

O型线性束微波器件中的能量关系*

姜遵富 方永绥 宋文森

提 要

本文从能量交换观点出发,以更加一般的方法由电子动力学方程分析了无限长系统中电子注与波非线性相互作用下的能量守恒普遍关系,得到了与文献[1]不同的结果,论述了守恒关系式中每项所表示的物理意义,讨论了有限长下线路输出功率的计算问题。

一

行波管中电子注与波相互作用过程分为两个方面,一是波对电子注的调制,一是电子注对波的激励,两者统一在一个整体中。行波管的理论分析皆据此概念分别给出两种作用下的方程,然后联立求得自洽解。

在讨论能量关系时,我们将主要从电子动力学方程出发。众所周知,电子在一维时变场中的动力学方程为

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{m} E, \quad (1)$$

式中 E 为总的轴向电场,包括线路场 E_c 和空间电荷场 E_s , 由叠加原理得

$$E = E_c + E_s \quad (2)$$

在 Rowe 的理论中^[2],引入了标量线路电压 V 概念,线路场 E_c 和 V 的关系为

$$E_c = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3)$$

将(3)式代入(1)得

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{m} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - E_s \right) \quad (4)$$

需要强调的是,(4)式是描述单个电子行为的,在非线性和相互作用过程中可直接应用。就是说,可将(4)式两边加以变换

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dz} \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dz} - \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \quad (6)$$

从而有

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dz} = e \left[\frac{dV}{dz} - \frac{1}{v} \frac{\partial V}{\partial t} - E_s \right] \quad (7)$$

将上式两边对 z 积分得

* 1978年4月11日收到。

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = e \left[(V - V_0) - \int_0^z \frac{1}{v} \frac{\partial V}{\partial t} dz - \int_0^z E_s dz \right]. \quad (8)$$

(8)式描述了在初始时刻 t_0 出发的单个电子经过 $(t - t_0)$ 时间后,从起点 $z = 0$ 到达 z 点所发生的动能变化与电场做功的关系. 显然,对于不同初始时刻 t_0 的电子,经过同样的距离间隔 $0 \sim z$, 不仅所需时间 $(t - t_0)$ 不同,其动能变化量亦不相同. 为求得一个周期 T 内所有电子在经过相同的距离后能量变化的总和,可对所有电子求和,即对时间积分. 在(8)式中, t 不仅是 z 的函数,同时亦是 t_0 的函数. 在对 t 积分时,由于存在电子超越现象, t 将是 t_0 的多值函数,使积分不易进行. 但 t_0 永远为 t 的单值函数,对 t_0 积分便可避开多值问题的困难. 这是了解非线性理论者所熟知的. 在这里,我们也将对 t 的积分变换成对 t_0 的积分. (8)式是时刻 t_0 的单个电子的表示式,在 t_0 至 $t_0 + dt_0$ 间隔内,所有电子皆可用它来表示. 设直流电流为 I_0 , 则 dt_0 内有电子数 $\frac{I_0}{e} dt_0$ 个,将其乘(8)式两边并在一个周期内积分然后平均得

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T [v^2(z, t) - v^2(0, t_0)] dt_0 &= \frac{I_0}{T} \left\{ \int_0^T [V(z, t) - V(0, t_0)] dt_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \int_0^z \frac{1}{v(z, t)} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} dz dt_0 - \int_0^T \int_0^z E_s dz dt_0 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

这就是能量守恒的一般表示式,对所有可引用电位概念的O型微波器件皆适用.

若电子初始速度相同,即 $v(0, t_0) = v_0$, 且入口处电荷密度均匀分布,则(9)式中

$$\frac{1}{T} \int_0^T v^2(0, t_0) dt_0 = v_0^2 \quad (10)$$

$$\int_0^T V(0, t_0) dt_0 = 0 \quad (11)$$

从而简化为

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T [v_0^2 - v^2(z, t)] dt_0 &= \frac{I_0}{T} \left[\int_0^T \int_0^z \frac{1}{v(z, t)} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} dz dt_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T V(z, t) dt_0 + \int_0^T \int_0^z E_s dz dt_0 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

上式表明,在一个周期内电子注损失的平均动能等于高频场得到的平均功率量与空间电荷场贮存的平均功率量之和.

