频率特性的一致性, 这种不一致性会大大降低自适应阵列的性能^[4,5]. 我们在滤波器系数 $a_{nm}(n = 1, 2, \dots, N)(m = 0, 1, \dots, L)$ 上加入幅度和相位的随机扰动来表征这种不一致性, 由此可得到不一致条件下的滤波器的传递函数

$$\tilde{h}_n(\omega) = \sum_{m=0}^L a_{nm}(1 + \mu_{nm})e^{j\Phi_{nm}} \exp(-j\omega m T_0), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, L \quad (10)$$

这时 (8) 式变为

$$\tilde{S}(\omega) = [s_1(\omega)\tilde{h}_1(\omega), s_2(\omega)\tilde{h}_2(\omega), \dots, s_N(\omega)\tilde{h}_N(\omega)]^T = S(\omega) \odot \tilde{H}(\omega), \quad (11)$$

$$\tilde{H}(\omega) = [\tilde{h}_1(\omega), \tilde{h}_2(\omega), \dots, \tilde{h}_N(\omega)]^T, \quad (12)$$

$\odot$ 表示 Schur(Hadamard) 乘积, $(X \odot Y)_{ik} = X_{ik} \cdot Y_{ik}$, 从而阵列输出信号协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \varepsilon\{\tilde{X}(\omega)\tilde{X}^*(\omega)\} \\ &= A(\theta)\varepsilon\{S(\omega) \odot \tilde{H}(\omega)\tilde{H}^*(\omega) \odot S^*(\omega)\}A^*(\theta) + \sigma_n^2 I, \end{aligned} \quad (13)$$

而 $\tilde{R}$ 的某一个元素 $\tilde{R}(l, k)$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{R}(l, k) &= \varepsilon\{\tilde{x}_l(\omega)\tilde{x}_k^*(\omega)\} \\ &= \varepsilon\left\{\sum_{i=1}^D S_i(\omega)e^{-j2\pi(l-1)d \sin \theta_i / \lambda} \tilde{h}_1(\omega) \sum_{i=1}^D S_i^*(\omega)e^{j2\pi(k-1)d \sin \theta_i / \lambda} \tilde{h}_k^*(\omega)\right\} + \sigma_n^2 \delta_{lk} \\ &= \sum_{i=1}^D p_i e^{-j2\pi(l-k)d \sin \theta_i / \lambda} \varepsilon\{\tilde{h}_1(\omega)\tilde{h}_k^*(\omega)\} + \sigma_n^2 \delta_{lk}. \end{aligned} \quad (14)$$

这里我们假设 D 个信号相互独立且均值为零, $p_i(i = 1, 2, \dots, D)$ 为信号功率. 将 (10) 式代入 (14) 式可以得到

$$\tilde{R}(l, k) = (1 - \sigma_\varphi^2)R_0(l, k) + \left[(\sigma_\varphi^2 + \sigma_a^2) \sum_{i=1}^D p_i \sum_{m=0}^L |a_m|^2 + \sigma_n^2\right] \delta_{lk}, \quad (15)$$

$$R_0(l, k) = \sum_{i=1}^D p_i e^{-j2\pi(l-k)d \sin \theta_i / \lambda} \sum_{m_1=0}^L \sum_{m_2=0}^L a_{lm_1} a_{km_2}^* \exp(-j\omega(m_1 - m_2)T_0), \quad (16)$$

$R_0(l, k)$ 为通道一致时输出信号 (不含噪声) 协方差矩阵的元素, σ_φ^2 、 σ_a^2 为相位和幅度扰动方差. 令 $\sum_{i=1}^D p_i \sum_{m=0}^L |a_m|^2 = A$, 则 (15) 式变为

$$\tilde{R}(l, k) = (1 - \sigma_\varphi^2)R_0(l, k) + [(\sigma_\varphi^2 + \sigma_a^2)A + \sigma_n^2]\delta_{lk} = (1 - \sigma_\varphi^2)R_0(l, k) + (\sigma_e^2 + \sigma_n^2)\delta_{lk}, \quad (17)$$

