

偏心特种截面传输线特性阻抗的分析计算*

马西奎

(西安交通大学电气工程系, 西安)

摘要 本文提出了计算偏心特种截面传输线特性阻抗的部分模拟电荷法。由于外导体边界 Γ_1 上的边界条件准确满足, 所以这种方法精度较高, 且计算量小。文中提出用高斯列主元消去法与最优化方法相结合的技术求解模拟电荷方程组, 是提高精度和保证收敛的一种有效算法。文中给出了外导体边界 Γ_1 为圆形、椭圆形、矩形、槽形和平板形五类传输线的 Green 函数, 且对特性阻抗值进行了计算。

关键词 微波传输线; 偏心特种截面传输线; Green 函数; 部分模拟电荷法; 最优化方法

一、引言

近三十年来, 有关传输线特性阻抗的计算, 已有许多研究成果。从计算方法上来看, 主要有两类: 一类是准确的保角变换法^[1-3], 一般多用于同轴线, 而有关偏心传输线的研究比较少; 另一类是近似的数值算法^[4-6], 如有限元法和有限差分法等。这类方法虽能解决偏心结构问题, 但由于特种线的截面一般是不规则的会出现导体角, 导体角处的电位梯度是奇异的, 这样使得有限元法等不能严格地应用于导体角。另一方面, 对于传输线的无限边界(例如槽形线)应用数值法甚至是不可能的。

实际上, 研究偏心特种结构问题在应用中很重要, 它不仅能解决偏心特种截面传输线的计算问题, 而且可为一般同轴线的加工精度提供理论依据。本文提出了计算偏心特种截面传输线特性阻抗的部分模拟电荷法。文中详细叙述了外导体边界 Γ_1 为圆形、椭圆形、矩形、槽形和平板形五类传输线的特性阻抗计算的实施过程, 给出了数值计算结果和实验测量值。

二、基本方法

传输线的横截面如图1所示, 其内外导体的截面边界 Γ_2 和 Γ_1 间的电位分布可归结为如下定解问题:

* 1988年6月27日收到, 1988年12月22日修改定稿。

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & (\text{在 } R \text{ 中}) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{\Gamma_2} = 1 \end{cases} \quad (2b)$$

根据模拟电荷法原理, 用置于 Γ_2 内的一组虚设线电荷 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 来等效替代内导体表面 Γ_2 上连续分布的面电荷, 如图 1 所示. 这样 R 内的电位 φ 即为各个 τ_i 在边界 Γ_1 内所产生的电位 φ_i 的迭加结果. 现在, 假设位于点 (x', y') 的线电荷 τ 在 Γ_1 内所产生的电位为 $G(x, y, x', y')$, 取

$$G(x, y, x', y') = \frac{\tau}{\varepsilon} F(x, y, x', y') \quad (3)$$

这里, F 应满足 $\nabla^2 F = -\delta(x - x')\delta(y - y')$ 和边界条件 (2a). 显然, F 的具体形式由 Γ_1 的形状所确定, 后面将分别加以讨论.

利用迭加原理和(3)式可得 R 内的电位

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i}{\varepsilon} F(x, y, x_i, y_i). \quad (4)$$

τ_i 的位置是事先根据 Γ_2 的形状和对场图的定性分析所假设, 而 τ_i 的大小是由 Γ_2 上一些匹配点处的电位值所确定. 应用(4)式, 有

$$\varphi(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i}{\varepsilon} F(x_j, y_j, x_i, y_i), \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

式中, (x_j, y_j) 和 (x_i, y_i) 分别是匹配点 j 和 τ_i 的坐标. 根据边界条件(2b), 有

$$\varphi(x_j, y_j) = 1, \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

若用矩阵表示, 则有

$$[\varphi] = [P][\tau] \quad (6)$$

式中, $[\varphi]$ 为元素均等于 1 的 N 维列向量, $[\tau]$ 是 n 维列向量, 而 $[P]$ 是 $N \times n$ 阶矩阵, 其中各元素为

$$p_{ji} = \frac{1}{\varepsilon} F(x_j, y_j, x_i, y_i). \quad (7)$$

解方程(6)即得各个模拟线电荷的大小.

