

TCM 信号序列的自由空间距离的矩阵算法¹

樊平毅 曹志刚

(清华大学电子工程系 微波与数字通信国家重点实验室 北京 100084)

摘 要 本文研究了 TCM 信号序列的自由空间距离的计算问题, 提出一种新的算法——矩阵算法, 同时在理论上解决了计算 TCM 信号序列的自由空间距离所需状态转移次数问题。此矩阵算法的推导基于 Viterbi 算法, 它是 Viterbi 算法的矩阵实现。与已有的算法相比, 此算法的优点在于: (1) 给出了显式解, 使得计算的复杂度相对减小。(2) 对空间距离的变化具有更强的适应性。作为实例, 给出了高斯信道和衰落信道上的一些 TCM 信号序列的自由空间距离的计算结果。

关键词 网格编码调制, 矩阵算法, 衰落信道

中图分类号 TN929.5

1 引 言

网格编码调制 (Trellis Coded Modulation, TCM) 将编码和调制有机结合, 在不增加传输频带带宽, 不降低信息速率的条件下, 仍有可观的编码增益, 它成为数字通信研究的热点课题之一。

TCM 系统的性能依赖于所用的解调解码算法和传输信码间的距离特性。对给定的 TCM 系统, 误符号率界限估计方法, 由于不受编码约束长度和信噪比高低的限制, 对各种情况都有较好的适应性, 因此, 已成为判定 TCM 系统性能的主要方法之一。特别当信噪比足够大时, TCM 的系统误符号率上、下界可用其信号序列的自由空间距离进行计算。所以, TCM 信号序列的自由空间距离成为设计 TCM 编码的一个重要的物理指标。例如, 在高斯信道上, 常用 TCM 信号序列的自由空间距离来表征 TCM 系统的渐近编码增益。对给定的 TCM 系统, 准确地计算其自由空间距离十分必要。

目前, 关于 TCM 信号序列的自由空间距离的计算, 已有多种算法, 例如, Viterbi 算法、Rouanne 和 Costello 的距离谱算法^[1], 错误状态转移函数法, 整体搜索算法, 乘积网格算法, 和相应的动态规化算法等。本文提出了一种新的求解算法——矩阵算法, 它与上述算法的区别在于: 与 Viterbi 算法, Rouanne 和 Costello 的距离谱算法, 以及动态规化算法相比, 它给出了显式表达式, 并且准确给出计算自由空间距离所需的状态转换数目, 可避免不必要的计算量; 与错误状态转移函数法和乘积网格算法相比, 当状态数较多时, 能避免计算转移函数所带来的困难, 并且对空间距离的变化有更强的适应性; 与整体搜索法相比, 计算复杂度大为简化, 并且对距离空间的变化适应性更强。

2 矩阵算法的推导

为了下面叙述方便, 先引入一些基本定义。

¹ 1995-07-18 收到, 1996-06-18 定稿
国家自然科学基金资助项目

定义 1 假定 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 为具有 k 个转移分支的某条路径, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ 为与 P 首尾相接但中间不相交的另一条路径, 称 Q 为 P 的一条首次错误事件路径, k 称为该首次错误事件路径的长度。

定义 2 如果矩阵 A 中有元素为无穷, 则称为超越矩阵。如果矩阵 A 中有元素的绝对值大于某一指定的正数, 则称之为伪超越矩阵。

定义 3 设 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 为一组实数, 其最小值记为 $i\{a_i\} = \min\{a_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ 。

定义 4 设 A 为一矩阵, 定义矩阵 A 与 B 的最小值选项乘积为 $C = AB$, 其中 C 的第 i 行 j 列元素为 $c_{ij} = k\{a_{ik}b_{kj}\}$, 其中 a_{ik} 为 A 的第 i 行 k 列元素, b_{kj} 为 B 的第 k 行 j 列元素, 表示实数相乘。记 $A(k) = AA \cdots A$ 表示矩阵 A 的 k 重最小值选项乘积。

下面利用上述定义推导 TCM 信号序列自由空间距离的矩阵乘法。关于 TCM 信号序列的距离谱计算, 文献 [2,3] 的结果表明, 广义准正则格形码的距离谱可用全零信息序列对应的码字进行计算。因此, 广义准正则格形码的自由空间距离可用全零信息序列对应的码字进行计算。

从文献 [1,3] 中知, Ungerboeck 编码速率为 $k/(k+1)$ 的系统码 (TCM 码) 为准正则格形码, 在特定的度量意义下 [3] 为广义准正则格形码。下面以编码速率为 $k/(k+1)$ 的 Ungerboeck 型 TCM 信号为例给出了矩阵算法。

用 $k, k+1$ 分别表示编码器在第 $k, k+1$ 时刻的状态, 假定编码器状态集为 $\{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}$, 输出的信号集为 $\{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$, 编码器的状态从 s_i 转移到 s_j 时相应的输出信号子集为 $\{I_{i,j}^k\}$, $I_{i,j}^k$ 表示从 s_i 转移到 s_j 第 k 条并行路径上对应的输出信号。当编码器的状态从 s_i 到 s_j 无联络分支时, $\{I_{i,j}^k\}$ 取空集。假定信码间的度量函数为 m , 全零信息序列对应的编码器的转移状态序列为 $\{s_0, s_0, \dots, s_0, \dots\}$, 相应的单步转移的最小距离矩阵为 $P = \{p_{i,j}\}_{N \times N}$, 其中