其中 $(\sigma_\varphi^2 + \sigma_a^2)A = \sigma_e^2$, 这时 (13) 式可以表示为

$$\tilde{R} = (1 - \sigma_\varphi^2)R_0 + (\sigma_e^2 + \sigma_n^2)I, \quad (18)$$

式中 $R_0 = A(\theta)\varepsilon\{S(\omega)h(\omega)h^*(\omega)S^*(\omega)\}A^*(\theta)$, (18) 式是通道失配对协方差矩阵的影响。

下面我们分析这种影响对方向估计所产生的一些结果。由于在实际系统中, 我们只能得到有限采样来近似估计协方差矩阵。首先, 我们在时域得到 M 次快拍, 然后作 M 点离散傅里叶变换 (DFT), 就可求得信号协方差矩阵的估计。由协方差矩阵的估计误差而带来的方向估计误差为 $(\hat{\theta}_i - \theta_i)$, 它随采样数 M 渐近分布, 文献 [6] 给出了方向估计误差的协方差矩阵。采用同样的分析方法以及上面得到的误差协方差矩阵, 可以得到系统存在频率失配时方向估计误差的协方差矩阵

$$C_{MU} = [(\sigma_e^2 + \sigma_n^2)/(2M)](Q \odot I)^{-1}[\text{Re}\{Q \odot (1/(1 - \sigma_\varphi^2))P^{-1} + [(\sigma_e^2 + \sigma_n^2)/(1 - \sigma_\varphi^2)^2](PA^*AP)^{-1})^T\}](Q \odot I)^{-1}, \quad (19)$$

其中 $D = [d(\theta_1), d(\theta_2), \dots, d(\theta_D)]$, $d(\theta) = \partial a(\theta)/\partial \theta$, $Q = D^*P_A^\perp D$, $P_A^\perp = I - A(A^*A)^{-1}A^* = E_n E_n^*$, $P = \varepsilon\{S(\omega)S^*(\omega)\}$ 。由于 $\sigma_\varphi^2 < 1$, 所以有

$$(1 - \sigma_\varphi^2)^{-1} = 1 + \sigma_\varphi^2 \quad (20)$$

$$(1 - \sigma_\varphi^2)^{-2} = 1 + 2\sigma_\varphi^2 \quad (21)$$

将 (20)、(21) 式代入 (19) 式并略去高次误差项后可得

$$C_{MU} = C_{MUF} + C_{MUC}, \quad (22)$$

其中 C_{MUF} 表示由于有限采样所引起的误差 [6], C_{MUC} 表示由于通道失配所引起的误差, 可用下式表示:

$$C_{MUC} = [(\sigma_n^2 + \sigma_e^2)/(2M)](Q \odot I)^{-1}[\text{Re}\{Q \odot (\sigma_\varphi^2 P^{-1} + \sigma_e^2(PA^*AP)^{-1})^T\}](Q \odot I)^{-1} + [\sigma_e^2/(2M)](Q \odot I)^{-1}[\text{Re}\{Q \odot (P^{-1} + \sigma_n^2(PA^*AP)^{-1})^T\}](Q \odot I)^{-1}. \quad (23)$$

由上式可以看到, 通道失配引起的方向估计误差并不独立于通道高斯热噪声所引起的方向估计误差 (实际是有限采样所致) [3], 可以预见其失配所引起的误差一定会大于高斯热噪声所引起的误差。

采用同样的方法求得相应的方向估计误差 Cramer-Rao 界

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\theta) &\cong [(\sigma_n^2 + \sigma_e^2)/2]\{\sum_{i=1}^M \text{Re}[(1 - \sigma_\varphi^2)S^*(\omega_i)D^*[I - A(A^*A)^{-1}A^*] \\ &\quad \times D(1 - \sigma_\varphi^2)S(\omega_i)]\}^{-1} = \text{CRB}(\theta)_F + \text{CRB}(\theta)_C. \end{aligned} \quad (24)$$

