第10卷 第3期　　电子科学学刊　　Vol. 10, No. 3
1988年5月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1988

填充两层介质的矩型波导的色散特性*

姜遵富
(中国科学院电子学研究所,北京)

摘要　本文导出了两层介质填充的矩型波导的色散方程的解析表达式，讨论了填充多层介质的矩型波导的色散方程的有趣特点,计算了有效介电常数,对工程应用有参考意义.

关键词　波导;介质填充波导;矩型波导色散特性

1. 引言

许多波导部件,如移相器、阻抗变换器、极化转换器、衰减器、模式转换器和滤波器等等,都是采用部分或全部填充均匀或不均匀介质制成的. 因此,研究填充介质的矩型波导的特性是长久以来一直关心的问题.

均匀矩型波导内填充一层介质的问题在文献[1—4]中曾作了分析，给出了色散方程. 对于均匀矩型波导中填充两层介质的问题，文献[5,6]曾采用数值计算方法作过研究，但皆未给出色散方程的解析表达式. 近来文献[7]也研究了这类问题，其中也包括了采用有限元法对填充两层介质情况的色散特性的计算.

在本文中,我们对均匀矩型波导中在任意位置填充两层介质的情况进行了分析,导出了色散方程的解析表达式. 实际上，本文导出的色散方程也适用于填充四层和五层介质的波导的情况. 此外,还讨论了均匀矩型波导,填充二、三、四和五层介质波导的色散方程的特点，指出了几条有趣的规律，预言了填充更多层介质矩型波导的色散方程的可能形式. 最后,我们还计算了有效介电常数和它与结构间的关系. 由计算结果,能够很方便地得到色散特性和特性阻抗.

2. 色散方程

在矩型波导E面任意位置填充两层介质的结构如图1所示. 实际上，它是E面填充

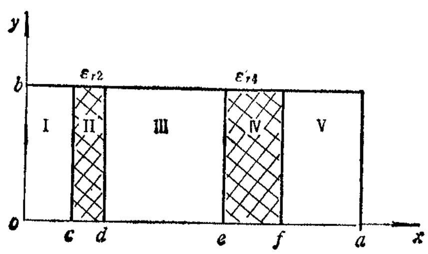

图1　E面填充两层介质

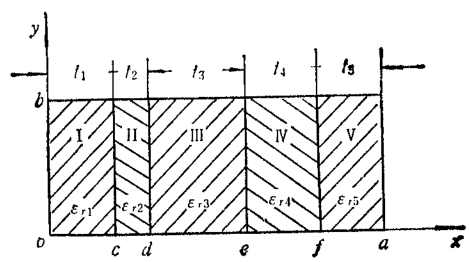

图2　E面填充五层介质

* 1986年9月3日收到,1986年12月23日修改定稿.

五层介质的情况，如图2所示。

为方便起见，我们只讨论 TE_{m0} 波的色散特性，讨论 TM 波时，情况是类似的。

根据波导理论，图2所示矩型波导的每个子区域中，场方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{I 区}\\
&E_y^{\mathrm{I}} = -\omega\mu \sum_{m=1}^{\infty} K_{zm} A^{\mathrm{I}} \sin(k_1 x) e^{-jk_{zm}z}\\
&H_z^{\mathrm{I}} = -j \sum_{m=1}^{\infty} K_{zm} k_1 A^{\mathrm{I}} \cos(k_1 x) e^{-jk_{zm}z}\\
&\text{II—IV 区}\\
&E_y^{\nu} = -\omega\mu \sum_{m=1}^{\infty} K_{zm}(A^{\nu}\cos k_\nu x + B^{\nu}\sin k_\nu x) e^{-jk_{zm}z}\\
&H_z^{\nu} = -j \sum_{m=1}^{\infty} K_{zm} k_\nu(-A^{\nu}\sin k_\nu x + B^{\nu}\cos k_\nu x) e^{-jk_{zm}z}\\
&\text{V 区}\\
&E_y^{\mathrm{V}} = -\omega\mu \sum_{m=1}^{\infty} K_{zm} A^{\mathrm{V}}(-\mathrm{tg}\, k_5 a \cos k_5 x + \sin k_5 x) e^{-jk_{zm}z}\\
&H_z^{\mathrm{V}} = -j \sum_{m=1}^{\infty} K_{zm} k_5 A^{\mathrm{V}}(\mathrm{tg}\, k_5 a \sin k_5 x + \cos k_5 x) e^{-jk_{zm}z}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1}
$$

式中 k_i 为 x 方向传输常数，它与 z 方向传输常数 K_{zm} 和介质层的介电常数间的关系为

$$k_i^2 = k_0^2\varepsilon_{ri} - K_{zm}^2, \quad i = 1, 2, \cdots, 5 \tag{2}$$

$$k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{3}$$

而 $\nu = \mathrm{II—IV}$.

