第 22 卷 第 4 期
2000 年 7 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.22 No.4
July 2000

基于模代数的真值向量计算及其在多值逻辑综合中的应用 [1]

洪晴华　　夏银水 *

(宁波大学科技学院　宁波　315211)
*(宁波大学物理系　宁波　315211)

摘　要　本文提出了由函数的真值向量计算 Reed-Muller 展式的简捷方法，由此可判定函数能否线性分解或部分线性分解．用典型例子演示了其在多值逻辑综合中的应用，结果表明该方法行之有效．

关键词　多值逻辑，模代数，真值向量，Reed-Muller 函数，Kronecker 积，逻辑综合
中图号　TN79

1 引　言

Reed-Muller(RM) 展式是定义在 GF(p) 上的多元函数，当 $p=2$ 时即为 "异或" 函数，对其作深入研究有实际意义 [1,2]．记它的真值向量 $f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1)]$ 为 d:

$$d = (f(0,\cdots,0), f(0\cdots,0,1),\cdots,f(p-1,\cdots,p-1)) = (f_0, f_1,\cdots,f_{p^n-1}). \tag{1}$$

由于真值向量表示设计要求与功能，而函数表达式表示了元件间的结构与设计成本，需要简捷表示，因而研讨两者之间的内在联系既有理论价值又有实际意义．本文在文献 [1,2] 的基础上，引入向量的 3^k 收缩、K 和、线性分解、部分线性分解等概念，通过典型例子有效地验证了所推导公式的正确性和收缩方法的简捷性，揭示了真值向量与函数表达式之间的内在关系．最后用实例演示了该方法在多值逻辑综合中的应用．

2 多元多项式的线性分解

定义在 GF(p) 上的 RM 展开式为

$$f(x_n,\cdots,x_1) = \sum_{j=0}^{N} b_j x_n^{j_n}\cdots x_1^{j_1}, \quad N = p^n - 1, \tag{2}$$

其中 $j_n,\cdots,j_1, b_j \in L$，$L=\{0,1,\cdots,p-1\}$, $<j>_{10}=<j_nj_{n-1}\cdots j_1>_p$, 即 j 的 10 进制表示等于 $j_nj_{n-1}\cdots j_1$ 的 p 进制表示．

$$称f(x_n,\cdots,x_1)为线性函数,\quad 如果f(x_n,\cdots,x_1) = b_nx_n+\cdots+b_1x_1+b_0; \tag{3}$$

$$称f(x_n,\cdots,x_1)可线性分解,\quad 如果f(x_n,\cdots,x_1) = f_n(x_n)+\cdots+f_1(x_1); \tag{4}$$

$$称f(x_n,\cdots,x_1)可部分线性分解,\quad 如果f(x_n,\cdots,x_1) = f_{n,K}(x_n,\cdots,x_K)+f_{K-1}(x_K) +\cdots+f_1(x_1). \tag{5}$$

[1] 1998-09-23 收到，1999-07-01 定稿
浙江省教委科研基金和宁波市青年科学基金资助项目

为方便且不失一般性，以下对 $p=3$ 的情况进行讨论.

对于单变量函数 $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$，显然有 27 种不同的真值向量，例如 $f(x)=1+2x+x^2$，$d=f]=(f(0),f(1),f(2))=(1,1,0)$.

定义 1 向量的三三收缩

对 3^n 维向量 A，以三个元素为一节，分为 3^{n-1} 节. 如果第一节为 $a_0a_1a_2$，其余各节为 $(a_0+i)(a_1+i)(a_2+i),(i=0,1,2)$ 中的一种，则称 A 可以三三收缩，如果将 $a_0a_1a_2$ 对应 $\alpha(\alpha\in L=\{0,1,2\})$，记为 $a_0a_1a_2|-\alpha$，则 $(a_0+i)(a_1+i)(a_2+i)|-\alpha+i$，称 A 可以三三收缩为 A_1，A_1 为 3^{n-1} 维向量.