这里 $S(\omega_i) = \text{diag}\{S_1(\omega_i), \dots, S_D(\omega_i)\}$, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示由 $\{\cdot\}$ 中的元素组成对角矩阵, $\text{CRB}(\theta)_C = (\sigma_e^2/2)\{\sum_{i=1}^M \text{Re}[(1 - \sigma_\varphi^2)S^*(\omega_i)D^*[I - A(A^*A)^{-1}A^*]D(1 - \sigma_\varphi^2)S(\omega_i)]\}^{-1}$ 是由于通道失配而引起的, $\text{CRB}(\theta)_F$ 是有限采样误差引起。

4 计算机模拟结果

我们采用傅里叶级数法设计 FIR 滤波器的系数, 阶数为 $L=80$, 截止频率 $\omega = 0.5\pi$, 采用 Hamming 窗减小纹波和过冲, 对 $a_{nm}(n=1, 2, \dots, N, m=0, 1, \dots, L)$ 加上扰动以后, 其阻带和通带的幅度发生了变化, 纹波增大。当 $\sigma_a^2 = \sigma_\varphi^2 = 0.001$ 时, 最大幅度扰动可达到 0.872dB, 相应地产生了相位扰动, 如 5、8 通道 (共 10 个通道) 相位波动的一个样本为 $\varphi_5 = 5.21^\circ$, $\varphi_8 = -4.86^\circ$ 。

MUSIC 算法给出的空域谱如图 1。我们采用 10 个阵元并以线性等间距 (二分之一载波波长) 排列。输入两个目标信号, 其信噪比为 30dB, 图 1 中 $\theta_1 = 25^\circ$, $\theta_2 = 28^\circ$, 采样次数为 200。图中虚线表示理想系统 (无失配情况), 实线为系统存在幅相误差的情况, 其失配方差为 $\sigma_a^2 = \sigma_\varphi^2 = 0.001$ 。从图形上看, 空域谱峰值部分发生了变化, 其值有显著的降低, 即当幅度和相位有 3.16% 的扰动时, 谱峰将被降低大约 48dB。应当注意到: 幅相误差不仅降低了谱峰值, 而且有时会改变峰值的位置。由此可见通道失配对空域谱所带来的影响。