当结构是填充四层介质时，场方程要少一组，这只要令 $\nu = \mathrm{II, III}$ 就行了.

据边界条件，在每两个介质的交界面上，切向电场和磁场连续，故有

$x = c$ 时，

$$
\begin{aligned}
&A^{\mathrm{I}}\sin k_1 c = A^{\mathrm{II}}\cos k_2 c + B^{\mathrm{II}}\sin k_2 c\\
&k_1 A^{\mathrm{I}}\cos k_1 c = k_2(-A^{\mathrm{II}}\sin k_2 c + B^{\mathrm{II}}\cos k_2 c)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$x = d, e$ 时，

$$
\begin{aligned}
&A^{\nu}\cos k_\nu {}^{d}_{e} + B^{\nu}\sin k_\nu {}^{d}_{e} = A^{\nu+1}\cos k_{\nu+1} {}^{d}_{e} + B^{\nu+1}\sin k k_{\nu+1} {}^{d}_{e}\\
&k_\nu(-A^{\nu}\sin k_\nu {}^{d}_{e} + B^{\nu}\cos k_\nu {}^{d}_{e}) = k_{\nu+1}(-A^{\nu+1}\sin k_{\nu+1} {}^{d}_{e} + B^{\nu+1}\cos k_{\nu+1} {}^{d}_{e})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $\nu = \mathrm{II}$ 时，取 d；$\nu = \mathrm{III}$ 时，取 e.

$x = f$ 时，

$$
\begin{aligned}
&A^{\mathrm{IV}}\cos k_4 f + B^{\mathrm{IV}}\sin k_4 f = A^{\mathrm{V}}(-\mathrm{tg}\, k_5 a\cos k_5 f + \sin k_5 f)\\
&k_4(-A^{\mathrm{IV}}\sin k_4 f + B^{\mathrm{IV}}\cos k_4 f) = k_5 A^{\mathrm{V}}(\mathrm{tg}\, k_5 a \sin k_5 f + \cos k_5 f)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

填充四层介质时，有6个方程，6个未知数。填充五层介质时，有8个方程，8个未知数。由代数理论可知，两种情况下方程皆有解。经过数学处理，我们得到四层介质时的色散方程为

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\mathrm{tg}\,k_it_i}{k_i}-\frac{k_2}{k_1k_3}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3-\frac{k_2}{k_1k_4}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4$$
$$-\frac{k_3}{k_1k_4}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4-\frac{k_3}{k_2k_4}\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4=0 \tag{7}$$

五层介质时的色散方程为

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{\mathrm{tg}\,k_it_i}{k_i}-\frac{k_2}{k_1k_3}\mathrm{tg}\,k_1t_1\,\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3-\frac{k_2}{k_1k_4}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4$$
$$-\frac{k_2}{k_1k_5}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_5t_5-\frac{k_3}{k_1k_4}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4$$
$$-\frac{k_3}{k_1k_5}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_5t_5-\frac{k_3}{k_2k_4}\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4$$
$$-\frac{k_3}{k_2k_5}\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_5t_5-\frac{k_4}{k_3k_5}\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4\cdot\mathrm{tg}\,k_5t_5$$
$$-\frac{k_4}{k_1k_5}\mathrm{tg}\,k_1t_1\,\mathrm{tg}\,k_4t_4\,\mathrm{tg}\,k_5t_5-\frac{k_4}{k_2k_5}\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4\cdot\mathrm{tg}\,k_5t_5$$
$$+\frac{k_2k_4}{k_1k_3k_5}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3\cdot\mathrm{tg}\,k_4t_4\cdot\mathrm{tg}\,k_5t_5=0 \tag{8}$$