定义 2 向量的 3^k 收缩

对 3^n 维向量, 以 3^k 个元素为一节, 分为 3^{n-k} 节, 如果第一节为 $a_0a_1\cdots a_{3^k-1}$，其余各节为 $(a_0+i)(a_1+i)\cdots(a_{3^k-1}+i)(i=0,1,2)$ 中的一种, 则称 A 可以 3^k 收缩, 如果将 $a_0a_1\cdots a_{3^k-1}$ 对应 $\alpha(\alpha\in L=\{0,1,2\})$ 记为 $a_0a_1\cdots a_{3^k-1}|-\alpha$，则 $(a_0+i)(a_1+i)\cdots(a_{3^k-1}+i)|-\alpha+i$，称 A 可以 3^k 收缩为 A_1，A_1 为 3^{n-k} 维向量. 显然，三三收缩即为 $k=1$ 时的 3^k 收缩.

例 1 设 d=(020020020, 020101212, 020101212, 101101101, 101212020, 101212020, 101101101, 101212020, 101212020)，令 $020|-0$，则 $d|-d_1=(000,012,012,111,120,120,111,120,120)$，再令 $(000012012)|-0$，则 $d_1|-d_2=(011)$. 此例中第一次为三三收缩，第二次为 3^2 收缩.

定义 3 向量的完全收缩

对 3^n 维向量 A，如果经 $n-1$ 次三三收缩，收缩到一个三元组，则称 A 可以完全收缩. 如果 $f(x_n,\cdots,x_1)=f_{n,2}(x_n,\cdots,x_2)+f_1(x_1)$，则 $f(x_n,\cdots,x_1)]=f_{n,2}(x_n,\cdots,x_2)]\otimes(111)+(111)\otimes\cdots\otimes(111)\otimes f_1(x_1)]$ 此处 $\otimes$ 为 Kronecker 乘积，记 $I_3=(111)$，则 $f(x_n,\cdots,x_1)]=f_{n,2}(x_n,\cdots,x_2)]\otimes I_3+I_{3^{n-1}}\otimes f_1(x_1)]$. 由于 $f_{n,2}]\otimes(111)$ 和 $I_{3^{n-1}}\otimes f_1]$ 都可以三三收缩，故 $f(x_n,\cdots,x_1)]$ 可以三三收缩. 另一方面，如果 $f(x_n,\cdots,x_1)]$ 可以三三收缩，则一定可以将 $f(x_n,\cdots,x_1)]$ 改写成 $f_{n,2}(x_n,\cdots,x_2)]\otimes I_3+I_{3^{n-1}}\otimes f_1(x_1)]$ 形式，因而 $f(x_n,\cdots,x_1)=f_{n,2}(x_n,\cdots,x_2)+f_1(x_1)$. 由此可得:

定理 1 $f(x_n,\cdots,x_1)$ 可分解为 $f(x_n,\cdots,x_1)=f_{n,2}(x_n,\cdots,x_2)+f_1(x_1)$ 的充要条件为 $f(x_n,\cdots,x_1)]$ 可三三收缩.

用类似的思想还可以证明以下定理:

定理 2 如果 $f(x_n,\cdots,x_1)$ 的真值向量可进行 3^k 收缩, 则 $f(x_n,\cdots,x_1)=f_{n,k+1}(x_n,\cdots,x_{k+1}+f_{k,1}(x_k,\cdots,x_1)$.

定理 3 如果 $f(x_n,\cdots,x_1)$ 可线性分解，则 $f]$ 必可以完全收缩，并且第 i 步收缩过程也是判定 f 中是否含有 $f_i(x_i)$ 的过程.

定理 4 (定理 3 的逆定理) 如果 f 的真值向量可以完全收缩，则 f 一定可以线性分解.

对于上面的例 1，设 $d=f]$，由于第一次三三收缩为 $020|-0$，故 $f(x_n,\cdots,x_1)$ 可分解出 $f_1(x_1)=x_1^2+x_1$；对于 $d_1=(000,012,012,111,120,120,111,120,120)$ 虽然不能三三收缩，但可以进行 3^2 收缩 $(000,012,012)|-0$，而 $(000012012)=(011)\otimes(012)$. 因此，$f$ 中还可分解出 $f_{3,2}(x_3,x_2)=x_3^2x_2$. 最后收缩后的向量为 $d_2=(011)$, 所以 f 可分解为 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)=f_4(x_4)+f_{3,2}(x_3,x_2)+f_1(x_1)=x_4^2+x_3^2x_2+x_1^2+x_1$.

