

# 时变级联滤波器的两种设计方法

吴 涸 张守宏

(西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071)

**摘要** 本文针对雷达杂波抑制中常用的时变级联滤波器,提出了两种实用的设计方法.第一种方法通过时变级联滤波器与时变非级联滤波器的等效来设计时变级联滤波器.该方法可以使时变级联滤波器具有最佳杂波滤波器的效果.第二种方法通过对总的等效滤波器的设计来得到级联滤波器第二级的权系数.分析表明,时变级联滤波器第二级的频率响应很难写出,但可以通过总的等效频率响应来体现.

**关键词** 时变滤波器,杂波抑制,雷达信号处理

## 1 引言

自适应杂波抑制是现代雷达的一种常用技术.为克服盲速,雷达的脉冲重复频率(PRF)往往是参差的,这时,自适应杂波滤波器将是时变的<sup>[1]</sup>.为抗有源干扰,雷达又往往采用频率捷变技术,与此兼容的一种杂波滤波器也是时变的.当同时存在两种不同性质杂波(双模杂波)时,自适应杂波滤波器往往以级联形式实现.图1(a)所示是本文要研究的两级时变级联FIR滤波器.用于杂波抑制的时变级联滤波器需要解决两个设计问题.(1)当仅存在一种杂波时,如何使时变级联滤波器在性能上与非级联的同阶最佳滤波器等效,以获得最佳抑制效果.(2)在双模杂波情况下,第一级时变滤波器的权系数已知,如何有效地设计第二级滤波器,以满足抑制杂波的需要.

时变级联滤波器,特别是它的第二级,与时不变滤波器有许多不同的性质,本文从时变级联滤波器与时变非级联滤波器拟合和等效出发,结合杂波抑制的特点,对上述两个问题进行了探讨.

## 2 拟合设计法

考虑图1所示的两级时变FIR滤波器.设第一级为 $M$ 阶的时变FIR滤波器,其权矢量为  $U(k) = [u(k,0), u(k,1), \dots, u(k,M)]^T$ ,第二级为 $N$ 阶的时变FIR滤波器,其权矢量为  $V(k) = [v(k,0), v(k,1), \dots, v(k,N)]^T$ .又设一个  $L = M + N$  阶的非级

1992-09-30收到,1993-07-28定稿

吴 涸 男,1962年生,讲师,博士研究生,现主要从事自适应杂波抑制、时空二维信号处理,自适应阵列信号处理等方面的研究工作.

张守宏 男,1938年生,教授,现主要从事时空二维自适应信号处理、自适应阵列信号处理等多方面的研究工作.

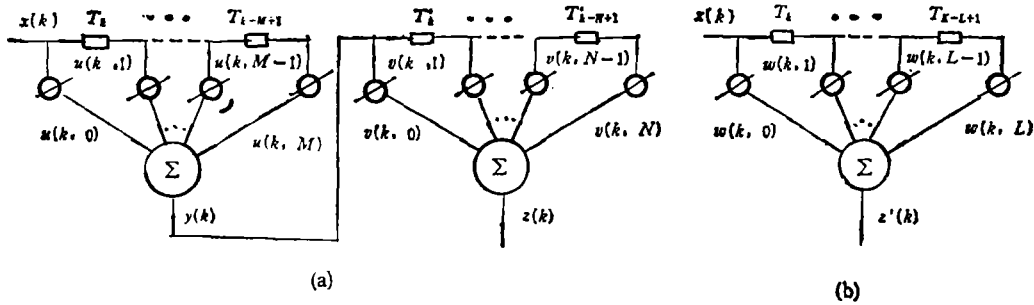


图 1 (a)时变级联 FIR 滤波器 (b)时变非级联 FIR 滤波器

联时变 FIR 滤波器,其权矢量为  $W(k) = [w(k,0), w(k,1), \dots, w(k,L)]^T$ . 问题是当  $W(k)$  已知,并且权矢量为  $W(k)$  的滤波器至少有  $M$  个已知非重零点时,如何设计  $U(k)$  和  $V(k)$ ,使得由  $U(k)$  和  $V(k)$  构成的级联滤波器与由  $W(k)$  构成的非级联滤波器有相同的频率响应. 上述权矢量中的  $k$  为时变参量 ( $k = 1, 2, \dots$ )