3. 色散方程的特点

由文献[2]可知，矩型波导内填充两层或三层介质时的色散方程分别为

两层时：

$$\frac{\mathrm{tg}\,k_1t_1}{k_1}+\frac{\mathrm{tg}\,k_2t_2}{k_2}=0 \tag{9}$$

三层时：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{tg}\,k_it_i}{k_i}-\frac{k_2}{k_1k_3}\mathrm{tg}\,k_1t_1\cdot\mathrm{tg}\,k_2t_2\cdot\mathrm{tg}\,k_3t_3=0 \tag{10}$$

对于均匀矩型波导，色散关系可类似地写成

$$\frac{\mathrm{tg}\,k_xa}{k_x}=0 \tag{11}$$

(11)，(9)，(10)，(7)和(8)式分别是填充一、二、三、四和五层介质的矩型波导的色散方程．我们在仔细地研究了它们以后，发现下述几个有趣特点：

(1) 色散方程中皆有 $\mathrm{tg}\,k_it_i/k_i$ 形式的项，其项数与介质层数相等．如以N表示层数，则项数为 $C_N^1=N$．

(2) 色散方程其余部分的每一项中皆包括两部分：第一部分为传输常数 k_i 的相乘和相除，第二部分为相应的 $\mathrm{tg}\,k_it_i$ 连乘．

(3) 上述每一项中第一部分的传输常数 k_i 的个数皆为奇数 1、3、5 等，而且分母上的个数比分子上的个数多 1，或者说，这部分的“量纲”是 k^{-1}．

(4) 色散方程中，由 3 个不同因子构成的项数等于介质层数N中取 3 个 k 的组合数 C_N^3．例如 $N=3$ 时有一项 $k_1k_2k_3$ 组合；$N=4$ 时，有 $C_4^3=4$ 项，即 $k_1k_2k_3$，$k_1k_2k_4$，$k_1k_3k_4$ $k_2k_3k_4$，四种组合；$N=5$ 时，$C_5^3=10$，有 10 种组合，具体情况见(8)式．

(5) 由 3 个不同 k 因子组成的含有形式 $k_\alpha/k_\beta k_\gamma$ 的项中,存在下述关系

$$\beta < \alpha < \gamma \tag{12}$$

(6) 由 5 个不同 k 因子组成的项数等于 C_N^5.

(7) 含有形式 $k_{\alpha1}k_{\alpha2}/k_{\alpha3}k_{\alpha4}k_{\alpha5}$ 的项中存在下述关系

$$\alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 \tag{13}$$

(8) 每一项前的符号等于 $(-1)^l$, l 是每项中第一部分的分子中 k_i 的个数.

由上述讨论,我们推测,填充六层介质时的色散方程应有如下形式:

第一部分为 $\sum\limits_{i=1}^{6} \mathrm{tg}\, k_i t_i/k_i$, 共 6 项.

第二部分由 3 个 k_i 组合成,共 $C_6^3 = 20$ 项,符号全部为负.

第三部分由 5 个 k_i 组合成,共 $C_6^5 = 6$ 项,符号全部为正.

我们只要将 C_6^3 和 C_6^5 组合中的每一种形式找出来, 就能按前述特点写出每一项的具体形式. 应该指出,要做到这一点是不困难的.

同样,我们可以就填充七层、八层以至N层介质的矩型波导的色散方程作出推测.

在附录中,我们用横向谐振法推导了六层介质时的色散方程,结果证明上述推测是完全正确的.

4. 典型数值计算结果

对填充五层介质的矩型波导的色散特性,我们进行了计算. 计算中,就每一个相对波长 a/λ_0 值,由色散方程(9)求解对应的相对波导波长 a/λ_g, 然后根据公式

$$\sqrt{\varepsilon_e} = \frac{a}{\lambda_g}\Big/\frac{a}{\lambda_0} \tag{14}$$

得到有效介电常数. 知道 $\sqrt{\varepsilon_e}$ 后,特性阻抗就能很容易地由公式

$$Z_{0e} = Z_0/\sqrt{\varepsilon_e} \tag{15}$$

计算出,其中 Z_0 是均匀空波导的特性阻抗.