例 2 已知: $f]=(102102210,210210021,210210021,102102210,210210021,210210021,$

021021102, 102102210, 102102210)．

令 102|−0，可三三收缩为 $d_1=(001,112,112,001,112,112,220,001,001)$，故 f 中含有 $f_1(x_1)=2x_1+1$；在 d_1 中含有 001|−0，得 $d_2=(011011200)$，故 f 中含有 $f_2(x_2)=2x_2^2+x_2$；在 d_2 中含有 011|−0，得 $d_3=(002)$，故 f 中有 $f_3(x_3)=x_3^2$；由于 (002) 是 x^2+2x 的真值向量，故 f 中有 $f_4(x_4)=x_4^2+2x_4$．所以 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)=x_4^2+2x_4+x_3^2+2x_2^2+x_2+2x_1+1$．

定义 4 向量的 K 和　设 α 是 m 维向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，β 是 n 维向量 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记 α 与 β 的 K 和 $\alpha\oplus_K\beta\equiv\alpha\otimes I_n+I_m\otimes\beta$，其中 I_n、I_m 分别是元素均为 1 的 n 维和 m 维向量.

定理 5　$f(x_n,\cdots,x_1)]$ 可以三三收缩的充要条件为 $f(x_n,\cdots,x_1)]$ 可以表示为 $\alpha\oplus_K\beta$ 形式，其中 $\alpha\in L^{3^{n-1}}$，$\beta\in L^3$．

证明　($\Rightarrow$) 因为 $f(x_n,\cdots,x_1)]$ 可以三三收缩，故对于任意 $j\in\{0,1,2,3^{n-1}-1\}$，必存在 $t_j\in L$，使得 $(a_{3j},a_{3j+1},a_{3j+2})=(a_0+t_j,a_1+t_j,a_2+t_j)=(a_0+t_j)\otimes_k(0,a_1+2a_0,a_2+2a_0)=(a_{3j})\otimes_k(0,a_1+2a_0,a_2+2a_0)$，所以 $f]=(a_0,a_3,\cdots,a_{3^{n-1}-3})\otimes_k(0,a_1+2a_0,a_2+2a_0)=\alpha\otimes_k\beta$．
($\Leftarrow$) 设 $\alpha=(\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{3^{n-1}-1})$，$\beta=(\beta_0\beta_1\beta_2)$，$f]=\alpha\otimes_K\beta=(\alpha_0+\beta_0,\alpha_0+\beta_1,\alpha_0+\beta_2,\cdots,\alpha_{3^{n-1}-1}+\beta_0,\alpha_{3^{n-1}-1}+\beta_1,\alpha_{3^{n-1}-1}+\beta_2)$，令 $(\alpha_0+\beta_0,\alpha_0+\beta_1,\alpha_0+\beta_2)|-\alpha_0$，则 $f(x_n,\cdots,x_1)$ 可以三三收缩.　　证毕

定理 6　若 $f(x_n,\cdots,x_1)$ 可线性分解为 $f(x_n,\cdots,x_1)=f_n(x_n)+\cdots,+f_1(x_1)$，$f_i(x_i)$ 的真值向量 $f_i(x_i)]=(a_{i1}a_{i2}a_{i3})$，则有

$$f(x_n,\cdots,x_1)]=\mathop{\oplus_K}\limits_{i=n}^{1}(a_{i1}a_{i2}a_{i3}).\tag{6}$$

证明　当 $n=2$ 时，若 $f(x_2,x_1)=f_2(x_2)+f_1(x_1)$，则 $f]=(a_{21}a_{22}a_{23})\otimes(111)+(111)\otimes(a_{11}a_{12}a_{13})=(a_{21}a_{22}a_{23})\oplus_k(a_{11}a_{12}a_{13})$．假设 $n-1$ 个变量时 (6) 式成立，则有 $f=f_n(x_n)+f_{n-1,1}(x_{n-1},\cdots,x_1)$，$f]=f_n(x_n)]\otimes(111)\otimes\cdots\otimes(111)+(111)\otimes f_{n-1,1}(x_{n-1},\cdots,x_1)]=(a_{n1}a_{n2}a_{n3})\otimes_1^{n-1}I_3+I_3\otimes[\mathop{\oplus_K}\limits_{i=n-1}^{1}(a_{i1}a_{i2}a_{i3})=\mathop{\oplus_K}\limits_{i=n-1}^{1}(a_{i1}a_{i2}a_{i3})$．　　证毕

类似可证定理 6 的逆定理也成立，即如果 $f(x_n,\cdots,x_1)]=\mathop{\oplus_K}\limits_{i=n}^{1}(a_{i1}a_{i2}a_{i3})$，则 f 可线性分解.