时变级联滤波器两级的输出可分别写为

$$y(k) = \sum_{m=0}^M u(k, m)x(k-m)$$

和

$$\begin{aligned} z(k) &= \sum_{n=0}^N v(k, n)y(k-n) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M v(k, n)u(k-n, m)x(k-n-m). \end{aligned} \quad (1)$$

时变非级联滤波器的输出可写为

$$\begin{aligned} z'(k) &= \sum_{l=0}^L w(k, l)x(k-l) \\ &= \sum_{l=0}^{M+N} w(k, l)x(k-l). \end{aligned} \quad (2)$$

比较(1)、(2)式可知,如果两者频率响应相同,则应有  $z(k) = z'(k)(\forall k)$ , 于是可得到下列方程:

$$w(k, l) = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{m=0 \\ n+m=l}}^M v(k, n)u(k-n, m), \quad l = 0, 1, \dots, M+N. \quad (3)$$

由(3)式可知,与时变级联滤波器等效的时变非级联滤波器的权系数(下简称为时变级联滤波器的等效权)为

$$w_c(k, l) = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{m=0 \\ n+m=l}}^M v(k, n)u(k-n, m), \quad l = 0, 1, \dots, M+N. \quad (4)$$

(3)式是  $M+N+1$  个方程、 $(N+1)(M+2)$  个未知数的非线性欠定额方程. 为得到(3)式的解,先引入下列定义和定理.

**定义 1**(时变非级联滤波器瞬时频率响应) 设  $W(k) = [w(k, 0), \dots, w(k, L)]^T \in \mathbb{C}^{L+1}$  为时变非级联 FIR 滤波器  $k$  时刻的权矢量,  $T_{k-i} \in \mathbb{R}^1, i = 0, 1, \dots, L-1$ , 为该 FIR 滤波器的迟延间隔, 则定义其瞬时频率响应为

$$H(k, j\omega) = \sum_{l=0}^L w(k, l) e(j\omega, l, k), \quad (5)$$

式中

$$e(j\omega, l, k) = \exp\left(-j\omega \sum_{i=0}^{l-1} T_{k-i}\right), \quad l \neq 0; \\ e(j\omega, 0, k) = 1, \quad l = 0. \quad (6)$$

**定义 2**(时变级联滤波器瞬时频率响应) 设  $W_c(k) = [w_c(k, 0), \dots, w_c(k, M+N)]^T \in \mathbb{C}^{M+N+1}$  为时变级联 FIR 滤波器( $M$ 级级联 $N$ 阶)的等效权矢量,  $T_{k-i} \in \mathbb{R}^1, i = 0, 1, \dots, M+N-1$ , 为第一级 FIR 滤波器的迟延间隔, 则定义时变级联滤波器的瞬时频率响应为

$$H_c(k, j\omega) = \sum_{l=0}^{M+N} w_c(k, l) e(j\omega, l, k), \quad (7)$$

式中  $e(j\omega, l, k)$  为(6)式所示。

**定理** 设  $U(k) = [u(k, 0), \dots, u(k, M)]^T \in \mathbb{C}^{M+1}, V(k) = [v(k, 0), \dots, v(k, N)]^T \in \mathbb{C}^{N+1}$  分别为时变级联 FIR 滤波器第一级和第二级的权矢量,  $T_{k-i} \in \mathbb{R}^1, i = 0, 1, \dots, M+N-1$ , 为第一级的迟延间隔, 则该时变级联滤波器的瞬时频率响应为

$$H_c(k, j\omega) = \sum_{n=0}^N H_1(k-n, j\omega) v(k, n) e(j\omega, n, k), \quad (8)$$

式中  $H_1(k-n, j\omega)$  为第一级滤波器的瞬时频率响应, 即

$$H_1(k-n, j\omega) = \sum_{m=0}^M u(k-n, m) e(j\omega, m, k-n). \quad (9)$$

(8)式和(9)式中的  $e(j\omega, \cdot, \cdot)$  为(6)式所示。

**证明** 由定义 2 和(4)式知, 时变级联滤波器的瞬时频率响应为

$$H_c(k, j\omega) = \sum_{l=0}^{M+N} w_c(k, l) e(j\omega, l, k) \\ = \sum_{l=0}^{M+N} \left[ \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M v(k, n) u(k-n, m) \right] e(j\omega, l, k).$$