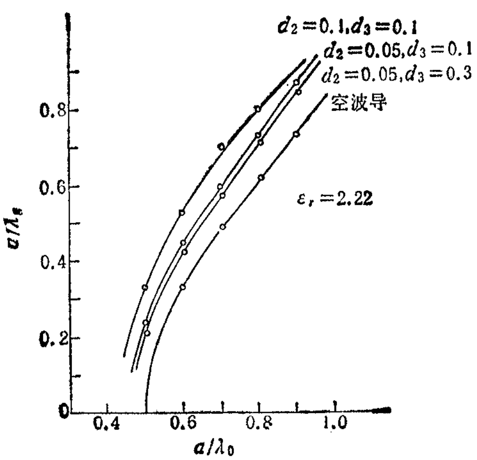

图 3 色散曲线(基模)

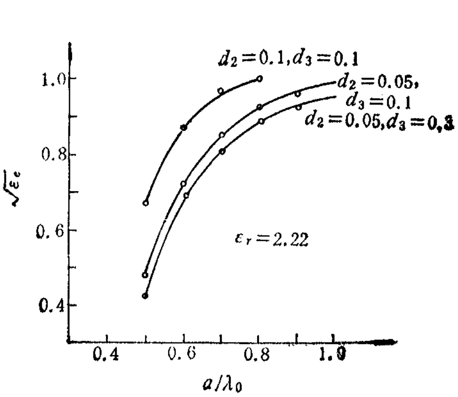

图 4 有效介电常数曲线(基模)

为使计算简便并有实用意义，所取几组初始数据为 (1) $d_2 = t_4/a = t_2/a = 0.05$，$d_3 = t_3/a = 0.1$。(2) $d_2 = 0.05$，$d_3 = 0.3$。(3) $d_2 = 0.1$，$d_3 = 0.1$。在上述几种情况下，介质层的介电常数取为 $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = \varepsilon_{r5} = 1$，$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r4} = 2.22$。计算结果如图 3 和图 4 所示。由图可以看出

(1) d_3 增加，即第三层尺寸加大时，有效介电常数 $\sqrt{\varepsilon_e}$ 下降，但依赖关系较弱。

(2) d_2 增加，即第二第四层尺寸加大时，有效介电常数 $\sqrt{\varepsilon_e}$ 上升，依赖关系较强。

5. 结论

本文所得填充四层、五层介质的矩型波导的色散方程，对研制某些新结构的波导元件的计算是有用的。文中所述填充多层介质的矩型波导色散方程的特点在理论研究上有一些参考意义。

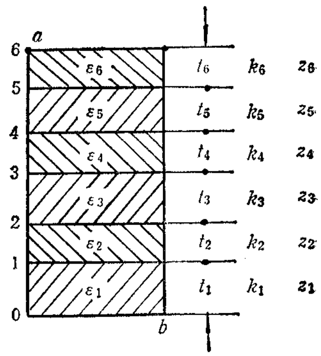

图 5　E 面填充六层介质

附录　采用横向谐振法推导填充六层介质的波导的色散方程。设截面图如图 5 所示。6 个部分的介电常数、长度、传输常数和特性阻抗分别用 ε_i、t_i、k_i 和 Z_i 表示。其中

$$Z_i = \frac{\omega\mu}{k_i} \tag{A-1}$$

令

$$Z_{1\cdot2\cdot3\cdots m} = \prod_{i=1}^{m} Z_i \tag{A-2}$$

$$T_1 = \mathrm{tg}\, k_i t_i \tag{A-3}$$

$$T_{1\cdot2\cdot3\cdots M} = \prod_{i=1}^{m} T_i \tag{A-4}$$

由 3 点向 0 点看的阻抗为

$$Z_{30} = jZ_3 \frac{Z_2 \dfrac{Z_1T_1 + Z_2T_2}{Z_2 - Z_1T_{1\cdot2}} + Z_3T_3}{Z_3 - Z_2T_3 \dfrac{Z_1T_1 + Z_2T_2}{Z_2 - Z_1T_{1\cdot2}}} \tag{A-5}$$

由 3 点向 6 点看的阻抗为

$$Z_{36} = jZ_4 \frac{Z_5 \dfrac{Z_5T_5 + Z_6T_6}{Z_5 - Z_6T_{5\cdot6}} + Z_4T_4}{Z_4 - Z_5T_4 \dfrac{Z_5T_5 + Z_6T_6}{Z_5 - Z_6T_{5\cdot6}}} \tag{A-6}$$

横向谐振条件为

$$Z_{30} + Z_{36} = 0 \tag{A-7}$$

令

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= Z_1T_1 + Z_2T_2, \quad a_2 = Z_5T_5 + Z_6T_6 \\ b_1 &= Z_2 - Z_1T_{1\cdot2}, \quad b_2 = Z_5 - Z_6T_{5\cdot6} \end{aligned}\right\} \tag{A-8}$$