3 应　用

在三值模代数中，模 3 加和模 3 乘构成运算完备集．单变量运算为极性变换运算，其电路实现如图 1 所示.

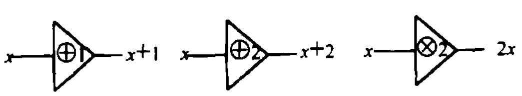

图 1　极性变换电路

对于两变量运算，通常用图 2 所示的图形符号来表示模 3 加和模 3 乘的电路实现.

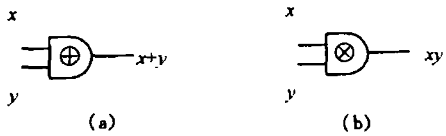

图 2 模 3 加和模 3 乘电路实现 (a) 模 3 加门 (b) 模 3 乘门

在三值逻辑中，两变量逻辑问题的设计和分析已相当繁琐，多于三变量逻辑问题的综合，实际上只是理论上的可能. 然而利用本文提出的理论，当逻辑问题满足三三收缩或 3^k 收缩条件时，对多变量逻辑问题的综合显得相当简单易行. 下面用实例来演示其在逻辑设计和分析中的应用.

逻辑设计的任务是根据逻辑问题作逻辑抽象，获取逻辑函数后用电路实现.

例 3 已知某三值四变量逻辑问题描述其逻辑功能的真值向量为 $f]$=(122110110, 200221221, 011002002, 011002002, 122110110, 200221221, 011002002, 122110110, 200221221) . 求取函数 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)$ 并实现其电路.

检视 $f]$ 不能三三收缩，但可以 3^2 收缩. 令 (122110110)|−0, 则 f 中有 $f_{21}(x_2,x_1)$ 项，收缩后的向量为 $d_1=(012201201)$.

由于 $(122110110)=(100)\otimes(122)+(011)\otimes(110)$. 故 $f_{21}(x_2,x_1)=(2x_2^2+1)(x_1^2+1)+x_2^2(x_1+1)^2=2x_2^2x_1+x_1^2+1$, 令 (012)|−0, d_1 收缩为 $d_2=(022)$, 则 f 中有 x_3 项，同时 (022) 对应 $2x_4^2$. 故 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)=2x_4^2+x_3+2x_2^2x_1+x_1^2+1$. 其电路实现如图 3 所示.

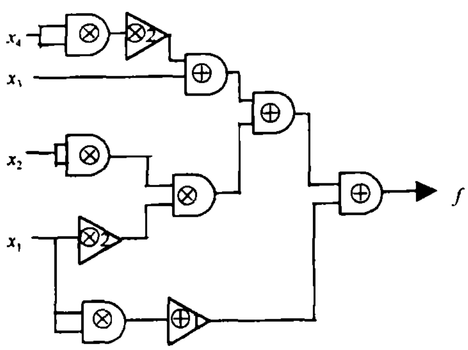

图 3 例 3 电路实现

由上例可以看到，利用 3^k 收缩，即使是一个四变量问题的逻辑设计也不难实现.

逻辑分析是逻辑设计的逆过程. 它是根据电路图得出逻辑函数，从而求出真值表，最终确定逻辑功能的过程. 试看下面例子.

例 4 试求取函数 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)=x_4^2+2x_4+x_3^2+2x_2^2+x_2+2x_1+1$ 的真值向量. 由函数表达式不难发现，该函数可线性分解，即可写成 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)=f_4(x_4)+f_3(x_3)+f_2(x_2)+f_1(x_1)$. 且有 $f_4(x_4)=x_4^2+2x_4$ ， $f_3(x_3)=x_3^2$ ， $f_2(x_2)=2x_2^2+x_2$ ， $f_1(x_1)=2x_1+1$. 易得 $f_4]=(002)$, $f_3]=(011)$, $f_2]=(001)$, $f_1]=(102)$, 由定理 6 ， 可求得

$$
\begin{aligned}
f] &= (002) \oplus_K (001) \oplus_K (102) = (002) \oplus_K (011) \oplus_K (102102210) \\
&= (002) \oplus_K (102102210, 210210021, 210210021) \\
&= (102102210, 210210021, 210210021, 102102210, 210210021, 210210021, \\
&\quad 021021102, 102102210, 102102210).
\end{aligned}
$$

根据真值向量与函数真值的一一对应关系，容易获得真值表. 从而根据逻辑值与物理量的对应含义可确定函数描述的逻辑功能.