$n+m=l$

令  $l = n + m$ , 上式等价于  $n, m$  分别遍历  $0 \sim N$  和  $0 \sim M$  求和, 即

$$H_c(k, j\omega) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M v(k, n) u(k-n, m) e(j\omega, n+m, k).$$

由(6)式知  $e(j\omega, n+m, k) = e(j\omega, n, k) \cdot e(j\omega, m, k-n)$ , 故

$$H_c(k, j\omega) = \sum_{n=0}^N v(k, n) e(j\omega, n, k) \sum_{m=0}^M u(k-n, m) e(j\omega, m, k-n)$$

$$= \sum_{n=0}^N H_1(k-n, j\omega) v(k, n) e(j\omega, n, k).$$

由定理可知, 时变级联滤波器的瞬时频率响应不等于各级瞬时频率响应的乘积. 当  $T_{k-i} = T, \forall k, i$  时, 时变滤波器成为时不变滤波器, 由(8)式易推知, 级联滤波器的频响等于各级频响之积.

**推论(时变级联滤波器零点不变性)** 如果  $\omega = \omega_z$  是第一级滤波器的零点, 即

$$H_1(k-n, j\omega_z) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

那么  $\omega_z$  也是整个级联滤波器的零点, 即

$$H_c(k, j\omega_z) = 0.$$

该推论由定理显而易见.

再回到(3)式解的问题上来. 由于已知权矢量为  $W(k)$  的滤波器至少有  $M$  个零点, 所以可以在第一级滤波器设置  $M$  个相同的零点, 即通过解方程

$$\left. \begin{aligned} H_1(k-n, j\omega) &= \sum_{m=0}^M u(k-n, m) e(j\omega, m, k-n) = 0, \\ \omega &= \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M, \\ u(k-n, 0) &= c (c \text{ 为任意常数}), \\ n &= 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

得到第一级时变滤波器在  $N+1$  个时刻的权  $U(k-n)$ . 上式中  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$  为已知的  $M$  个零点的位置. 根据上述推论, 第一级权矢量为  $U(k-n)$  的级联滤波器将与权矢量为  $W(k)$  的滤波器有  $M$  个相同的零点. 这样可以从(10)式得到(3)式中的  $(N+1)(M+1)$

表 1 拟合设计法实例 1

| 非级联滤波器权                         | 级联滤波器权                      |
|---------------------------------|-----------------------------|
| $w(k, l), l = 0, 1, \dots, 5$   | $u(k, m), m = 0, 1, 2, 3$   |
| 0.2072997                       | 0.3636573                   |
| -0.9094430                      | -1.0000000                  |
| 1.6301714                       | 0.9069343                   |
| -1.7051106                      | -0.2705916                  |
| 0.9640462                       | $u(k-1, m), m = 0, 1, 2, 3$ |
| -0.1869636                      | 0.3394017                   |
|                                 | -0.9560502                  |
|                                 | 1.0000000                   |
|                                 | -0.3833515                  |
| 级联滤波器等效权                        | $u(k-2, m), m = 0, 1, 2, 3$ |
| $w_c(k, l), l = 0, 1, \dots, 5$ | 0.2705916                   |
| 0.2072997                       | -0.9486262                  |
| -0.9094430                      | 1.0000000                   |
| 1.6301714                       | -0.3219654                  |
| -1.7051106                      | $v(k, n), n = 0, 1, 2$      |
| 0.9640462                       | 0.5700413                   |
| -0.1869636                      | -1.0000000                  |
|                                 | 0.5806947                   |

表 2 拟合设计法实例 2

| 非级联滤波器权                         | 级联滤波器权                      |
|---------------------------------|-----------------------------|
| $w(k, l), l = 0, 1, \dots, 5$   | $u(k, m), m = 0, 1, 2, 3$   |
| -0.1222511                      | 1.0000000                   |
| 0.5344060                       | -2.7470522                  |
| -0.9559874                      | 2.4912599                   |
| 1.0000000                       | -0.7442077                  |
| -0.5664578                      | $u(k-1, m), m = 0, 1, 2, 3$ |
| 0.1102904                       | 1.0000000                   |
|                                 | -2.8136711                  |
|                                 | 2.9430880                   |
|                                 | -1.1294169                  |
| 级联滤波器等效权                        | $u(k-2, m), m = 0, 1, 2, 3$ |
| $w_c(k, l), l = 0, 1, \dots, 5$ | 0.2705916                   |
| -0.1222514                      | -0.9486262                  |
| 0.5344066                       | 1.0000000                   |
| -0.9559877                      | -0.3219654                  |
| 1.0000000                       | $v(k, n), n = 0, 1, 2$      |
| -0.5664578                      | -0.1222514                  |
| 0.1102904                       | 0.1985756                   |
|                                 | -0.0927013                  |

