混沌信号相关维提取的一种改进方法

韩建群 朱义胜*
(大连大学信息学院 大连 116622)
*(大连海事大学信息学院 大连 116026)

摘 要：相关维是描述混沌信号的一个重要参数，论文对相关维提取算法进行了深入的研究，结合流行的 GP 算法给出了一种提取相关维的改进算法。该算法具有运算量小、精度高、尺度选择盲目性小等特点。

关键词：混沌，重构，线性尺度区，相关维

中图分类号：O415.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2005)04-0905-03

An Improved Method of Extracting the Correlation Dimension from a Chaotic Signal

Han Jian-qun Zhu Yi-sheng*
(College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, *China)*
(College of Information Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 110626, *China)

Abstract The correlation dimension is an important parameter for describing a chaotic signal. The method of extracting the correlation dimension is deeply researched in this paper. Based on the GP method, an improved algorithm of extracting the correlation dimension is given. The algorithm has the character of little calculating amount, higher accuracy and smaller aimless ability of scaling selection.

Key words Chaos, Reconstruction, Linear scaling region, Correlation dimension

1 引言

混沌现象作为一种类随机现象在 20 世纪 60 年代首先被气象学家 Lorenz 发现，它是非线性动态系统所特有的一种运动形式，既普遍存在又极其复杂。由于混沌系统运动形式的复杂性，人们曾一度认为混沌是不可控和不可预测的，因此尽量避免系统进入混沌状态，但是近来的研究表明，混沌不但可控，而且在某种特定环境下十分有用。目前，混沌研究已成为多学科的研究热点，渗透到通讯、信息科学、医学、生物、工程等多种领域。混沌系统的设计和构造已发展成为一个具有深远意义的课题。

在混沌系统的研究中，Lyapunov 指数、分数维和 Kolmogorov 熵等是有效地刻画混沌现象的重要参数。其中分数维是用来分析和描述混沌系统中奇异吸引子空间维数的，该吸引子特点是组成部分与整体有某种方式的相似，称为分形。分形的特点是分维，在描述吸引子分维的各种方法中，相关维得到广泛关注。目前，GP 算法[1]是提取吸引子相关维的流行算法，该方法是通过对大量不同尺度 ε 分别计算相关积分 (Correlation integral) $c(\varepsilon,m)$，然后用最小二乘法对 $\ln c(\varepsilon,m)$ 与 $\ln(\varepsilon)$ 进行线性拟合，所得直线的斜率即为混沌吸引子的相关维。

本文在文献[2－4]有关相关维提取算法基础上，充分利用相空间相点距离固定的特点来确定 GP 算法中的尺度 ε，避免了尺度 ε 选取的盲目性，减少了计算量，提高了仿真精度。

2004-03-12 收到，2004-07-14 改回
国家自然科学基金(60372007)和交通应用基础项目 (2003 32922501) 资助课题

2 相关维的估计算法

2.1 相空间重构

对于一 N 点标量时间序列 $\{x_k\}, k=0,1,\cdots,N-1$，可以用 Takens[5] 嵌入定理在 m 维嵌入空间内重构向量为 $X_i=(x_i,x_{i+\tau},\cdots,x_{i+(m-1)\tau}), i=1,2,\cdots,M$, 而 $M=N-(m-1)\cdot p$, $\tau=p\cdot\Delta t$ 是时间延迟，其中 p 为比例因子, Δt 为采样周期。

2.2 用 GP 算法求取信号的相关维 d_2

2.2.1 相关积分 $c(\varepsilon,m)$ GP 算法求取信号的相关维是首先选取大量的不同尺度 ε，再运用式(1)计算相关积分 $c(\varepsilon,m)$：

$$c(\varepsilon,m)=\frac{1}{M^2}\sum_{i,j=1}^{M}\theta(\varepsilon-\|X_i-X_j\|) \tag{1}$$

式中，$\|\cdot\|$是欧氏范数，$\theta(\cdot)$是Heaviside单位阶跃函数，即$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$最后用最小二乘法拟合出$\ln c(\varepsilon,m)\sim\ln(\varepsilon)$直线斜率，此斜率即为相关维$d_2$。