例 5　已知函数 $f(x_4,x_3,x_2,x_1) = 2x_4^2 + x_3 + 2x_2^2x_1 + x_1^2 + 1$ ，求 $f(x_4,x_3,x_2,x_1)]$.

显然这又是一个逻辑分析问题，实际上这是例 3 的逆问题. 由函数表示式，可把函数作如下分解:

$f(x_4,x_3,x_2,x_1) = f_4(x_4) + f_3(x_3) + f_{21}(x_2,x_1)$ 有 $f_4(x_4)] = (022)$ ，$f_3(x_3)] = (012)$ ，$f_{21}(x_2,x_1)] = (122110110)$. 我们可采用两种方法来求取真值向量.

方法 1　K 积法

由于 $2x_2^2x_1] = (022)\otimes(012)$, $x_1^2+1 = (122)$, 故 $f] = (022)\otimes(111)\otimes(111)\otimes(111)+(111)\otimes(012)\otimes(111)\otimes(111)+(111)\otimes(111)\otimes(022)\otimes(012)+(111)\otimes(111)\otimes(111)\otimes(122)$. $f]$ 可以用 K 积的性质各项展开后相加求得.

方法 2　K 和法

利用 $f] = (022) \oplus_K (012) \oplus_K (122110110)$, $f]$ 可以用 K 和的性质，展开求得.

两方法都可得到

$f] = (122110110, 200221221, 011002002, 011002002, 122110110, 200221221, 011002002, 122110110, 200221221)$ 显然，如果 f 是部分可分解函数，用 K 和法较 K 积法简捷.

由上述两例可见，对于可线性分解函数或可部分分解函数来说，这种通过计算真值向量进行逻辑分析的方法，远较通过逐步计算 3^n 个函数真值进行分析的方法简单得多. 对比文献 [3] 的方法，此方法更为简捷.

4 结　论

对于真值向量的研究，文献 [4] 中曾用于寻找最优极性，使相应的 RM 展式在最优极性表达下项数最少，但对于真值向量的自身特征并无讨论. 本文提出向量的 3^k 收缩、完全收缩和 K 和等新概念，得到由真值向量推导可线性分解或可部分线性分解函数表达式的简捷办法. 由于真值向量 3^k 的收缩 $(k = 1,\cdots,n-1)$ 能否成立是非常容易判定的. 因而由真值向量判断函数能否线性分解是简便易行的. 对三值多变量函数逻辑综合的实例演示表明，本文提出的方法行之有效. 应当指出，本文提出的方法可适用更高基数的多值逻辑综合中.

参 考 文 献

[1] Green D H. Ternary Reed-Muller switching functions with fixed and mixed polarities. Int. J. Electronics, 1989, 67(5): 761–765.

[2] 吴训威. 多值逻辑电路设计原理, 杭州: 杭州大学出版社, 1994.10, 33-45.

[3] Benchu Fei, Qinghua Hong, Identification of linear ternary logic functions and its algorithms. IEEE Proceedings of the 24th International Symposium on Multiple-valued Logic; Boston: 1994.5, 324–327.

[4] 费本初，洪晴华．GF(3) 上多元多项式的化简．应用数学，1996, 9(2): 193-198.

CALCULATION OF TRUTH VECTOR BASED ON MODULAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS IN SYNTHESIS OF MULTIPLE-VALUED LOGIC

Hong Qinghua Xia Yinshui*

(*College of Science and Technology, Ningbo University, Ningbo* 315211)

*(*Department of Physics, Ningbo University, Ningbo* 315211)

Abstract In this paper, a simple and fast method for calculating Reed-Muller expression is presented by using truth vector of multiple-valued function, and whether a function can be linearly or partially linearly decomposed can be determined. By using typical examples, syntheses of multiple-valued logic functions are shown. The method turns out to be effective.

Key words Multiple-valued logic, Modular algebra, Truth vector, Reed-Muller expression, Kronecker product, Logic synthesis

洪晴华： 女，1941 年生，副教授，从事代数及多值逻辑的教学和研究工作，目前发表论文 20 余篇，学术专著一部，现为 IEEE 会员．

夏银水： 男，1963 年生，副教授，从事数字逻辑设计的教学和研究工作，发表学术论文 16 篇，现为中国高等师范电子学会常务理事．