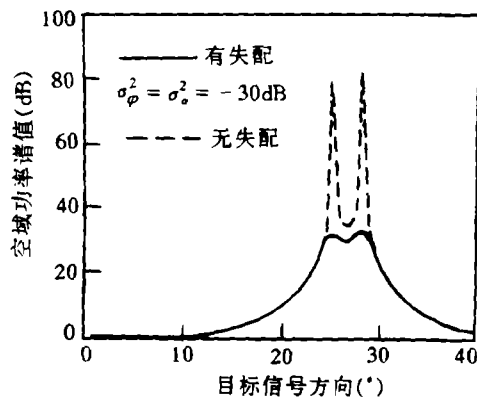


图 1 MUSIC 空域谱

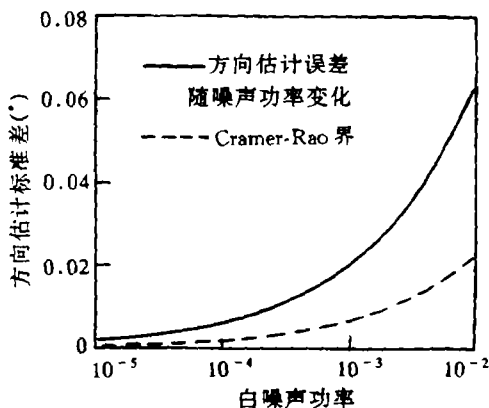


图 2 噪声功率引起的方向估计误差

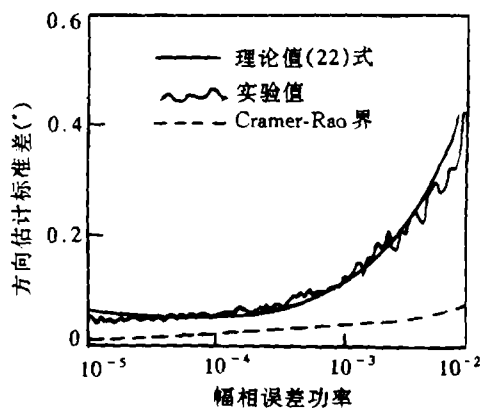


图 3 通道失配下的方向估计误差

图 2 画出了方向估计的均方根误差和噪声功率的关系。图 3 画出了引入通道误差以后, 方向估计的均方根误差和失配方差的关系, 两图分别画出了相应的 Cramer-Rao 界。与图 1 一样, 我们输入两个目标信号, 图 3 中的实验曲线是 Monte-Carlo 100 次试验的平均。为了比较噪声方差和失配方差对方向估计误差的影响, 我们取较小的信噪比和采样数 ($\text{SNR}=20\text{dB}, M=100$), 从图中可以看出, 失配所带来的方向估计误差远大于噪声所带来的方向估计误差。同样方差的情况下, 前者大约是后者的 6 倍左右。另外, 当失配方差或噪声方差较大时, 方向估计标准差更加远离 Cramer-Rao 界, 说明在误差较大的系统中有更大的校正潜力。仿真结果也证明了理

论预测的正确性。

5 结 论

本文分析了通道失配对 MUSIC 算法性能的影响, 主要分析了对方向估计误差的影响。理论分析和计算机模拟结果表明: 通道失配对方向估计精度产生了较大的影响。一般情况下, 其影响远大于通道热噪声对方向估计的影响。对于阵列设计者来说, 在测定阵列通道参数误差的情况下, 必须知道由此带来的方向估计误差大小。反之, 在给定了容许的方向估计误差时, 对元件和系统提出一定的指标要求从而不仅可以保证系统能够正常工作, 有时还可以降低成本。因此, 研究失配误差和方向估计误差的定量关系对于进行实际的阵列设计工作具有一定的指导意义。

参 考 文 献

- [1] Pisarenko V F. The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1973, 15(1): 247-266.
- [2] Schmitdt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. in *proc. RADC Spectral Est. Workshop*, Rome, NY, 1979, 243-258
- [3] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. on ASSP*. 1990, ASSP-37(5): 720-741.
- [4] 张林让, 保铮, 张玉洪. 通道响应失配对 DBF 天线旁瓣电平的影响. *机载预警雷达技术交流会论文集*. 北京: 1993.4, 181-188.
- [5] 倪晋麟, 李振, 张光义. 通道失配对自适应阵列的影响. *现代雷达*, 1994, 16(3): 53-59.
- [6] Swindlehurst A, Kailath T. A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model error: Part I-The MUSIC algorithm. *IEEE Trans. on SP*. 1992, SP-40(7): 1758-1774.

A PERFORMANCE ANALYSIS OF THE MUSIC ALGORITHM IN THE PRESENCE OF CHANNEL MISMATCHING

Su Weimin Ni Jinlin* Liu Guosui Zhang Guangyi* Zhou Dequan

(*Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094*)

*(*Nanjing Research Institute of Electronic Technology, Nanjing 210013*)

Abstract This paper presents the performance analysis of the MUSIC algorithm in the presence of channel mismatching. Theoretical expression for the error of DOA estimating with MUSIC algorithm and Cramer-Rao bound are derived. It is compared with simulations performed for some representative cases. The results of theoretical expression and simulation show that existence of channel mismatching will increase the error of DOA estimating and degrade its performance.

Key words Channel mismatching, Estimation of Direction-of-Arrival(DOA), Adaptive array

苏卫民: 男, 1962 年生, 讲师, 通信与电子系统博士生, 主要研究方向为阵列信号处理。

倪晋麟: 男, 1961 年生, 研究员, 从事雷达系统及雷达信号处理技术研究。

刘国岁: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要从事噪声雷达及连续波雷达系统及信号处理技术研究。