为更清楚地说明高频场功率变化的物理意义,可将(12)式中右边第一、二两项略加变化. 我们在文献[3]中已经证明:以线路上 z 点的总线路电流 $I_c(z, t)$ 和 高频电压 $V(z, t)$ 表示的功率与(12)式右边第一项相等,即

$$\frac{1}{T} \int_0^T V(z, t) I_c(z, t) dt = \frac{I_0}{T} \int_0^T \int_0^z \frac{1}{v(z, t)} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} dz dt_0 \quad (13)$$

上式可用复数简洁地表示

$$P_{cl} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z) - \hat{V}^*(0) \hat{I}_c(0)] \quad (14)$$

又据电荷守恒原理有

$$I_0 dt_0 = I_c(z, t) dt \quad (15)$$

所以

$$\frac{I_0}{T} \int_0^T V(z, t) dt_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V(z, t) I_c(z, t) dt \quad (16)$$

上式同样可用复数表示成

$$P_{c2} = \frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z) \quad (17)$$

将(14)(17)两式代入(12)式得

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T [\nu_0^2 - \nu^2(z, t)] dt_0 &= \frac{1}{2} R_e [\hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z) - \hat{V}^*(0) \hat{I}_c(0)] \\ &\quad - \frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z) + \frac{I_0}{T} \int_0^T \int_0^z E_s dz d\phi_0 \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式是用 z 点的线路总电流 $I_c(z, t)$, 电子注电流 $I_e(z, t)$ 高频电压 $V(z, t)$ 及电子注速度 $\nu(z, t)$ 表示的无限长系统中, $(0, z)$ 封闭区间内能量守恒关系。高频场功率变化的物理意义是极为明显的。由(18)式可见它由两部分组成,第一部分是由线路电流 $I_c(z, t)$ 与高频电压 $V(z, t)$ 运载的功率流变化,第二部分是由电子注电流 $I_e(z, t)$ 与高频电压 $V(z, t)$ 运载的功率流变化。两者之和构成高频场能量的总变化。

(12)式或(18)式的结果与文献[1]由概念求得的能量守恒关系不仅在形式上不同,而且物理意义也不一样。在文献[1]中 Detweiler 和 Rowe 给出的能量守恒式为

$$2c \left\{ A^2(y) \left[1 + c \frac{b + \frac{d\theta}{dy}}{1 + cb} \right] - A_0^2 \right\} = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + 2cu(y, \phi_0)]^2 d\phi_0 \quad (19)$$

上式中忽略了空间电荷场,其左边由两部分功率流组成,第一部分为线路上 z 点总电流 $I_c(z, t)$ 与电压 $V(z, t)$ 运载的功率流,与(14)式相同,第二部分 Rowe 称之为耦合场平均功率,由下式给出

$$\begin{aligned} P_{b-c}(y) &= \frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_{in}(z) \\ &= -\frac{4c^2 I_0}{1 + cb} V_0 A(y) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi(y, \phi_0)}{1 + 2cu(y, \phi_0)} d\phi_0 \\ &\doteq 4c^2 A^2(y) \frac{b + \frac{d\theta}{dy}}{1 + cb} \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $\hat{I}_{in}(y)$ 为感应电流密度,由电子注电流 $I_e(z, t)$ 的距离变化率求得

$$I_{in}(z, t) = -\frac{\partial I_e(z, t)}{\partial z} \quad (21)$$

比较(18)和(19)(20)式,差别是显然的,我们得到的是 $1/2 R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z)$, 而 Rowe 给出的却是 $1/2 R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_{in}(z)$ 。我们这里的公式是由电子动力学方程推得的自然结果,Rowe 给出的式子系由概念而来。Rowe 称 $P_{b-c} = \frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_{in}(z)$ 为耦合场平均功率,我们

认为 $\frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z)$ 才是真正的耦合场累积平均功率。这一点在数学上是不难证明的,

由附录所给出的推导证明

$$\frac{1}{2} R_e [\hat{V}^*(z) \hat{I}_c(z) - \hat{V}^*(0) \hat{I}_c(0)] = - \int_0^z \frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_{in}(z) dz \quad (22)$$

(22)式表明线路上 $(0, z)$ 点的功率流变化系由从 0 到 z 的全部感应电流注入引起的, 即由耦合场功率密度 $\frac{1}{2} R_e \hat{V}(z) \hat{I}_{in}(z)$ 的距离积分来计算.

