

谐波过程的高阶广义各态历经性的分析与应用¹

魏 平 肖先赐

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘 要 高阶统计在信号处理的许多领域得到了广泛应用。但在实际应用的许多情况下, 由于只能得到观测过程的一个样本, 所以只能用样本的时间平均来代替其统计平均。其前提是过程对该统计量具有广义的各态历经性。该文分析了谐波过程高阶统计量的各态历经性, 得到了谐波过程满足三阶、四阶矩和累积量广义各态历经的充要条件。然后研究了这些条件在高阶统计量的相位耦合识别、高阶阵列处理方法等问题中的应用, 并进行了模拟实验验证。

关键词 高阶统计量, 各态历经, 谐波过程, 累积量

中图分类号 TN911.23

1 引 言

高阶统计量可定义为一个母函数的 Taylor 级数展开式的系数。 $r = (k_1 + k_2 + \cdots + k_N)$ 阶矩 $M_{k_1 k_2 \cdots k_N}$ 为零均值随机变量 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots, N\}$ 的联合特征函数 $\Phi(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)$ 的原点斜率, r 阶累积量是其对数原点斜率^[1]:

$$M_{k_1 k_2 \cdots k_N} = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \Phi(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \cdots \partial \omega_N^{k_N}} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_N = 0} \quad (1)$$

$$C_{k_1 k_2 \cdots k_N} = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \ln \Phi(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \cdots \partial \omega_N^{k_N}} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_N = 0} \quad (2)$$

类似地可以定义一个零均值随机过程 $x(t)$ 的高阶统计量, 导出其一阶统计量是其均值, 二阶统计量是其相关函数:

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x^*(t+\tau)\} \quad (3)$$

三阶统计量 (矩或累积量) 为

$$T_x(\tau_1, \tau_2) = E\{x^*(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)\} \quad (4)$$

四阶矩为

$$M_x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = E\{x(t)x(t+\tau_1)x^*(t+\tau_2)x^*(t+\tau_3)\} \quad (5)$$

对称分布过程的四阶累积量为

$$C_x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = M_x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - R_x(\tau_2)R_x(\tau_3 - \tau_1) - R_x(\tau_3)R_x(\tau_2 - \tau_1) \quad (6)$$

类似地可定义出多个过程的联合高阶统计量。

目前高阶统计量在信号处理的许多领域得到了广泛应用^[1,2]。但在实际应用的许多情况下, 由于只能得到观测量中信号过程的一个样本而无法得到多个独立样本, 所以只能用样本的时间平均来代替其统计平均。但这一应用的前提是信号过程对该统计量具有广义的各态历经性。本文即是研究这一问题。均值各态历经性的定义是一个平稳随机过程的时间平均与其统计平均

¹ 2001-10-26 收到, 2002-06-13 改回

在均方意义下相等。其充分条件是过程的任意样本均值等于其统计平均。亦可用这一条件来定义各态历经性。对于高阶的各态历经性本文采用这样的定义, 即对任意一个样本的时间平均代替统计平均的高阶运算等于该高阶统计量。

谐波过程可看作多个独立初相单频信号的和。本文分析了谐波过程的广义各态历经性, 得到了谐波过程满足高阶统计量各态历经的充要条件。然后作为这一结论的应用本文讨论了高阶统计量在相位耦合识别^[2]、阵列处理^[3]等问题中应用时各态历经性的影响, 并用模拟实验进行验证。

2 谐波过程各态历经性分析

谐波过程由多个单频信号相加构成, 故对一个谐波过程的统计特性分析等效于对多个单频信号的联合统计分析。下面对 N 个独立初相单频信号联合高阶统计量的各态历经性进行分析。

模型 1 N 个单频信号:

$$s_i(t) = r_i \exp[j(\omega_i t + \Phi_i)], \quad r_i > 0, \quad \omega_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