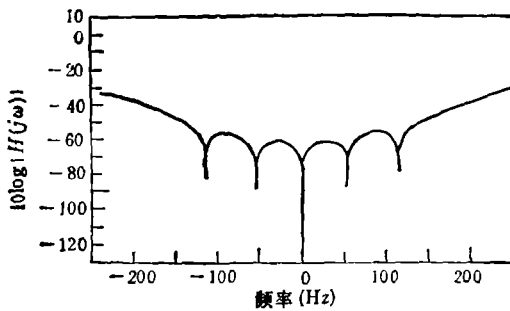


图 2 5 阶非级联最佳滤波器频响

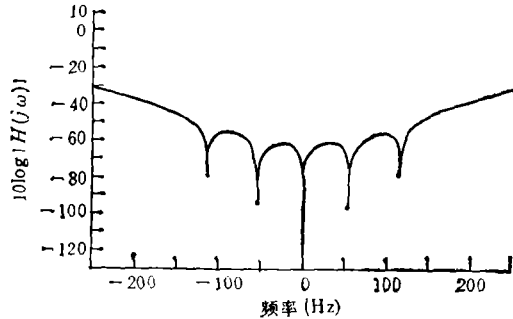


图 3 级联滤波器等效频响

个未知数, (3)式只剩下  $N+1$  个未知数, 方程由欠定额变为超定额。 但由上述推论可知, (3)式中有  $M$  个冗余方程, 蕴涵着两个滤波器有  $M$  个相同的零点。 因此(3)式实质上是  $N+1$  阶的线性定额方程, 从而可解出第二级滤波器的权系数  $v(k, n), n = 0, 1, \dots, N$ 。

表 1 给出了一个设计实例。 已知 5 阶时变非级联滤波器在某一时刻  $k$  的权系数 (表 1 第一列上半部分所示) 以及其 5 个零点的位置为  $0\text{Hz}, \pm 40\text{Hz}$ , 和  $\pm 80\text{Hz}$ 。 按照上述方法设计的  $M=3, N=2$  时变级联滤波器, 第一、二级的权系数如表 1 第二列所示。 其等效权系数如表 1 第一列下半部分所示。 可以看出, 表 1 第一列上下两部分相同, 表明拟合是成功的。 计算表明,  $v(k, n)$  的解与 (3) 式中  $N+1$  个方程的选择无关, 这也说明 (3) 式是定额方程 (非矛盾方程)。

但是实际应用中还存在两方面的问题。 一个是待拟合的滤波器没有真正的零点, 而只有一些极小点。 另一个是难以精确找到零点或极小点的位置。 它们会在不同程度上影响拟合的精度, 但对于杂波抑制应用是可以接受的。 例如图 2 所示是当杂波功率谱为高斯分布、方差为  $40\text{Hz}$  时, 5 阶最佳 (改善因子最大<sup>[1]</sup>) 滤波器的瞬时频响, 其权系数列于表 2 第一列的上半部分。 通过一维搜索可以得到其极小值点的近似位置:  $0\text{Hz}, \pm 54.10\text{Hz}, \pm 114.0\text{Hz}$ 。 选择其中较深的极小值点近似作为零点, 用拟合法设计  $M=3, N=2$  的时变级联滤波器, 第一、二级的权系数如表 2 第二列所示, 其等效权系数如表 2 第一列下半部分所示, 等效频率响应如图 3 所示。 可以看出, 等效权与最佳权仅在小数点 6 位后才有差别, 两者的频响也只有细微差别。 实际计算表明, 在杂波方差可能的变化范围之内, 拟合误差对滤波性能 (改善因子) 的影响是微不足道的。