至此, 我们已经阐明了无限长电子注与波相互作用的能量守恒普遍关系及其各项的物理意义. 若我们进一步将 Rowe 理论中的电压和各归一化变量

$$\begin{aligned} y &= \frac{c\omega}{u_0} z \\ \phi_0 &= \omega t_0 \\ V(z, t) &= \frac{Z_0 I_0}{c} A(y) \cos \phi(y, \phi_0) \\ -\phi(z, t) &= \omega t - \left[\frac{y}{c} - \theta(y) \right] \\ \frac{dz}{dt} &= u_0 [1 + 2cu(y, \phi_0)] \end{aligned} \quad (23)$$

代入(12)式则得

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + 2cu(y, \phi_0)]^2 d\phi_0 \\ &= \frac{2c}{\pi} \int_0^y A(y) dy \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi(y, \phi_0)}{1 + 2cu(y, \phi_0)} d\phi_0 \\ &\quad - 4c^2 A(y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi(y, \phi_0) d\phi_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G E_s d\phi_0 dy \end{aligned} \quad (24)$$

其中 G 为一常数. 上式已被直流功率 $P_0 = I_0 V_0$ 归一化, 其意义为效率, 令

$$\eta_e = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + 2cu(y, \phi_0)]^2 d\phi_0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \eta_{R1} &= \frac{2c}{\pi} \int_0^y A(y) dy \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi(y, \phi_0)}{1 + 2cu(y, \phi_0)} d\phi_0 \\ &= 2c \left[A^2(y) \frac{1 - c \frac{d\theta}{dy}}{1 + bc} - A^2(0) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\eta_{R2} = -4c^2 A(y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi(y, \phi_0) d\phi_0 \quad (27)$$

$$\eta_s = \frac{G}{2\pi} \int_0^y \int_0^{2\pi} E_s d\phi_0 dy \quad (28)$$

分别表示相应的效率, 则得

$$\eta_e = \eta_{R1} + \eta_{R2} + \eta_s \quad (29)$$

这就是线路无损耗时电子注与波相互作用下的效率守恒式. 若进一步令

$$\eta_R = \eta_{R1} + \eta_{R2} \quad (30)$$

最终得

$$\eta_e = \eta_R + \eta_s \quad (31)$$

或

$$\eta_E = \eta_e - \eta_s = \eta_R \quad (32)$$

即无损耗线路中, 电子效率 η_E 与高频场效率 η_R 相等.

二

当把高频场能引出时, 电子注一波相互作用系统必成为有限长系统, 就是说, 传播波的慢波电路在输出端将与能量输出电路相匹配而在电子注行进方向中断, 高频场在此将改变传播方向, 与电子注相分离, 在输出端以后的电子注行进路途上将没有高频场 (空间电荷场仍存在). 在理想中断情况下, 系统的电场分布如图 1 所示. 由于在输出点 z_1 以后电场 E 为 0, 高频电压当然亦为 0, 不可能存在一个常数振幅的驻波电压 $C \cos \omega t$. 尽管此时电子注电流 $I_e(z, t)$ 仍可能足够大, 但它已不再运载高频功率流了. 在 z_1 点后电子注的动能亦不再与高频场之间发生能量交换, 就是说, z_1 点的电子注电流 $I_e(z_1, t)$ 与此点相应于电场 $E(z_1, t)$ 的电压 $V(z_1, t)$ 所体现的功率流 $\frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z_1) \hat{I}_e(z_1)$ 并未转变成电子注的动能. 那么