式中 r_i 为确定量, 设各初相独立, 分别满足 $[0, 2\pi]$ 均匀分布, 且信号频率两两不等。假设 $s_i(t)$ 的一个任意样本为

$$\bar{s}_i(t) = r_i \exp[j(\omega_i t + \phi_i)], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

显然过程 $s_k(t)$ 的一阶统计量 (均值) 是各态历经的, 这是因为频率均不为零, 故任意样本的时间平均为零, 和统计平均的结果相等。 $s_{k_1}(t)$ 和 $s_{k_2}(t)$ 的二阶统计量 (相关函数) 为

$$R_{k_1 k_2}(\tau) = E\{s_{k_1}(t)s_{k_2}^*(t + \tau)\} = \begin{cases} r_k^2 \exp(-j\omega_k \tau), & k_1 = k_2 \equiv k \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

样本 $\bar{s}_{k_1}(t)$ 和 $\bar{s}_{k_2}(t)$ 按样本时间平均的相关函数为

$$\bar{R}_{k_1 k_2}(\tau) = \langle \bar{s}_{k_1}(t)\bar{s}_{k_2}^*(t + \tau) \rangle = \begin{cases} r_k^2 \exp(-j\omega_k \tau), & k_1 = k_2 \equiv k \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (10)$$

二阶统计量联合各态历经定义为: 对 $\forall k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$ 及任意样本, $\bar{R}_{k_1 k_2}(\tau) = R_{k_1 k_2}(\tau)$ 。由 (9) 和 (10) 式知模型 1 的联合二阶统计量 (互相关) 是各态历经的。这一结论依赖于模型频率两两不等的假设。

下面讨论三阶统计量 (累积量或矩) 的联合各态历经性。对于模型 1 的过程, 由于分布的对称性, 联合三阶统计量恒等于零:

$$T_{k_1 k_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) = E\{s_{k_1}^*(t)s_{k_2}(t + \tau_1)s_{k_3}(t + \tau_2)\} = 0, \quad \forall k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (11)$$

样本 $\bar{s}_{k_1}(t)$, $\bar{s}_{k_2}(t)$ 和 $\bar{s}_{k_3}(t)$ 按时间平均的联合三阶统计量的一种定义为

$$\bar{T}_{k_1 k_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) = \langle \bar{s}_{k_1}^*(t)\bar{s}_{k_2}(t + \tau_1)\bar{s}_{k_3}(t + \tau_2) \rangle \quad (12)$$

定义 1 $\forall k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, \dots, N\}$ 、任意样本及任意 τ_1, τ_2 , 若 $\bar{T}_{k_1 k_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) = T_{k_1 k_2 k_3}(\tau_1, \tau_2)$, 则称 $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 的联合三阶统计量具有各态历经性。

定理 1 模型 1 中多信号的联合三阶统计量满足各态历经的充要条件为 $\forall k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, \dots, N\}$ 有 $\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} \neq 0$ 。

证明 (8) 式代入 (12) 式,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{k_1 k_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} \exp\{j[(-\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3})t \\ & + (\omega_{k_2} \tau_1 + \omega_{k_3} \tau_2) + (-\phi_{k_1} + \phi_{k_2} + \phi_{k_3})]\} dt \end{aligned} \quad (13)$$

根据定义 1、(11) 式、(13) 式及 $\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \phi_{k_3}, \tau_1, \tau_2$ 的任意性可以得到定理的证明。

证毕

对于四阶统计量分为四阶矩和四阶累积量两种。对于 $s_{k_1}(t), s_{k_2}(t), s_{k_3}(t), s_{k_4}(t)$, 联合四阶矩为

$$M_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = E\{s_{k_1}(t) s_{k_2}(t + \tau_1) s_{k_3}^*(t + \tau_2) s_{k_4}^*(t + \tau_3)\} \quad (14)$$

