

希尔伯特变换器的新实现*

黄 大 卫

(上海铁道学院)

提 要

利用波数字格型滤波器实现复数滤波器,其输出信号的实部和虚部之间满足希尔伯特变换关系。本文介绍这种变换器的新计算方法。它的公式和设计过程十分简单,以至用小的可编程计算器或微处理机就可完成必要的计算。

一、引 言

应用希尔伯特(Hilbert)变换器产生单边带信号,这概念提出已久^[1],可是没得到广泛采用。这是由于模拟的希氏变换器的特性不理想,实现复杂。随着数字技术的发展,离散的希氏变换器和数字滤波器相似,可以得到精确、稳定的特性。因此,近年来对希氏变换器又感到很大兴趣,发表了不少实现原理和设计方法。它们基本上可分成两类:一类是用有理全通函数逼近希氏特性^[1,2]。它的振幅特性是理想的,但相位之间有偏差。有时为了满足因果性,还需附加一定时延。另一类是利用三角函数进行逼近^[3],得到的相位特性是理想的,但振幅之间有偏差。以上两种方法都存在近似函数阶数较高,实现硬件多和计算复杂等缺点。文献[4]介绍的方法虽也是属于第一类,但它是建立在复数波数字滤波器的基础上的。

波数字滤波器具有似无源性和似无耗性,所以特性稳定,系数变化对滤波器频响的敏感性低,可以用较短的字长来实现^[5]。特别是若格型波数字滤波器的特性函数满足自倒量条件,则在实现时可以节约一半以上的乘法器和加法器^[6]。所以,利用它构成希氏变换器具有结构简单,实现需要硬件少等优点。

在设计过程中,由于自倒量滤波器不能从滤波器设计图表^[7]查出。同时,希氏变换器与其对应的低通滤波器的设计指标之间没有明显关系,因此也不能用现有的滤波器综合程序^[8]简单地得到。另外,作为数字信号处理的重要部件之一的希氏变换器,它的设计者和应用者不一定都具备足够的网络理论知识,不一定都有大型计算机和网络综合程序。为此,本文介绍一种希氏变换器的简便算法。它是如此简单,以至没有丰富网络理论知识的工作者,应用可编程的小计算器或微处理机就能得到满足指标要求的希氏变换器。下面我们首先简略地介绍一下利用复数波数字滤波器实现希氏变换器的基本原理,然后给出它的计算公式和设计图表。最后通过实例说明该方法的应用步骤。在Apple II微处理机

* 1984年7月10日收到,1985年5月27日修改定稿。

上经过多次运算,在高达 $N = 19$ 的希氏变换器设计中也能得到满意的结果。

二、基 本 原 理

实数滤波器的频率位移一定值 ω_0 后,就能得到复数滤波器^[9]。若实数滤波器的传递函数为 $H(Z)$,则移频后得到的复数滤波器的传递函数为:

$$H(Z') = H(Ze^{-j\omega_0 T}), \quad (1)$$

假定取样周期 $T = 1$,且实数低通滤波器的特性是理想的,它的相补输出端的衰减响应对称于 $1/4$ 取样频率,则移频 $\omega_0 (= \pi/2T)$ 后,相应复数滤波器输出序列的傅氏变换 $Y(e^{j\omega})$ 满足因果性,即其 Z 变换在单位圆的下半周 ($-\pi \leq \omega < 0$) 为零^[10]。所以, $Y(e^{j\omega})$ 可以用它的实部 $Y'(e^{j\omega})$ 和虚部 $Y''(e^{j\omega})$ 来表示:

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2Y'(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi; \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \quad (2)$$

或

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jY''(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi; \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \quad (3)$$

根据 (2) 和 (3) 式可得:

$$Y''(e^{j\omega}) = -j \operatorname{sgn}(\omega) Y'(e^{j\omega});$$

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \pi; \\ -1, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \quad (4)$$