由高斯通量定理知, 内导体单位长度上的总电荷为

$$Q_0 = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

因此, 传输线上单位长度电容 C_0 和它的特性阻抗 Z_0 分别为

$$C_0 = \frac{Q_0}{\varphi|_{\Gamma_2} - \varphi|_{\Gamma_1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{1 - 0} \quad (8)$$

和

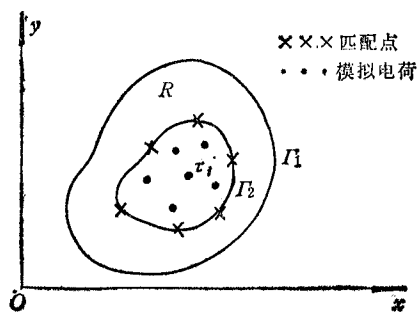


图 1 传输线的截面

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}(C_0/\epsilon)}, \quad \left(\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \right) \quad (9)$$

三、圆形外导体传输线

圆形外导体传输线的横截面如图 2 所示。应用镜像法^[7]可得

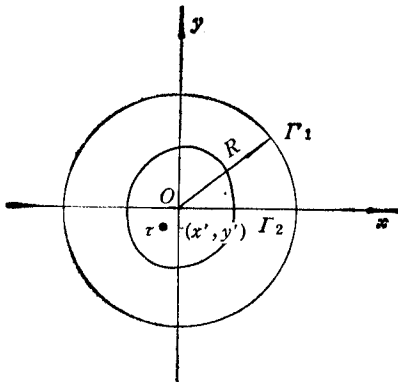


图 2 圆形外导体传输线截面

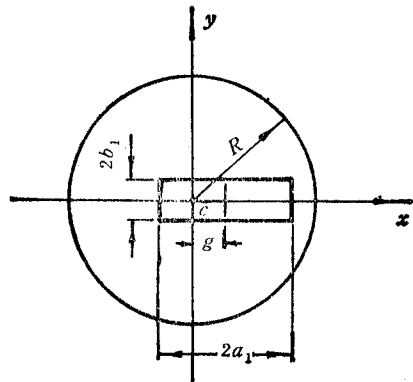


图 3 矩形内导体的圆形传输线

$$G(x, y, x', y') = \frac{\tau}{\epsilon} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\left(x - \frac{x'R^2}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'R^2}{x'^2 + y'^2}\right)^2}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right] \quad (10)$$

表 1 列出了偏心矩形内导体圆形外导体传输线(见图 3)的特性阻抗 Z_0 的计算值和实测值。

表 1 矩形内导体的圆形传输线的特性阻抗值 ($b_1 = 0.302338a_1$)

a_1/R	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.45	0.50	0.55	0.60
$Z_0\sqrt{\epsilon_r}$ (文献[8] $g=0$)	197.36	155.70	131.42	114.15	100.78	89.81	80.52	65.29	58.81	52.88	47.36
$Z_0\sqrt{\epsilon_r}$ (本文 $g=0.4a_1$)	195.31	153.37	128.29	111.78	97.51	87.78	78.32	62.35	55.52	49.24	43.39
$Z_0\sqrt{\epsilon_r}$ (实验 $g=0.4a_1$)	196.09	154.21	129.02	112.35	98.00	88.54	79.06	63.21	56.29	50.33	44.61

值得指出的是,函数 $G(x, y, x', y')$ 也适用于内导体为圆形,外导体为任意形状截面的传输线。

四、椭圆形外导体传输线

椭圆形外导体传输线的截面如图 4(a) 所示, Γ_1 是长短半轴分别为 a 和 b 的椭圆。此时, 取变换

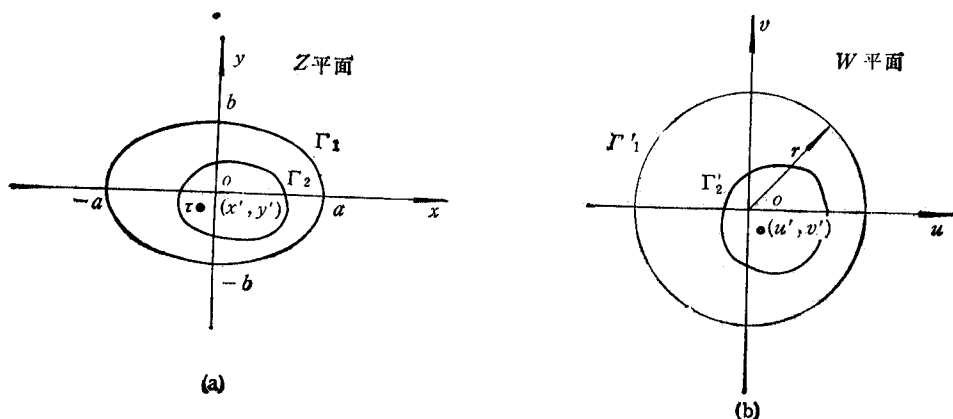


图 4 椭圆外导体传输线及其保角变换图形

$$Z = \frac{c}{2} \left(W + \frac{1}{W} \right) \quad (11)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad Z = x + jy, \quad W = u + jv \quad (12)$$