样本 $\bar{s}_{k_1}(t), \bar{s}_{k_2}(t), \bar{s}_{k_3}(t), \bar{s}_{k_4}(t)$ 按时间平均的联合四阶矩为

$$\bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \langle \bar{s}_{k_1}(t) \bar{s}_{k_2}(t + \tau_1) \bar{s}_{k_3}^*(t + \tau_2) \bar{s}_{k_4}^*(t + \tau_3) \rangle \quad (15)$$

定义 2 $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, N\}$ 、任意样本及任意 τ_1, τ_2, τ_3 , 若 $\bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = M_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, 则称 $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 的联合四阶矩具有各态历经性。

定理 2 模型 1 中的多信号的联合四阶矩具有各态历经性的充要条件为 $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\{k_1, k_2\} \neq \{k_3, k_4\}$, 有 $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} \neq 0$ 。

证明 将模型 1 代入 (14) 式, 考虑到各初相间的独立性, 得

$$M_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{cases} r_{k_1}^2 r_{k_2}^2 \exp[j(\omega_{k_2} \tau_1 - \omega_{k_3} \tau_2 - \omega_{k_4} \tau_3)], & \text{当 } \{k_1, k_2\} = \{k_3, k_4\} \\ 0, & \text{当 } \{k_1, k_2\} \neq \{k_3, k_4\} \end{cases} \quad (16)$$

将模型 1 代入 (15) 式有

$$\begin{aligned} \bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} r_{k_4} \exp\{j[(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t \\ & + (\omega_{k_2} \tau_1 - \omega_{k_3} \tau_2 - \omega_{k_4} \tau_3) + (\phi_{k_1} + \phi_{k_2} - \phi_{k_3} - \phi_{k_4})]\} dt \end{aligned} \quad (17)$$

当 $\{k_1, k_2\} = \{k_3, k_4\}$ 时,

$$\bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = r_{k_1}^2 r_{k_2}^2 \exp[j(\omega_{k_2} \tau_1 - \omega_{k_3} \tau_2 - \omega_{k_4} \tau_3)] = M_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (18)$$

当 $\{k_1, k_2\} \neq \{k_3, k_4\}$ 时, 对任意相位样本, 当且仅当 $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} \neq 0$ 时 $\bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$ 。

证毕

下面讨论四阶累积量的各态历经性。对于对称分布的过程 $s_{k_1}(t), s_{k_2}(t), s_{k_3}(t), s_{k_4}(t)$, 联合四阶累积量为

$$C_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = M_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - R_{k_1 k_3}(\tau_2) R_{k_2 k_4}(\tau_3 - \tau_1) - R_{k_1 k_4}(\tau_3) R_{k_2 k_3}(\tau_2 - \tau_1) \quad (19)$$

将模型 1 代入上式, 有

$$C_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{cases} -r_k^4 \exp[j\omega_k(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)], & \text{当 } k_1 = k_2 = k_3 = k_4 \equiv k \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (20)$$

样本 $\bar{s}_{k_1}(t), \bar{s}_{k_2}(t), \bar{s}_{k_3}(t), \bar{s}_{k_4}(t)$ 按时间平均的联合四阶累积量为

$$\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \bar{R}_{k_1 k_3}(\tau_2) \bar{R}_{k_2 k_4}(\tau_3 - \tau_1) - \bar{R}_{k_1 k_4}(\tau_3) \bar{R}_{k_2 k_3}(\tau_2 - \tau_1) \quad (21)$$

定义 3 $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, N\}$ 、任意样本及任意 τ_1, τ_2, τ_3 , 若 $\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = C_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, 则称 $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 的联合四阶累积量具有各态历经性。

引理 1 在模型 1 中当 $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} \neq 0$ 时, $\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$ 。