GP算法中尺度ε的选取是不确定的，没有利用相点间固有的距离信息，造成一定程度的计算浪费，影响计算速度。本文注意到这一点，在相空间确定后，由M点重构轨迹中任意两个点的距离来确定尺度ε，故令$\varepsilon_{ij}=\|X_i-X_j\|$，$1\le i,j\le M$，在GP算法中是通过自由地选取尺度$\varepsilon$以确定相关积分$c(\varepsilon,m)$，由于本文的尺度$\varepsilon$直接选取为$M$点重构轨迹中任意两点间的距离，因此相关积分$c(\varepsilon,m)$与尺度$\varepsilon$是一一对应的，该方法与GP算法比较没有冗余数据量，这是本文方法计算速度快的原因。

在相关维计算中不可避免地要按照尺度ε进行相关积分$c(\varepsilon,m)$排序，本文采用Matlab中sort函数为尺度ε排序，并以ε为元素，建立欧氏距离矩阵$\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \cdots & \varepsilon_{1,M-1} & \varepsilon_{1M}\\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} & \cdots & \varepsilon_{2,M-1} & \varepsilon_{2M}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_{M-1,1} & \varepsilon_{M-1,2} & \varepsilon_{M-1,3} & \cdots & 0 & \varepsilon_{M-1,M}\\ \varepsilon_{M1} & \varepsilon_{M2} & \varepsilon_{M3} & \cdots & \varepsilon_{M,M-1} & 0\end{bmatrix}$$

该矩阵具有以下特点：(1)对称阵，即$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$；(2)主对角线上元素为零；(3) $\varepsilon_{i-1,j}\le\varepsilon_{i,j}\le\varepsilon_{i,j+1}$; $1\le i\le M-1$; $2\le j\le M$; 其中$\varepsilon_{ij}=[(x(t_i)-x(t_j))^2+(x(t_i+\tau)-x(t_j+\tau))^2+\cdots+(x(t_i+(m-1)\tau)-x(t_j+(m-1)\tau)^2]^{1/2}$。上述分析可以知道，根据$\varepsilon_{ij}$的下标就可以对应确定相关积分$c(\varepsilon_{ij},m)=[(j-1)^2+2\times i+M-j+1]/M^2$。

2.2.2 相关维d_2 $c(\varepsilon,m)$是一个累积分布函数，表示相空间中吸引子上两点之间距离小于ε的概率，对于ε的某个适当范围，吸引子的维数$d(m)$与累积分布函数$c(\varepsilon)$应满足对数线性关系，即$d(m)=\ln c(\varepsilon,m)/\ln(\varepsilon)$，增加$m$，重复计算$d(m)$，直到相应的维数估计值不再随$m$的增长而在一定误差范围内不变为止，此时得到的$d$即为吸引子的相关维$d_2$。

由$\ln c(\varepsilon,m)=d(m)\ln(\varepsilon)$，即相关积分取对数后的增量是距离取对数后增量的$d(m)$倍。对于上述矩阵有式(2)

$$d(m)\approx\frac{\ln(n+\Delta n)^2-\ln n^2}{\ln(\varepsilon_{n+\Delta n,n+\Delta n+1})-\ln(\varepsilon_{n,n+1})}n,\quad \Delta n=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

偏移量Δn不宜过大。

2.2.3 线性尺度区确定 根据文献[4,6]的研究结果可以推得

$$\left.\begin{aligned}&\ln c(\varepsilon,m)\approx d_2\ln(\varepsilon)-m\tau TK_2\\ &\tau TK_2\approx\ln\frac{c(\varepsilon,m)}{c(\varepsilon,m+1)}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由式(3)推得$\tau TK_2\approx\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\ln\overset{\Delta}{c}(\varepsilon_i,m)-\ln\overset{\Delta}{c}(\varepsilon_i,m+1))$。令$r_i=\ln\overset{\Delta}{c}(\varepsilon_i,m)-\ln\overset{\Delta}{c}(\varepsilon_i,m+1)$；$\bar{r}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}r_i\approx\tau TK_2$；$\Delta\ln\varepsilon_i(m)=\ln\varepsilon_i(m)-\ln\varepsilon_i(m+1)$；则

$$-\tau TK_2\approx\frac{d_2}{M}\sum_{i=1}^{M}\Delta\ln(\varepsilon_i(m))\approx-\bar{r} \tag{4}$$