则有

$$x = \frac{c}{2} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{c}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \phi \quad (13)$$

$$y = \frac{c}{2} v \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{c}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \phi \quad (14)$$

消去参数 ϕ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (15)$$

其中, $a = c(r + 1/r)/2$, $b = c(r - 1/r)/2$, 由此得

$$r = \sqrt{(a+b)/(a-b)} \quad (15)$$

通过上述变换, Z 平面上的椭圆 Γ_1 变成 W 平面上半径等于 r 的圆 Γ'_1 . 点 $Z' = x' + jy'$ 处的线电荷 τ 则位于 W 平面上的点 $W' = u' + jv'$ 处, Z' 与 W' 的关系为

$$W' = (Z' \pm \sqrt{Z'^2 - c^2})/c \quad (17)$$

这里, 在坐标系的第一、四象限取+, 第二、三象限取-.

可得到

$$G(u, v, u', v') = \frac{\tau}{8} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{W - W''}{W - W'} \right| - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{|W'|} \right) \quad (18)$$

其中, $W'' = \frac{r^2}{|W'|^2} (Z' \pm \sqrt{Z'^2 - c^2})/c$, 代入(11)式可得

$$F(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\left| (Z \pm \sqrt{Z^2 - c^2}) - \frac{r^2}{|W'|^2} (Z' \pm \sqrt{Z'^2 - c^2}) \right|}{\left| (Z \pm \sqrt{Z^2 - c^2}) - (Z' \pm \sqrt{Z'^2 - c^2}) \right|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{cr}{|Z' \pm \sqrt{Z'^2 - c^2}|}$$

偏心椭圆外导体-矩形内导体传输线的计算结果见表 2。传输线的截面见图 5。

表 2 椭圆外导体-矩形内导体传输线的特性阻抗值 ($2a = 69.31\text{mm}$, $2b = 37.50\text{mm}$)

内矩形尺寸 ($a_1 \times b_1$) (mm)	29.145×0	29.150×0.162	29.200×1.798	29.400×3.867	29.600×5.172
$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (文献[2] $g=0$)	36.308	31.542	26.864	20.954	17.669
$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (本文 $g=0.1a_1$)	35.636	30.791	26.032	19.960	16.532
$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (实验 $g=0.1a_1$)	36.02	30.60	25.98	20.12	17.02

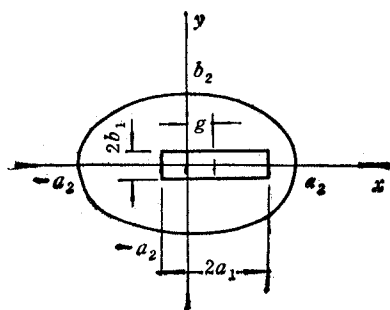


图 5 椭圆外导体-矩形内导体传输线

五、矩形外导体传输线

在文献[9]中,作者已对这种传输线进行了类似的讨论,这里不再赘述。此时,有

$$F(x, y, x', y') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{aK_m} \frac{\sin K_m x \sin K_m x'}{\text{sh} 2bK_m} \times \begin{cases} \text{sh} K_m y \text{sh} K_m (2b - y'), & y \leq y' \\ \text{sh} K_m y' \text{sh} K_m (2b - y), & y \geq y' \end{cases}$$

式中, $K_m = \frac{m\pi}{2a}$, $2a$ 和 $2b$ 分别为矩形外导体沿 x 和 y 轴方向的边长。

有关这类传输线的特性阻抗计算与实测值见文献[9]。

六、槽形线

如图 6 所示的槽形线截面, 在 Z 平面中, $-a/2 < x < a/2$, $y \geq 0$ 为槽形导体, 其内有一截面边界为 Γ_1 的柱形导体。通过正弦函数变换

$$W = \sin \pi \frac{Z}{a} \quad (19)$$

将槽形导体变为在 W 平面上位于 x 轴的长直导体, Z' 点对应于 $W' = \sin \pi \frac{Z'}{a}$ 点。

利用镜像法可得

$$G(u, v, u', v') = \frac{\tau}{8} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|W - W'^*|}{|W - W'|} \quad (20)$$