证明 在 (17) 式中, 由于 $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} \neq 0$, 有 $\bar{M}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$ 。若 $\omega_{k_1} \neq \omega_{k_3}$, 则 $\bar{R}_{k_1 k_3}(\tau_2) = 0$; 若 $\omega_{k_1} = \omega_{k_3}$, 但 $\omega_{k_1} - \omega_{k_3} \neq \omega_{k_4} - \omega_{k_2}$, 即 $\omega_{k_2} \neq \omega_{k_4}$, 故 $\bar{R}_{k_2 k_4}(\tau_3 - \tau_1) = 0$, 总之, $\bar{R}_{k_1 k_3}(\tau_2) \bar{R}_{k_2 k_4}(\tau_3 - \tau_1) = 0$ 。同理, $\bar{R}_{k_1 k_4}(\tau_3) \bar{R}_{k_2 k_3}(\tau_2 - \tau_1) = 0$ 。代入 (21) 式有 $\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$ 。证毕

引理 2 在模型 1 和 (21) 式中, 若 $\{k_1, k_2\} = \{k_3, k_4\}$, 则

$$\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{cases} -r_k^4 \exp[j\omega_k(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)], & k_1 = k_2 \equiv k \\ 0, & k_1 \neq k_2 \end{cases} \quad (22)$$

证明 当 $k_1 = k_2$ 时, 由于条件 $\{k_1, k_2\} = \{k_3, k_4\}$, 故 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 \equiv k$, 代入 (21) 式得到

$$\bar{C}_{kk}^{kk}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -r_k^4 \exp[j\omega_k(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)] \quad (23)$$

当 $k_1 \neq k_2$, 由于条件 $\{k_1, k_2\} = \{k_3, k_4\}$, 不失一般性假设 $k_1 = k_3 \neq k_2 = k_4$, 则

$$\bar{R}_{k_1 k_1}(\tau_2) \bar{R}_{k_2 k_2}(\tau_3 - \tau_1) = r_{k_1}^2 r_{k_2}^2 \exp[j(\omega_{k_2} \tau_1 - \omega_{k_1} \tau_2 - \omega_{k_2} \tau_3)] \quad (24)$$

$$\bar{R}_{k_1 k_2}(\tau_3) \bar{R}_{k_2 k_1}(\tau_2 - \tau_1) = 0 \quad (25)$$

将 (18), (24), (25) 式代入 (21) 式得 $\bar{C}_{k_2 k_2}^{k_1 k_1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$ 。证毕

定理 3 模型 1 中多信号的联合四阶累积量具有各态历经性的充要条件是: $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, N\}$, 当 $\{k_1, k_2\} \neq \{k_3, k_4\}$ 时, $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} \neq 0$ 。

证明 这里列出各种可能的情况, 将说明仅有一种情况不满足各态历经条件。

(1) 当 $\{k_1, k_2\} = \{k_3, k_4\}$ 时, 根据 (20) 式和引理 2 得到: $C_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 。

(2) 当 $\{k_1, k_2\} \neq \{k_3, k_4\}$ 时, 根据 (20) 式有 $C_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$

(a) 若 $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} \neq 0$, 则根据引理 1 得 $\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$

(b) 若 $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0$, (17) 式中的积分内已不存在时间 t , 但由于 $\{k_1, k_2\} \neq \{k_3, k_4\}$, 相位样本 $\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \phi_{k_3}, \phi_{k_4}$ 不能完全互相抵消, 代入 (21) 式后, 第一项总是相位的函数而后两项与相位无关, 故四阶累积量 $\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 均为相位样本的函数, 故不能在任意样本下满足 $\bar{C}_{k_2 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$ 。

综上所述, 各种情况下只有上述情况 (b) 不满足各态历经条件 (定义 3), 所以排除这种情况便得到定理 3。证毕

以上讨论了单频多信号的高阶联合各态历经性。谐波过程由单频多信号构成。

模型 2 谐波过程 $s(t)$ 为

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) \quad (26)$$

其中 $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 按模型 1 定义.