### 3 零点设计法

当存在双模杂波 (如地杂波加气象杂波) 时, 往往用时变级联滤波器的第一级来对付统计特性已知的一种杂波 (如地杂波), 可以认为第一级权系数是已知的。 第二级要根据对另一杂波的参数估计实时计算。 假设已知另一杂波谱中心的估计值, 则希望第二级滤波器在此周围呈现  $N$  个零点。 但第二级滤波器并不能象第一级滤波器那样 ((10) 式) 解方程直接得到。 事实上, 并不知道第二级滤波器的延迟间隔<sup>[2]</sup>, 因而很难写出第二级的瞬时频率响应。 应当注意的是图 1(a) 所示的  $T'_k, T'_{k-1}, \dots$  等仅是示意性的。 如果第一级滤波器的

输入为正弦波  $x(k) = \exp(j\omega_2 t_k)$ , 那么第一级滤波器相邻两时刻的输出  $y(k), y(k-1)$  为

$$\begin{aligned} y(k) &= u(k, 0)\exp(j\omega_2 t_k) + u(k, 1)\exp[j\omega_2(t_k - T_k)] + \dots \\ &\quad + u(k, M)\exp[j\omega_2(t_k - T_k - \dots - T_{k-M-1})] \\ &= \exp(j\omega_2 t_k) \left[ \sum_{m=0}^M u(k, m)e(j\omega_2, m, k) \right] \\ &= H_1(k, j\omega_2)\exp(j\omega_2 t_k), \end{aligned} \quad (11)$$

$$y(k-1) = H_1(k-1, j\omega_2)\exp[j\omega_2(t_k - T_k)], \quad (12)$$

式中  $e(j\omega_2, m, k)$  和  $H_1(k, j\omega_2)$  如(6)式和(9)式所示。可见,  $y(k-1), y(k)$  并不仅是简单的迟延关系, 而是受到第一级瞬时频率响应调制。为了能象第一级那样设计第二级, 文献[2]提出一种校正技术。校正技术主要适合于设计具有重零点的第二级时变滤波器。当希望第二级具有非重零点时(这正是杂波抑制所要求的), 这种设计技术往往失效。

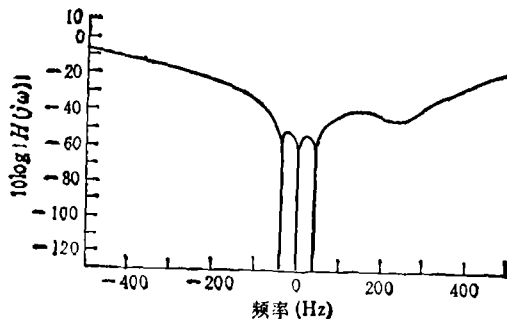


图4 校正技术设计的时变级联滤波器  
瞬时频响( $M=3, N=2$ )

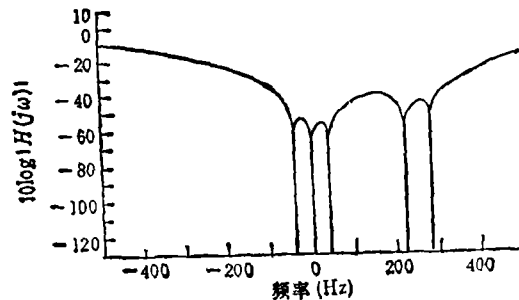


图5 零点设计法设计的时变级联滤波器  
瞬时频响( $M=3, N=2$ )

表3 零点设计法实例

| 已知的第一级权系数                 | 设计的第二级权系数                       | 等效权系数                                     |
|---------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------|
| $u(k, m), m=0, 1, 2, 3$   | $\text{Re}[v(k, n)], n=0, 1, 2$ | $\text{Re}[w_c(k, l)], l=0, 1, \dots, 5,$ |
| 0.3636573                 | 0.6105740                       | 0.2220397                                 |
| -1.0000000                | -1.0000000                      | -0.9499757                                |
| 0.9069343                 | 0.4427781                       | 1.6296129                                 |
| -0.2705916                | $\text{Im}[v(k, n)], n=0, 1, 2$ | -1.5852472                                |
| $u(k-1, m), m=0, 1, 2, 3$ | 0.0000000                       | 0.8261296                                 |
| 0.3394017                 | -0.4060826                      | -0.1425592                                |
| -0.9560502                | 0.4372879                       | $\text{Im}[w_c(k, l)], l=0, 1, \dots, 5$  |
| 1.0000000                 |                                 | 0.0000000                                 |
| -0.3833515                |                                 | -0.1378251                                |
| $u(k-2, m), m=0, 1, 2, 3$ |                                 | 0.5065618                                 |
| 0.2705916                 |                                 | -0.8209054                                |
| -0.9486262                |                                 | 0.5929603                                 |
| 1.0000000                 |                                 | -0.1407916                                |
| -0.3219654                |                                 |                                           |

图 4 所示是校正技术的一个设计实例. 设计希望第二级在  $f_1=220\text{Hz}$  和  $f_2=280\text{Hz}$  处各有一个零点, 但设计得到的滤波器并未形成这两个零点.