显然可见

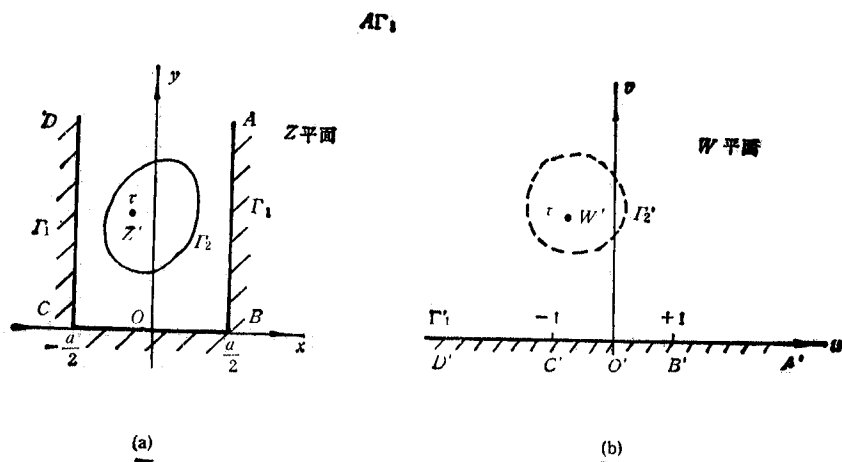


图 6 槽形线的截面及其保角变换图形

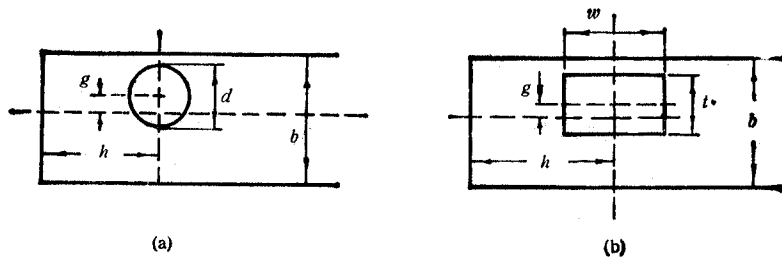


图 7(a) 矩形内导体槽形线

图 7(b) 方形内导体槽形线

$$F(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi}$$

$$\times \ln \left\{ \sqrt{\left(\sin \frac{\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \sin \frac{\pi x'}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y'}{a} \right)^2 + \left(\cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x'}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y'}{a} \right)^2} / \right. \\ \left. \sqrt{\left(\sin \frac{\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \sin \frac{\pi x'}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y'}{a} \right)^2 + \left(\cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi x'}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y'}{a} \right)^2} \right\}$$

偏心槽形线的计算值和实测值如表 3 和表 4 所示。

表 3 圆形内导体的槽形传输线的特性阻抗值(见图 7(a))

d/b		0.05	0.10	0.20	0.30	0.40
$h = 0.25b$	$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (文献[4] $g = 0$)	168.79	127.23	85.68	61.37	44.12
	$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (本文 $g = 0.1b$)	167.16	126.09	84.48	60.09	42.95
	$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (实验 $g = 0.1b$)	167.61	126.38	84.43	60.30	43.24
$h = 0.50b$	$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (文献[4] $g = 0$)	188.98	147.33	105.74	81.36	64.01
	$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (本文 $g = 0.1b$)	186.87	145.19	103.39	78.87	61.35
	$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (实验 $g = 0.1b$)	187.50	146.01	104.21	79.19	62.32

表 4 方形内导体槽形传输线的特性阻抗值 ($w = t, h = 0.5b$) (见图 7(b))

s/b	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.85
$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (文献[10] $g = 0$)	137.44	95.82	71.46	54.21	41.65	30.09	21.05	13.26	9.82
$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (本文 $g = 0.1b$)	134.45	93.01	66.57	48.13	35.27	21.26	14.47		
$Z_0 \sqrt{\epsilon_r}$ (实验 $g = 0.1b$)	135.50	93.69	67.21	49.01	36.13	22.21	15.06		