显然 $s(t)$ 的二阶、三阶统计量、四阶矩和四阶累积量与 $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 对应的联合统计量有直接的关系:

$$R(\tau) = E\{s(t)s^*(t+\tau)\} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N R_{k_1 k_2}(\tau) \quad (27)$$

$$T(\tau_1, \tau_2) = E\{s^*(t)s(t+\tau)s(t+\tau_2)\} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N T_{k_1 k_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E\{s(t)s(t+\tau_1)s^*(t+\tau_2)s^*(t+\tau_3)\} \\ &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N \sum_{k_4=1}^N M_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} C(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= M(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - R(\tau_2)R(\tau_3 - \tau_1) - R(\tau_3)R(\tau_2 - \tau_1) \\ &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N \sum_{k_4=1}^N C_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{k_1 k_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \end{aligned} \quad (30)$$

因而 $s(t)$ 的各态历经性取决于组成它的 $\{s_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 的联合各态历经性, 及由定理 1, 定理 2, 定理 3 给出.

3 应用举例

高阶统计已在一定程度上应用于信号处理问题中, 并将其特点用于解决一些特殊问题. 下面就其中两个典型应用中的各态历经性问题作一分析.

高阶统计的一个典型应用是具有相位耦合的识别能力, 比如可使用三阶统计量识别二次相位耦合^[4]. 设谐波过程 $x(t)$ 符合模型 2, 且 $N = 3$,

$$x(t) = \sum_{i=1}^3 \exp[j(\omega_i t + \Phi_i)] \quad (31)$$

如果满足

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1 \quad (32)$$

和

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \Phi_1 \quad (33)$$

则称 $x(t)$ 是二次相位耦合的. 这时其三阶累积量为

$$\begin{aligned} T_x(\tau_1, \tau_2) &= E\{x^*(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)\} \\ &= \exp[j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)] + \exp[j(\omega_2 \tau_1 + \omega_1 \tau_2)] \end{aligned} \quad (34)$$

很显然对应的二维傅氏变换(双谱)在 (ω_1, ω_2) 和 (ω_2, ω_1) 两处有一对冲激值. 但对于非二次相位耦合信号, 其三阶统计量为零. 即使在频率上具有如 (32) 式的关系, 但如果初相没有 (33) 式

的关系, 其三阶统计量也为零。这是三阶统计量的一个典型的应用。但是, 在实际情况中如果不能得到多随机量的独立样本而只能用其时间平均代替统计平均时, 根据 (28) 式和定理 1, 只要频率有如 (32) 式的关系, 谐波过程 $x(t)$ 便不具有各态历经性, 于是该方法不成立。容易得到这时如果 $x(t)$ 满足 (32) 式, 其样本按时间平均的三阶统计量为

$$\begin{aligned}\bar{T}_x(\tau_1, \tau_2) = & \exp[j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 - \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)] \\ & + \exp[j(\omega_1\tau_2 + \omega_2\tau_1 - \phi_1 + \phi_2 + \phi_3)]\end{aligned}\quad (35)$$

可见上式对应的双谱在 (ω_1, ω_2) 和 (ω_2, ω_1) 两处有一对冲激值, 而无需二次相位耦合的 (33) 式作为前提。

模拟实验证实了按样本时间平均的三阶统计量只能识别频率耦合关系而不能识别二次相位耦合。对于四阶统计量识别三次相位耦合的问题有类似的情况, 这里不再赘述。下面就高阶谱应用于阵列处理中的各态历经问题举例说明。

对于基于四阶累积量的多信号分类算法 (MUSIC-like^[3]) 用于来波方向估计问题, 假设 N 个信号 (满足模型 1) 构成向量 S 自远场入射到 P 个阵元的传感器阵列 ($N < P$), 阵列输出向量为

$$X = AS + N \quad (36)$$

式中 N 为噪声向量。 A 为与阵列有关的系数矩阵, 它是列满秩的。 X 的四阶累积量矩阵 C_x 为

$$\begin{aligned}C_x = & E\{(X \otimes X^*)(X \otimes X^*)^H\} - E\{X \otimes X^*\}E\{(X \otimes X^*)^H\} \\ & - E\{XX^H\} \otimes E\{(XX^H)^*\}\end{aligned}\quad (37)$$