(4) 式说明实部和虚部输出信号之间,大小相等,相位相差 90° ,满足希尔伯特变换关系。

为了减少实现所需硬件,采用自倒量的格型低通波数字结构来近似实现上述理想低通滤波器。该滤波器的波流图如图 1 所示。规范格型阻抗的反射因子

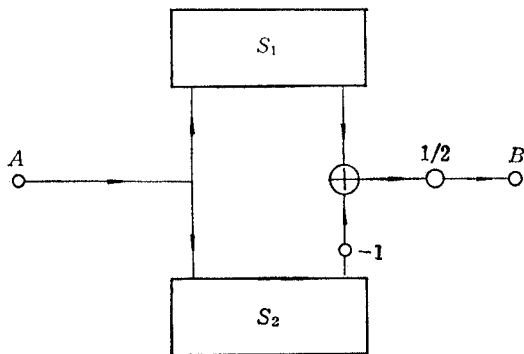


图 1 实格型低通滤波器的波流图

分别为^[6]:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{\phi - 1}{\phi + 1} \right) \left(\frac{\phi^2 - B_2\phi + 1}{\phi^2 + B_2\phi + 1} \right) (\dots); \\ S_2 &= \left(\frac{\phi^2 - B_1\phi + 1}{\phi^2 + B_1\phi + 1} \right) \left(\frac{\phi^2 - B_3\phi + 1}{\phi^2 + B_3\phi + 1} \right) (\dots), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 ϕ 为等效复频率,它和普通 Z 变量之间满足

$$\phi = \frac{Z - 1}{Z + 1}, \quad Z = e^{j\omega T}, \quad T = \frac{1}{f_T}. \quad (6)$$

将频率位移 $f_T/4$ 后,得到复数波数字滤波器的等效复频率为 ϕ' ,它和 ϕ 之间满足:

$$\phi = \frac{\phi' + j}{j\phi' + 1}. \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (5) 式得到复数滤波器相应的反射因子:

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= \left(-j \frac{1 - \phi'}{1 + \phi'} \right) \left(-\frac{\phi'^2 - A_2 \phi' + 1}{\phi'^2 + A_2 \phi' + 1} \right) (\dots), \\ S'_2 &= \left(-\frac{\phi'^2 - A_1 \phi' + 1}{\phi'^2 + A_1 \phi' + 1} \right) \left(-\frac{\phi'^2 - A_3 \phi' + 1}{\phi'^2 + A_3 \phi' + 1} \right) (\dots); \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$A_i = \frac{4}{B_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

与(8)式相应的复数波数字滤波器的波流图(假定为7阶)如图2所示^[4]。由于实际输入的是一个实数信号,即在图2中 $A = A'$ 和 $A'' = 0$, 因此与 A'' 相联的所有适配器和时延都可以删除。得到希氏变换器的波流图如图3所示。其中的乘法系数为:

$$r_i = \frac{A_i - 2}{A_i + 2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

三、设计公式和图表

从上节可知,要得到一个希氏变换器必须先设计一个相应的自倒量低通滤波器。它是一个满足椭圆函数特性的对称网络。以往用复杂的椭圆函数计算它的参数^[11]。文献[8]采用变换变量近似地得到有关参数,但是这需要较大的计算机和复杂程序。达林顿(Darlington)在文献[12]中介绍一种对奇阶椭圆滤波器进行逼近的简便算法。对于贝特沃思(Batterworth)、切比雪夫(Chebyshev)和椭圆等三种滤波器,若采用适当的变量,就可以用相同形式的公式计算它们的参数,也就可以借用前两者的简单设计公式得到椭圆滤波器的参数。本文将上述方法与滤波器的自倒量特性相结合,即自倒量滤波器的通带、阻带衰减响应对称于 $1/4$ 取样频率,因此使设计公式得到进一步简化。同时,对称网络的自然模式相间地分配至两个规范格型阻抗^[13]。因此,利用(9)和(10)式就可以方便地得到希氏变换器的乘法系数值。

为了便于数值运算,在文中所有的频率 f 用单位圆上的角度 χ 来表示,即

$$\chi = 360 \cdot f/f_T \quad (^\circ). \quad (11)$$

在 ϕ 域上低通滤波器的通带边界频率

$$\phi_p = \tan(\chi_p/2).$$

当给定 ϕ_p 和阻带允许的最小衰减 A_s 后,低通滤波器的阶数最小值为^[14]:

$$n_{\min} = \frac{16 \ln(2 \cdot \sqrt{10^{A_s/10} - 1})}{\ln(2 \cdot Q_4)}, \quad (12)$$

其中常数 Q_4 由下列递推公式求得:

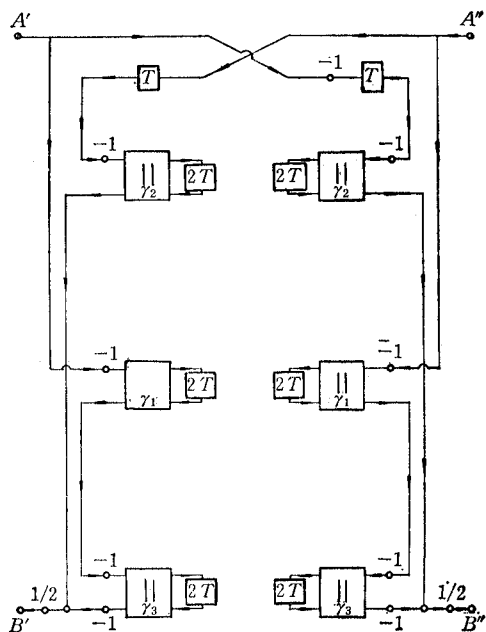


图2 复数波数字滤波器的波流图

$$Q_0 = 1/\phi_p, \quad Q_{i+1} = Q_i^2 + \sqrt{Q_i^4 - 1}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

(12) 式得到的 $n_{\min}$ 不一定是奇数, 所以滤波器的最低阶数 N 应为满足下列条件的最小奇数:

$$N \geq n_{\min}. \quad (14)$$

当 $N > n_{\min}$ 时, 留有设计余量供系数优化之用。

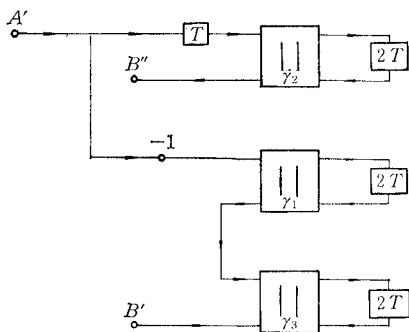


图3 希尔伯特变换器的波流图

由于滤波器满足自倒量条件, 计算自然模式的辅助参数公式^[12]得到进一步简化。当 $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ 时, 辅助参数 C 和 Y_k 可计算得到:

$$\left. \begin{aligned} C_{4,k} &= -\frac{Q_4}{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}, \\ C_{j-1,k} &= \frac{1}{2Q_{j-1}} \left(C_{j,k} + \frac{1}{C_{j,k}} \right), \quad j = 4, 3, 2, 1; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$Y_k = \frac{1}{C_{0,k}}. \quad (16)$$

因此, 图3中希氏变换器的各乘法系数值为:

$$\gamma_k = \frac{1 + Y_k^2 - \sqrt{1 - (1/\phi_p^2 + \phi_p^2 - Y_k^2)Y_k^2}}{1 + Y_k^2 + \sqrt{1 - (1/\phi_p^2 + \phi_p^2 - Y_k^2)Y_k^2}}. \quad (17)$$

根据得到的希氏变换器就可以计算出它的相位响应, 即工作频带宽度 B 、输出信号的相位差和 90° 的偏差 Δ 。而工作频带的下边界频率 χ_u 和宽度 B 之间满足:

$$B = 180^\circ - 2\chi_u. \quad (18)$$

当给出低通滤波器的不同设计指标 χ_p 、 A_s 和阶数 N 时, 由 (8)(9) 和 (17) 式可以计算得到希氏变换器的 Δ 、 χ_u 和 γ_k 值, 其结果列于表1。今后设计希氏变换器时只需根据要求的指标, 在表1中就能查到对应的结构和乘法系数值。

四、设计实例

例 试设计一个希尔伯特变换器, 其工作带宽为 158° , 相位偏差 $\leq 1^\circ$ 。

设计 工作频带 $B = 158^\circ$, 由式 (18) 可得:

$$\chi_u = (180 - B)/2 = 11^\circ$$

表 1 希尔伯特变换器的设计图表

N	$\chi_u(^{\circ})$	$\Delta(^{\circ})$	$\chi_p(^{\circ})$	$A_s(\text{dB})$	i	γ_{2i-1}	γ_{2i}
5	47	0.08893	45	40	1	0.13802	0.58468
5	45	0.12087	47.5	50	1	0.14271	0.59215
5	42	0.16259	50	40	1	0.14794	0.60028
5	40	0.21676	52.5	50	1	0.15377	0.60915
5	37	0.28704	55	40	1	0.16031	0.61881
5	32	0.49404	60	40	1	0.17596	0.64086
5	27	0.83939	65	40	1	0.19617	0.66736
7	46	0.00384	45	70	1	0.07022	0.28509
					2	0.68454	
7	44	0.00591	47.5	60	1	0.07289	0.29250
					2	0.69082	
7	41	0.00895	50	60	1	0.07587	0.30069
					2	0.69764	
7	39	0.01339	52.5	60	1	0.07922	0.30976
					2	0.70503	
7	36	0.01979	55	60	1	0.08299	0.31981
					2	0.71306	
7	34	0.02907	57.5	50	1	0.08726	0.33097
					2	0.72177	
7	31	0.04239	60	50	1	0.09211	0.34343
					2	0.73125	
7	29	0.06151	62.5	50	1	0.09766	0.35737
					2	0.74158	
7	26	0.08902	65	50	1	0.10405	0.37307
					2	0.75285	
7	24	0.12878	67.5	50	1	0.11149	0.39085
					2	0.76520	
7	21	0.18678	70	40	1	0.12025	0.41114
					2	0.77879	
7	19	0.27236	72.5	50	1	0.13071	0.43453
					2	0.79381	
7	16	0.40099	75	40	1	0.14344	0.46182
					2	0.81052	
7	11	0.91869	80	40	1	0.17984	0.53343
					2	0.85061	
9	31	0.00364	60	70	1	0.05636	0.21482
					2	0.45647	0.78512
9	28	0.00586	62.5	70	1	0.05992	0.22567
					2	0.47119	0.79375
9	26	0.00944	65	70	1	0.06403	0.23803
					2	0.48761	0.80314
9	23	0.01518	67.5	60	1	0.06883	0.25222
					2	0.50599	0.81339
9	21	0.02447	70	60	1	0.07452	0.26866
					2	0.52673	0.82462

表 1 (续)

N	$\chi_u(^{\circ})$	$\Delta(^{\circ})$	$\chi_p(^{\circ})$	$A_r(\text{dB})$	i	γ_{2i-1}	γ_{2i}
9	18	0.03974	72.5	60	1	0.08134	0.28795
					2	0.55029	0.83698
9	16	0.06538	75	50	1	0.08969	0.31092
					2	0.57735	0.85067
9	13	0.10967	77.5	50	1	0.10021	0.33884
					2	0.60884	0.86595
9	11	0.18973	80	50	1	0.11394	0.37373
					2	0.64617	0.88321
9	8	0.34570	82.5	50	1	0.13291	0.41919
					2	0.69161	0.90302
9	6	0.68921	85	40	1	0.16172	0.48266
					2	0.74936	0.92637
11	18	0.00580	72.5	70	1	0.05526	0.20293
					2	0.40365	0.62575
					3	0.86509	
11	16	0.01066	75	70	1	0.06109	0.22106
					2	0.43046	0.65096
					3	0.87665	
11	13	0.02005	77.5	70	1	0.06846	0.24342
					2	0.46242	0.67996
					3	0.88952	
11	11	0.03922	80	60	1	0.07814	0.27187
					2	0.50142	0.71384
					3	0.90399	
11	8	0.18969	85	50	1	0.11230	0.36464
					2	0.61650	0.80473
					3	0.93992	
13	13	0.00810	80	70	1	0.05674	0.20481
					2	0.39553	0.58643
					3	0.75903	0.91844
13	8	0.01927	82.5	70	1	0.06672	0.23576
					2	0.44209	0.63453
					3	0.79518	0.93264
13	7	0.05220	85	60	1	0.08215	0.28145
					2	0.50661	0.69694
					3	0.83941	0.94921
13	4	0.18918	87.5	50	1	0.11182	0.36222
					2	0.60909	0.78609
					3	0.89724	0.96952
15	7	0.01436	85	70	1	0.06255	0.22242
					2	0.41851	0.60149
					3	0.74936	0.86324
					4	0.95598	

表 1 (续)

N	$\chi_u(^{\circ})$	$\Delta(^{\circ})$	$\chi_p(^{\circ})$	$A_s(\text{dB})$	i	γ_{2i-1}	γ_{2i}
15	4	0.06347	87.5	60	1	0.08560	0.29077
					2	0.51714	0.70116
					3	0.82926	0.91387
					4	0.97366	
17	3	0.02129	87.5	70	1	0.06751	0.23710
					2	0.44002	0.62163
					3	0.76027	0.85784
					4	0.92569	0.97680

从表 1 可查得, 自倒量低通滤波器的参数为 $N = 7$ 阶, $A_s = 40\text{dB}$ 和 $\chi_p = 80^{\circ}$. 对应的希氏变换器的乘法系数值可以直接查出为:

$$\gamma_1 = 0.17984, \gamma_2 = 0.53343, \gamma_3 = 0.85061.$$

希氏变换器的信号流程图如图 4 所示. 它需要 3 个乘法器和 9 个加法器. 其输出信号的相位偏差在工作频带内作等波动变化, 偏差的最大值为 0.918° , 如图 5 所示. 若采用数字递归型希氏变换器^[2], 在相同的相位偏差条件下, 工作带宽为 110° 时, 就需要 5 个乘法器和 10 个加法器才能实现.