令$R_i=r_i-r_{i-1}$，变量R_i反映了相邻曲线的变化程度，取$|R_i|\le|\bar{r}|$所对应的ε为线性尺度区的下界。式中参数如下：M为重构轨迹点数；m为嵌入维；d_2为相关维；T为采样周期；τ为时间延迟；K_2为2阶熵；$\overset{\Delta}{c}(\varepsilon_i,m)$为实际计算的相关积分；$c(\varepsilon_i,m)$为相关积分理论拟合值；$\Delta\ln\varepsilon_i(m)$为相邻曲线尺度对数增量；$r_i$为相邻曲线纵轴偏差；$\bar{r}$为偏差均值；$R_i$为偏差变化度。

由式(3)知$-\tau TK_2$为在嵌入维m和$m+1$时，$\ln c(\varepsilon,m)\sim\ln(\varepsilon)$两条拟合曲线在纵轴上的截距，本方法纵轴由$\ln(1/M^2),\ln(4/M^2),\cdots,\ln(n^2/M^2),\cdots,\ln(1)$等$M$个离散点构成，即纵轴的取值是确定的，这与文献[3,4]介绍的随横轴$\ln(\varepsilon)$取值计算$\ln c(\varepsilon,m)$的情况不同，根据式(4)由横轴距离$\Delta\ln\varepsilon_i(m)$的增量均值就可以确定$-\tau TK_2$，这里纵轴、横轴只差一个常数。

对于线性尺度区$(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$的确定，根据文献[3,4]等关于相关维的定义，我们给出以下假设。

假设 在线性尺度区$(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$范围内，曲线斜率随嵌入维$m$小幅度变化时，相邻曲线拟合偏差及偏差变化度不大于偏差均值。

根据以上假设，在线性尺度区$(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$范围内取若干点计算斜率，再取均值即可估计相关维。

3 实例仿真

文献[2]对Hénon和Lorenz两种著名的混沌系统相关维进行了计算，并与文献[7]的结果进行了比较，本文也采用这两种系统进行仿真，结果如图1图2，对于Hénon，Lorenz系统，分别用时间序列500和1000点，为自动实现相关维的提取，计算r_i，$\bar{r}$，R_i以确定$(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$，$R_i$仿真曲线如图3图4，以$\bar{r}$为界限，当$|R_i|\le|\bar{r}|$时对应的$\varepsilon_{\min}$作为线性尺度区的下界，在选取一定$\Delta\varepsilon$偏差，以$\varepsilon_{\max}=\varepsilon_{\min}+\Delta\varepsilon$为尺度区的上界，这里$\Delta\varepsilon$不宜过大，计算值示于表1，表中参照值取自文献[2,7]。仿真结果表明本文方法能够准确提取混沌信号的相关维，方法有效。

表 1　混沌系统相关维计算表

动力方程	m	τ	Δt	$\bar{r}$	$\varepsilon_{\min}$	$\varepsilon_{\max}$	d_2 参照值	d_2 计算值
Hénon系统 $\begin{cases} x_{i+1}=1-1.4x_i^2+y_i \\ y_i=0.3x_i \end{cases}$	10	1	1	0.1006	0.0133	0.055	1.195	1.2011
Lorenz 系统 $\begin{cases} \dot{x}=10(y-x) \\ \dot{y}=x(28-z)-y \\ \dot{z}=xy-(8/3)z \end{cases}$	10	0.02	0.005	0.0793	0.2669	3.0183	2.04	2.0363