这里 $\otimes$ 为 Kronecker 乘积运算。有

$$C_x = (A \otimes A^*)C_s(A \otimes A^*)^H \quad (38)$$

C_s 是 S 的四阶累积量矩阵。注意这里假设噪声为高斯分布, 故被四阶累积量运算抑制。由于

$$\text{rank}(A \otimes A^*) = N^2 \quad (39)$$

$$\text{rank}(C_s) = N \quad (40)$$

故

$$\text{rank}(C_x) = N \quad (41)$$

所以可以用子空间方法构成四阶空间谱, 并计算出各信号的来波方向。在这一方法的应用中如果只能得到待测信号的样本, 则只能用时间平均代替统计平均, 根据定理 3 多信号的联合高阶各态历经性是有条件的, 如果这一条件不满足, 便不能满足 (40) 式, 这时算法便不能达到统计理论的结果。举计算机模拟实验为例, 假设 $N=3$, 三个单频信号的数字频率分别为 0.3, 0.35, 0.4, 根据定理 3, 其联合四阶累积量不满足各态历经条件, (40) 式不满足, 这时无论信号方向如何假设, 实验均不能给出正确结果。

4 结 论

各态历经性是许多统计信号处理方法实际应用时必须考虑的问题。谐波过程的统计分析等效于独立初相单频多信号的联合统计分析。本文得到了其三阶、四阶统计量满足各态历经的条件。在高阶统计的应用中, 如果各态历经性条件不满足, 其样本时间平均的算法与统计分析的

结论不相同, 可能导致算法失效。本文中高阶统计量应用于相位耦合识别和阵列方向估计时各态历经性的分析便是其中两个例子。各态历经性不满足是由于多频率在高阶统计量中具有某种频率的和差耦合关系, 这与工程中常说的相干问题类似。二阶统计量具有同频相干问题, 而高阶统计量具有更加复杂的相干情况。如本文定理所述, 有更多的限制条件, 这些条件成为应用的前提。

参 考 文 献

- [1] J. M. Mendel, Tutorial on higher-order statistics(spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications, Proc. IEEE, 1991, 79(3), 278-305.
- [2] C. L. Nikias, M. R. Raghuveer, Bispectrum estimation: A digital signal processing framework, Proc. IEEE, 1987, 75(7), 869-891.
- [3] B. Porat, B. Friedlander, Direction finding algorithms based on high-order statistics, IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(9), 2016-2023.
- [4] M. C. Dogan, J. M. Mendel, Application of cumulants to array processing Part I: Aperture extension and array calibration, IEEE Trans. on SP, 1995 SP-43(5), 1200-1216.

ANALYSIS AND APPLICATIONS OF HIGHER-ORDER ERGODICITY OF HARMONIC PROCESS

Wei Ping Xiao Xianci

(School of Electron. Eng., UEST of China, Chengdu 610054, China)

Abstract The higher-order statistics has found applications in the wide area of signal processing problem. However in some practical applications, only a sample of the objective process can be obtained. Thus the statistical average must be replaced by time average. The precondition to do this is the ergodicity of the processes. The ergodicity of the higher-order statistics of the harmonic processes is analyzed in this paper. Further more, the applications of the ergodicity in the phase coupling recognition and the array processing problems using higher-order statistics are proposed in this paper. Simulation examples verified those results.

Key words High-order statistics, Ergodicity, Harmonic process, Cumulants

魏 平: 男, 1966 年生, 教授, 博士, 研究方向为现代谱估计、阵列信号处理、电子系统等。

肖先赐: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为谱估计与阵列信号处理、人工神经网络、非线性信号处理、电子系统等。