当第一级滤波器的时变权  $U(k)$  已知时, 其等效非级联滤波器的瞬时频响  $H_e(k, j\omega)$  可由(8)式和(9)式表示, 其中  $v(k, n)$  为  $N+1$  个未知数. 如果希望第二级滤波器在  $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  有  $N$  个零点, 那么等效地也就是希望  $H_e(k, j\omega)$  在  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  有  $N$  个零点. 事实上, 并不必关心第二级滤波器的零点分布(因为其频响很难写出), 而只需确定  $H_e(k, j\omega)$  的  $M+N$  个零点的分布, 因为  $H_e(k, j\omega)$  决定了杂波抑制的最终效果. 所以, 虽然单独第二级时变滤波器的瞬时频率响应很难写出, 但其权系数可以通过  $H_e(k, j\omega)$  的零点设置得到, 即通过解方程

$$\left. \begin{aligned} H_e(k, j\omega) &= \sum_{n=0}^N H_1(k-n, j\omega) v(k, n) e(j\omega, n, k) = 0, \\ \omega &= \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \\ v(k, 0) &= c (c \text{ 为任意常数}), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

可以得到  $v(k, n)$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ . (13)式是  $N$  阶线性方程组. 表 3 列举了一个设计实例. 其中第一列是已知第一级滤波器权系数, 第二列是解(13)式得到的  $v(k, n)$  ( $N=2$ , 设计在  $220\text{Hz}$ 、 $280\text{Hz}$  各有一个零点), 第三列是  $M=3, N=2$  时变级联滤波器的等效权系数. 图 5 是其瞬时频率响应. 上述两个零点清晰可见.

## 4 结 论

本文讨论了两种时变级联滤波器的设计方法. 第一种方法能够在一定条件下实现时变级联滤波器与时变非级联滤波器等效, 特别是针对杂波抑制, 能够用时变级联滤波器实现最佳杂波滤波器. 该方法还提供了一种解非线性欠定方程的办法. 在时不变情况下, 级联滤波器与非级联滤波器等效问题同样是解一组非线性方程(定额), 该方法在一定条件下同样有效.

第二种方法在一定条件下解决了时变级联滤波器中第二级的设计问题. 它通过对等效瞬时频响设计间接得到第二级滤波器权系数.

上述讨论还得到了时变级联滤波器的两个特点:

(1) 瞬时频率响应不为两级频响之积, 而为(8)式所示;

(2) 第一级输出受其瞬时频响调制, 第二级延迟间隔不易确定, 因而难以写出第二级滤波器的频率响应, 但可以通过等效瞬时频响来体现.

本文提出的两种设计方法已成功地应用于多功能雷达信号处理机中.

## 参 考 文 献

- [1] Hsiao J K. IEEE Trans. on AES, 1974, AES-10(5): 622—629.
- [2] Wu Huan, Zhang Shouhong, Bao Zheng. Adaptive Cascaded Clutter Canceller for Staggered PRF Radar. Proceedings of the 1991 CIE International Conference on Radar. Beijing: 503—506.

## TWO APPROACHES TO THE DESIGN OF TIME-VARYING CASCADED FILTERS

Wu Huan Zhang Shouhong

(*Electronic Institute, Xidian University, Xi'an 710071*)

**Abstract** Two approaches to the design of the time-varying cascaded filters used in radar clutter rejection are presented. In the first approach, by fitting the cascaded filter to the noncascaded filter, the time-varying cascaded filter can be designed, which makes it possible that the time-varying cascaded filter behaves just like an optimum clutter filter. The second approach can be used to design the second-stage filter in a time-varying cascaded one by setting zeros in its equivalent overall frequency response. It has been shown that the frequency response of the second-stage filter in the time-varying cascaded filter is difficult to express, however, is convenient to be involved in the overall response.

**Key words** Time-varying filter, Clutter rejection, Radar signal processing