将（A-5）和（A-6）式代入（A-7）式得

$$\begin{aligned}&Z_{2\cdot3\cdot4}a_1b_2 - Z_{3\cdot3\cdot5}T_{3\cdot4}a_2b_1 + Z_{3\cdot3\cdot4}T_3b_1b_2 - Z_{2\cdot3\cdot5}T_4a_1a_2\\&+ Z_{3\cdot4\cdot5}a_2b_1 - Z_{2\cdot4\cdot4}T_{3\cdot4}a_1b_2 + Z_{3\cdot4\cdot4}T_4b_1b_2 - Z_{2\cdot4\cdot5}T_3a_1a_2 = 0\end{aligned} \tag{A-9}$$

将（A-8）式代入（A-9）式得

$$\begin{aligned}&Z_{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}T_1 + Z_{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}T_2 + Z_{2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot5}T_3 + Z_{2\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5}T_4\\
&+ Z_{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5}T_5 + Z_{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}T_6 - Z_{1\cdot3\cdot3\cdot4\cdot5}T_{1\cdot2\cdot3} - Z_{1\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5}T_{1\cdot2\cdot4}\\
&- Z_{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5}T_{1\cdot2\cdot5} - Z_{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}T_{1\cdot2\cdot6} - Z_{1\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}T_{1\cdot3\cdot4}\\
&- Z_{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot5}T_{1\cdot3\cdot5} - Z_{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6}T_{1\cdot3\cdot6} - Z_{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5}T_{1\cdot4\cdot5}\\
&- Z_{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6}T_{1\cdot4\cdot6} - Z_{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6}T_{1\cdot5\cdot6} - Z_{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot5}T_{2\cdot3\cdot4}\\
&- Z_{2\cdot2\cdot4\cdot5\cdot5}T_{2\cdot3\cdot5} - Z_{2\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6}T_{2\cdot3\cdot6} - Z_{2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5}T_{2\cdot4\cdot5}\\
&- Z_{2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6}T_{2\cdot4\cdot6} - Z_{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6}T_{2\cdot5\cdot6} - Z_{2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}T_{3\cdot4\cdot5}\\
&- Z_{2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot6}T_{3\cdot4\cdot6} - Z_{2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot6}T_{3\cdot5\cdot6} - Z_{2\cdot3\cdot4\cdot4\cdot6}T_{4\cdot5\cdot6}\\
&+ Z_{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}T_{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + Z_{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot6}T_{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6} + Z_{1\cdot3\cdot3\cdot4\cdot6}T_{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6}\\
&+ Z_{1\cdot3\cdot4\cdot4\cdot6}T_{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6} + Z_{1\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}T_{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + Z_{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}T_{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 0\end{aligned} \tag{A-10}$$

将上式两边同时除以 $Z_{2\cdot3\cdot4\cdot5}$ 并用 $Z_i \alpha \dfrac{1}{k_i}$ 代入，即得色散方程，其形式与文中所述规律完全一致。

参　考　文　献

[1] N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, MIT Rad. Lab. Serries, Vol. 10, (1948).
[2] P. H. Vartanian., W. P. Ayes, A. L. Helgesson, *IRE Trans.* on MTT, **MTT**-6(1958), 215.
[3] L. 列文，现代波导理论，科学出版社，1960 年，第 183 页.
[4] R. E. Collin, Field Theory of Guided waves, McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, (1960), p. 224.
[5] R. Seckelmann, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT**-14(1966), 516.
[6] H. R. Witt, R. E. Biss, E. L. Price, *IEEE Trans.* on MTT, **MTT**-15(1967), 232.
[7] 徐善驾，电子科学学刊，5(1983)，6—15；6(1984)，351—358.

DISPERSION CHARACTERISTICS OF WAVEGUIDE FILLED WITH TWO DIELECTRIC SLABS IN E-PLANE

Jing Zunfu

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT　In this paper, the dispersion equations of the waveguide filled with N dielectric slabs in E-plane are presented. The characteristics of the dispersion equations of the waveguide filled with N dielectric slabs in E-plane are studied. The effective dielectric constants of the waveguide filled with two dielectric slabs are calculated.

KEY WORDS　Waveguide; Waveguide filled with dielectric slabs; Dispersion equation of rectangular waveguide