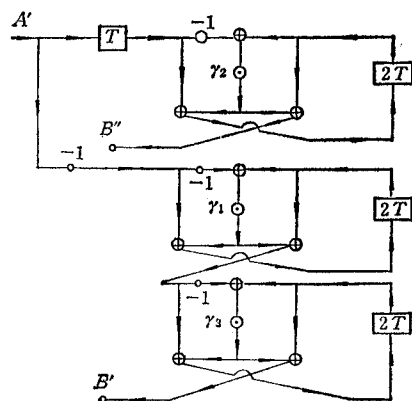


图 4 信号流程图

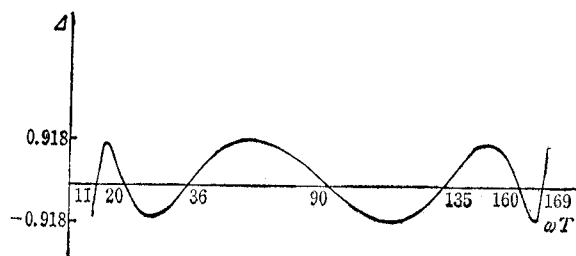


图 5 相位偏差

五、结 束 语

利用复数波数字滤波器实现希尔伯特变换器具有结构简单、实现需要硬件少、输入与输出的信噪比相同、系数误差对网络特性影响小等优点. 但是, 它必须先设计一个合适的自倒量格型波数字滤波器. 因此, 以往在一般条件下, 该设计是有困难的. 本文将滤波器的自倒量条件与文献 [12] 介绍的简便算法相结合, 使得设计公式进一步简化, 从而使计算变得简单, 所需计算机内存减少. 即使是设计一个高阶的希氏变换器, 也可以在可编程

的小计算器或微处理机上得到满意的结果。

本文曾得到杜锡钰、王文煊教授的审阅,多所指正,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] O. Herrmann, *A. E. Ü.*, **23**(1969), 77.
- [2] B. Gold, A. V. Oppenheim and C. M. Rader, Theory and Implementation of the Discrete Hilbert Transform, Proc. Symp. Computer Processing in Communications, Vol. 19, Polytechnic Press, N. Y., (1970), 235.
- [3] O. Herrmann, *A. E. Ü.*, **23**(1969), 581.
- [4] 黄大卫, 通信学报, 1984 年, 第 4 期, 第 41 页.
- [5] A. Fettweis and K. Meerkötter, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-22** (1975), 234.
- [6] 邵其, 黄大卫, 费特魏斯, 通信学报, 1983 年, 第 3 期, 第 15 页.
- [7] R. Saal, Handbook of Filter Design, Backnang, Germany, AEG-Telefunken, (1979), 41.
- [8] 黄大卫, 茅永江, 电子学报, 1981 年, 第 6 期, 第 47 页.
- [9] A. Fettweis, *Circuit theory and Application*, **9**(1981), 119.
- [10] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, Digital Signal Processing, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, (1975), 353.
- [11] W. Cauer, Synthesis of Linear Communication Network, McGraw-Hill, N. Y., (1958), 94.
- [12] S. Darlington, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-25** (1978), 975.
- [13] L. Gazsi, *ibid*, **CAS-32**(1985), 68.
- [14] 黄大卫, 环行器型波数字滤波器的简单算法, 电子学报, 1985 年, 第 5 期, 第 32 页.

NOVEL REALIZATION OF HILBERT TRANSFORMATION

Huang Dawei

(Shanghai Institute of Railway Technology)

In a complex filter which is realized by using a wave digital lattice filter, the relation between the real part and the imaginary part of its output fulfills Hilbert transformation. A novel simple algorithm for this kind of Hilbert transformation is given. The design formulas and process are so simple that a pocket programmable calculator or a microcomputer is sufficient to carry out the necessary calculations.