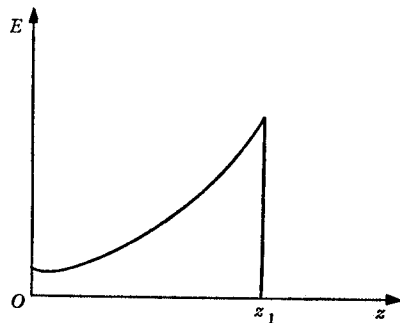


图 1

z_1 点的这部分功率流流到何处去了呢? 既然它并未被传输到收集极去 (空间电荷场贮存的功率可传输到收集极), 只能是被能量输出装置耦合出去了. 这是不难理解的. 在理想情况下, 输出装置应与线路特性阻抗相匹配. 热状态时, 即存在电子注情况时, z_1 点所表现的特性阻抗由两部分构成, 一是线路本身的特性阻抗 W_c , 一是电子注呈现的电子负载 Y_{ez1} 其大小为

$$Y_{ez1} = \frac{I_e(z_1, t)}{V(z_1, t)}. \quad (33)$$

输出装置显然要与特性阻抗 ($W_c + Z_{ez1}$) 相共轭匹配, 从而使全部高频场的有功功率被耦合至负载中去. 这就是说, 输出功率或效率的计算必须要考虑到 $\frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z_1) \hat{I}_e(z_1)$ 的贡献. 在小信号情况下, 这一项的贡献较小, 忽略它对结果不会带来很大误差. 在非线性相互作用情况下, 这一项贡献较大, 变得不能忽略了, 否则将导致很大的误差.

附 录

对于电荷量为 dQ 的一群电子, 有牛顿方程

$$\frac{dQ_m}{e} \frac{d^2 z}{dt^2} = dQ \left(\frac{\partial V}{\partial z} - E_s \right) \quad (34)$$

由电荷守恒律得

$$dQ = I_e dt = I_0 dt_0 \quad (35)$$

(35)式是对 z 和 $z = 0$ 的确定点而言的。将其代入(34)式得

$$\frac{I_0 dt_0}{\eta} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dz} = I_e dt \left(\frac{\partial V}{\partial z} - E_s \right) \quad (36)$$

(36)式右边第一项可表为

$$I_e \frac{\partial V}{\partial z} dt = \left(\frac{\partial I_e V}{\partial z} - V \frac{\partial I_e}{\partial z} \right) dt \quad (37)$$

所以有

$$\frac{I_0 dt_0}{2\eta} dv^2 = \left(\frac{\partial I_e V}{\partial z} - V \frac{\partial I_e}{\partial z} \right) dt dz - E_s dt dz \quad (38)$$

将(38)式两边对时间积分,对距离积分得

$$\frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T dt_0 \int_{v_0^2}^{v_z^2} dv^2 = \frac{1}{T} \int_0^z \int_0^T \left(\frac{\partial I_e V}{\partial z} - V \frac{\partial I_e}{\partial z} - E_s \right) dt dz \quad (39)$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T [v^2(z, t) - v^2(0, t_0)] dt_0 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^z \frac{d}{dz} \int_0^T I_e V dt \cdot dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^z \int_0^T V I_{in} dt dz - \int_0^z \int_0^T E_s dt dz \right] \end{aligned} \quad (40)$$

(40)式右边可以用复数形式方便地记为

$$\text{右边} = \frac{1}{2} R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_e(z) \Big|_0^z + \frac{1}{2} \int_0^z R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_{in}(z) dz - \frac{1}{T} \int_0^z \int_0^T E_s dt dz \quad (41)$$

将(41)式与(18)式相比较后即得:

$$\frac{1}{2} R_e [\hat{V}^*(z) \hat{I}_e(z) - \hat{V}^*(0) \hat{I}_e(0)] = - \frac{1}{2} \int_0^z R_e \hat{V}^*(z) \hat{I}_{in}(z) dz \quad (42)$$

参 考 文 献

- [1] H. K. Detweiler, and J. E. Rowe, *Advances in Microwaves*, **6** (1971), 30.
- [2] J. E. Rowe, "Nonlinear Electron-wave interaction phenomena", Academic Press, New York, 1965.
- [3] 姜遵富、方永绥、宋文淼、敖超、蔡金荣, 科学通报, **23** (1978), 31.