七、平板形传输线

图 8(a) 为非耦合平板线(这里内导体截面为矩形,实际上可为任意形状)。利用指数函数

$$W = \exp\left(\frac{\pi Z}{d}\right) \quad (21)$$

可将平板从 Z 平面变换到 W 平面上的 x 轴(如图 8(b) 所示), Z' 点对应于

$$W' = \exp\left(\frac{\pi Z'}{d}\right)$$

点。

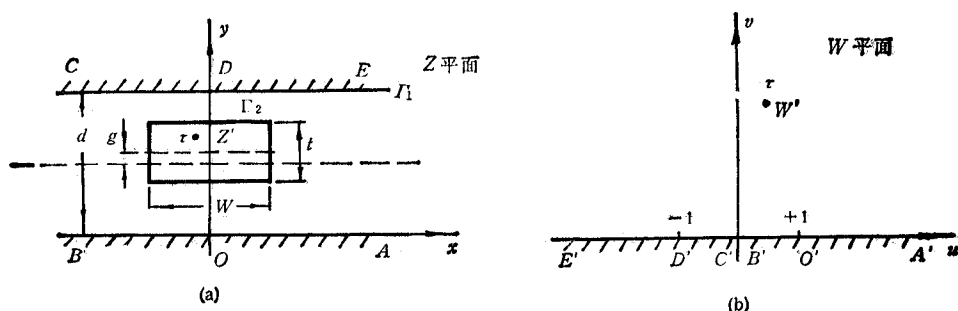


图 8 非耦合平板线的截面

利用镜像法可得

$$G(u, v, u', v') = \frac{\tau}{\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|W - W'^*|}{|W - W'|} \quad (22)$$

和

$$F(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{e^{\frac{2\pi x'}{d}} + e^{\frac{2\pi x}{d}} - 2e^{\frac{\pi(x+x')}{d}} \cos \frac{(y+y')\pi}{d}}}{\sqrt{e^{\frac{2\pi x'}{d}} + e^{\frac{2\pi x}{d}} - 2e^{\frac{\pi(x+x')}{d}} \cos \frac{(y-y')\pi}{d}}} \quad (23)$$

对于图 9 所示的耦合线, 则有

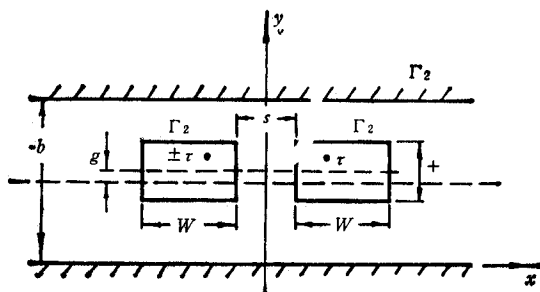


图 9 平板耦合传输线

$$F(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{e^{\frac{2\pi x}{d}} + e^{\frac{2\pi x'}{d}} - 2e^{\frac{\pi(x+x')}{d}} \cos \frac{(y+y')\pi}{d}}}{\sqrt{e^{\frac{2\pi x}{d}} + e^{\frac{2\pi x'}{d}} - 2e^{\frac{\pi(x+x')}{d}} \cos \frac{(y-y')\pi}{d}}} \pm \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{e^{\frac{2\pi x}{d}} + e^{\frac{2\pi x'}{d}} - 2e^{\frac{\pi(x-x')}{d}} \cos \frac{(y+y')\pi}{d}}}{\sqrt{e^{\frac{2\pi x}{d}} + e^{\frac{2\pi x'}{d}} - 2e^{\frac{\pi(x-x')}{d}} \cos \frac{(y-y')\pi}{d}}} \quad (24)$$

式中, 奇模时取一, 偶模时取+.

偏心平板线的特性阻抗 Z_0 的计算值与实测值见表 5 和表 6.

表 5 平板带状线的特性阻抗值(图 8 $t = 0.05b$)

w/b	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
$Z_0\sqrt{\epsilon_r}$ (文献[11] $g=0$)	160.525	132.275	114.010	100.641	90.244	81.856	74.918	69.074	64.080
$Z_0\sqrt{\epsilon_r}$ (本文 $g=0.05b$)	151.326	126.927	107.250	96.071	85.021	76.023	69.345	64.534	59.262
$Z_0\sqrt{\epsilon_r}$ (实验 $g=0.05b$)	152.05	127.50	109.32	97.50	86.03	76.01	70.23	65.14	60.03

表 6 有限厚度三板耦合线的特性阻抗值(图 9)

$\frac{w}{b}$	$\frac{s}{b}$	$\frac{t}{b}$	$Z_{00}\sqrt{\epsilon_r}(g=0.05b)$		$Z_{00}\sqrt{\epsilon_r}(g=0.05b)$	
			计算值	实验值	计算值	实验值
1.0	0.1	0.08	65.567	66.21	43.180	44.02
0.4	0.4	0.2	83.991	84.53	62.367	63.21