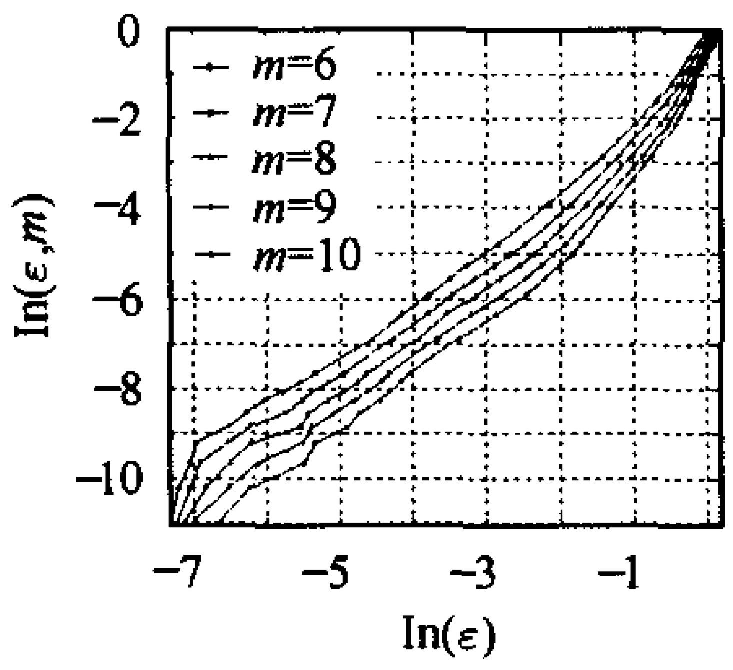

图 1　Hénon 系统相关维计算曲线

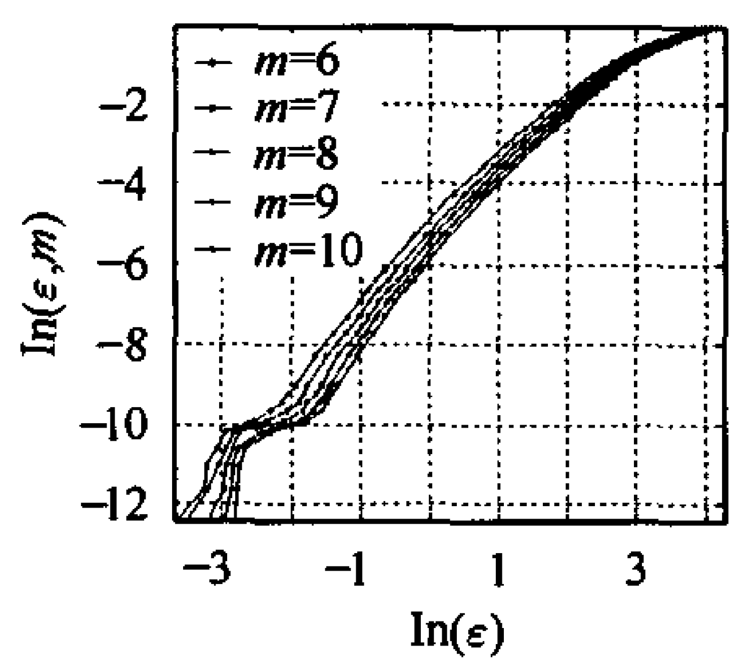

图 2　Lorenz 系统相关维计算曲线

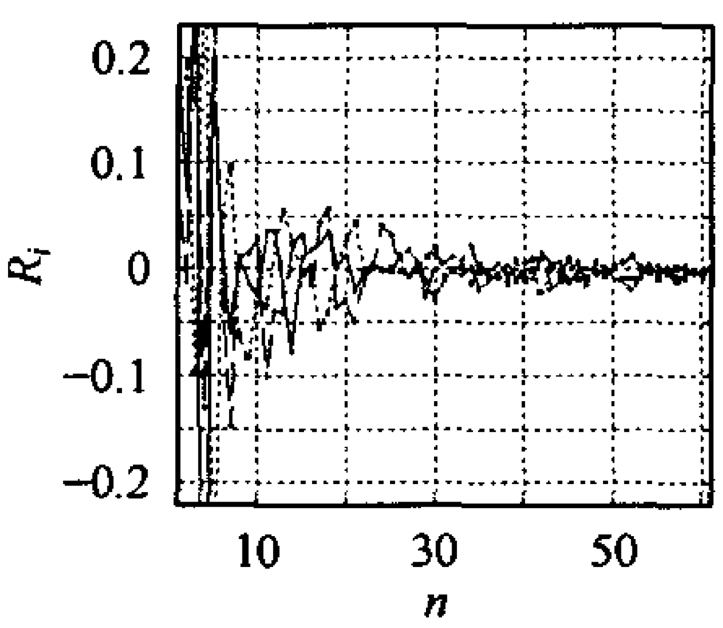

图 3　Hénon 系统 R_i变化曲线

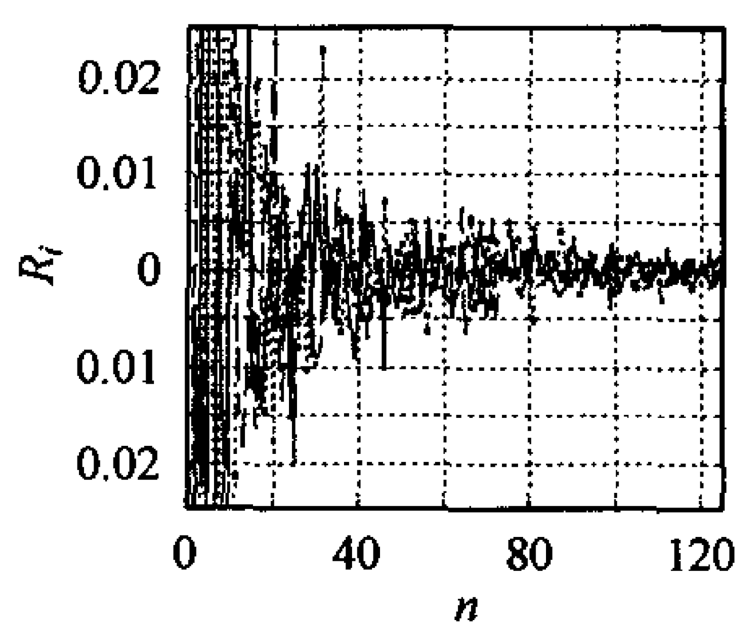

图 4　Lorenz 系统 R_i变化曲线

4　结束语

从以上分析论述知：本文注意到相空间相点距离固定的特点，通过研究相点距离与尺度 ε 对应关系，避免了尺度选择盲目性，从而减少了计算冗余，在计算量相同情况下，计算精度得到提高，并且具有可以在不计算最大 Lyapunov 指数条件下提取相关维的特点。

参考文献

[1] Grassberger P, Procaccia I. Characterization of stranger attractors [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, 50(5): 346 ~ 349.

[2] 杨绍清, 等. 一种实用的混沌信号相关维的提取算法. 电子学报, 2000, 28(10): 20 ~ 22.

[3] Kantz H, Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis, England, Cambridge University Press, 1997: 69 ~ 75.

[4] 吕金虎, 陆君安, 陈士华. 混沌时间序列分析及其应用. 武汉: 武汉大学出版社, 2002: 57 ~ 71.

[5] Takens F. Detecting strange attractors in fluid turbulence[A].in: Dynamical Systems and Turbulence [C].eds. D. A. Rand and L. S. Young, Berlin: Springer, 1981: 366 ~ 381.

[6] 陈士华, 陆君安. 混沌动力学初步. 武汉: 武汉水利电力大学出版社, 1998: 95 ~ 101.

[7] Lai Y C, *et al.*. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series [J]. *Physica D*, 1998, 115(1-2): 1 ~ 18.

韩建群：　男，1968 年生，讲师，在职博士生，从事混沌控制与通信、信号处理等研究.

朱义胜：　男，1947 年生，教授，博士生导师，从事调制解调、混沌控制与信号处理等研究.