八、模拟电荷方程组的求解

根据匹配点的选取不同,(6)式的解法有如下三种:

1. 高斯列主元消去法。这一方法取匹配点数 N 等于模拟电荷数 n , 且事先给定 τ_i 的位置。它的优点是一次就解出 $[\tau]$, 但 τ_i 的位置要经过多次修正后才可满足精度要求。

2. 自适应最小二乘法。这种方法取 $N > n$ 。此时(6)式为线性超定方程组。其缺点是 τ_i 的位置也要不断修正。

3. 最优化方法。最优化法是将模拟电荷的位置和电量均作为待求变量。此时(6)式为非线超定方程组。它的求解可归结为等价的目标函数

$$f(X) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^n p_{ji}\tau_j - 1 \right)^2, \quad (l \geq m + n) \quad (25)$$

的极小问题。式中 l 为匹配点数, m 为确定 n 个模拟电荷位置的变量, $X = [x_1, x_2, \dots, x_{m+n}]^T$ 为待求优化模拟电荷的参量。可用各种优化方法求解(25)式。不过设置合适的初值是最优化法中所常遇到的困难。如果选取不当,就可能得不到解。

可以看出,前两种方法需经过多次尝试才能确定 τ_i 的位置。而最优化法则存在选取合适初值的困难。如能把它们有机地结合起来显然是解决问题的一个有效方案。本文采用如下方案:

第一步,设定 $[\tau]$ 的位置,用高斯列主元消去法解(6)式得 $[\tau]$ 的大小;

第二步,将上一步中设定的 $[\tau]$ 的位置及求得的 $[\tau]$ 的大小作为最优化法的初值,重新在 Γ_1 上取 l 个匹配点,采用 DFP 法求解(25)式,得 $[\tau]$ 的位置和大小。

实际计算表明上述方案是可行的。因为第一步可给出比较合适的初值。它比单独使

用最优法计算量小,且易于收敛.为更好地满足边界条件(2b),应取 t 远大于 $m+n$.
我们编写了上述五类传输线的计算机通用程序.

九、结 论

(1) 本文方法比之传统的全模拟电荷法计算量大为减少,精度高、收敛快,有一定的实用价值

(2) 文中方法的优点还在于:对于上述的五类传输线,无论它们的内导体为何种形状截面,是单根还是多根导体,它都是适用的.这就解决了一大类传输线的计算问题.对于多内导体传输线,其各模式下的准 TEM 的特性阻抗的计算公式与单导体完全相同,只是计算量增大.

(3) 在求得 Z_0 的同时,还可求得传输线的其它参数,如单位长度损耗和最大传输功率等.

(4) 从计算结果看,偏心会使 Z_0 下降,且随着内外导体间距的缩小而更趋明显.这是与理论分析相符合的.

参 考 文 献

- [1] 林为干,钟祥礼,物理学报,19(1963),249—258.
- [2] 林为干,曾令儒,物理学报,30(1981),12—21.
- [3] 曾令儒,物理学报,31(1982),709—721.
- [4] M. A. R. Gunston, Microwave Transmission Line Impedance Data, VNR, London, 1972.
- [5] H. J. Riblet, IEEE Trans. on MTT, MTT-23(1975), 714—715.
- [6] J. C. Tippet, IEEE Trans. on MTT, MTT-24(1976), 602—604.
- [7] 冯慈璋,电磁场,高等教育出版社,1983年,第47页.
- [8] 林为干,潘威炎,电子学报,2(1979),86—90.
- [9] 马西奎,电子科学学刊,10(1988),210—217.
- [10] 潘生根,电子科学学刊,9(1987),490—497.
- [11] 梁昌洪,计算微波,西北电讯工程学院出版社,1985年,第13页,第153页,第183页.

ON THE CHARACTERISTIC IMPEDANCE OF TRANSMISSION LINES OF SPECIFIC CROSS-SECTION WITH OFFSET INNER CONDUCTORS

Ma Xikui

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

Abstract The partial charge-simulation method is presented to solve the characteristic impedance of transmission line of specific cross-section with offset inner conductors. This method has a higher accuracy due to the accurate satisfaction of the boundary condition on the outer conductor. The combined method of gauss elimination and optimization is used to solve the equation of charge-simulation, and it is an effective method for increasing the accuracy and assuring the convergence. The Green's functions of five transmission lines (i.e. with circular, elliptic, rectangular, trough and slab outer conductor) are given.

Key words Microwave transmission line; Offset and specific cross-section transmission line, Green's function; Partial charge-simulation; Optimization