$$p_{i,j} = D^{\min_k \{m(I_{i,j}^k, I_{0,0}^0)\}} \quad (1)$$

表示矩阵 P 的第 $(i+1)$ 行 $(j+1)$ 列元素, D 为一大于 1 的正数, $m(I_{i,j}^k, I_{0,0}^0)$ 表示信号 $I_{i,j}^k$ 与 $I_{0,0}^0$ 之间的距离。当 $I_{i,j}^k$ 取空集时, 相应的 $p_{i,j}$ 取为无穷。记矩阵 P 的后 $(N-1)$ 行 $(N-1)$ 列组成的矩阵为 P_1 。下面给出有限长度的首次错误事件路径的最短距离的算法。记首次错误事件路径的长度为 L , 相应的最短距离为 $d(L)$ 。

$$\text{当长度 } L = 1 \text{ 时, 显然 } d(1) = \min_k \{m(I_{0,0}^k, I_{0,0}^0)\}, \quad (2)$$

$$\text{当长度 } L = 2 \text{ 时, } d(2) = \log_D \left\{ \min_{j \neq 0} \{p_{0,j} \cdot p_{j,0}\} \right\}. \quad (3)$$

当长度 $L > 2$ 时, 计算 $P_1^{(L-2)}$, 记矩阵的第 i 行 j 列元素为 $p_{1,i,j}^{(L-2)}$, 则

$$d(L) = \log_D \left\{ \min_{i,j \neq 0} \{p_{0,i} \cdot p_{1,i,j}^{(L-2)} \cdot p_{j,0}\} \right\}, \quad (4)$$

其中 $p_{1,i,j}^{(L-2)}$ 为从状态 s_i 到状态 s_j 除去经过状态 s_0 的所有长度为 $L-2$ 的连通路径与全通路径之间的最小距离。

(2)–(4) 式的推导采用了 Viterbi 算法, 它给出了计算 $d(L)$ 的显式表达式。此算法与原 Viterbi 算法相比, 计算复杂度相对较小, P_1^{L-2} 的计算可采用递推算法; 同时所需的存储空间

相对较小,因为在每次 $d(L)$ 的计算中,只需保存相应的矩阵 $P_1^{(L-2)}$ 即可。事实上,自由空间距离

$$d = \min_{L \geq 1} \{d(L)\}. \quad (5)$$

因此在自由空间距离的计算中,常常只需计算有限次来估计它的值,不可能将所有的 $d(L)$ 全部计算出来,并且自由空间距离也确实与某个 $d(L)$ 相等。所以,准确估计所需状态转移次数成为 TCM 信号序列自由空间计算中的关键问题。

3 自由空间距离计算量的理论估计

因为 TCM 的网格图是全通的,即从任何一个状态出发,经过有限次状态转移,可到达图中任一状态,所以存在一常数 L_0 。当 $L \geq L_0$ 时,任何两个状态之间都存在两条以上的连通路径。根据我们的矩阵乘法的定义,当 $L \geq L_0$ 时,矩阵必为一非超越矩阵。于是,我们可作如下假设:

当 $L = L_1$ 时,矩阵 $P_1^{(L-2)}$ 首次成为非超越矩阵,记 M_0 为矩阵 $P_1^{(L-2)}$ 的最小元,即

$$M_0 = \min_{i,j \neq 0} \{p_{1,i,j}^{(L-2)}\}. \quad (6)$$

在一般的情况下, $M_0 > 1$ 。

下面以定理的形式给出关于 TCM 信号序列的自由空间距离的计算量的估计结果。

定理 具有时不变结构的 TCM 码,如果它为广义准正则格形码, P 为单步转移的最小距离矩阵, P_1 为矩阵 P 中除去第一行第一列后的元素组成的子矩阵,且满足如下条件:

(1) 存在正整数 L_1 , L_1 重最小值选项乘积 $P_1^{(L_1-2)}$ 为非超越矩阵。(2) 矩阵 $P_1^{(L_1-2)}$ 的最小元 $M_0 = \min_{i,j \neq 0} \{p_{1,i,j}^{(L_1-2)}\} > 1$ 时,则此 TCM 信号序列的自由空间距离:

$$d = \min\{d(1), d(2), \dots, d(L_1), \dots, d(K_1(L_1 - 2) + L_1)\},$$

其中 K_1 为一个正整数,使得 $\min\{p_{k,0}/p_{j,0} | p_{k,0} \neq +\infty, p_{j,0} \neq +\infty\} \leq M_0^{-K_1}$ 成立。

证明 因为 $M_0 > 1$, 所以一定存在一个正整数 K_1 , 使得

$$\min\left\{\frac{p_{k,0}}{p_{j,0}} \mid p_{k,0} \neq +\infty, p_{j,0} \neq +\infty\right\} \leq M_0^{-K_1} \quad (7)$$

成立。于是,有

$$\begin{aligned} & \min_{i,j} \{p_{0,i} \cdot p_{1,i,j}^{(L-2)} \cdot p_{j,0}\} \\ & = \min_{i,j,k} \{p_{0,i} \cdot p_{1,i,k}^{(L_1-2)} \cdot p_{k,0}\} \cdot \{p_{k,0}^{-1} \cdot p_{1,k,j}^{(L-L_1)} \cdot p_{j,0}\} | p_{k,0} \neq +\infty. \end{aligned} \quad (8)$$

事实上

$$p_{1,k,j}^{(L-L_1)} = \min_{j_1} \{p_{1,k,j_1}^{[(L-L_1)(L_1-2)]} \cdot p_{1,j_1,j}^{(L-[(L-L_1)/(L_1-2)])}\} \geq \min_{j_1} \{p_{1,k,j_1}^{[(L-L_1)(L_1-2)]}\} \geq M_0^{[(L-L_1)(L_1-2)]}, \quad (9)$$

此处 $[]$ 表示取整数。因此

$$\{p_{k,0}^{-1} \cdot p_{1,k,j}^{(L-L_1)} \cdot p_{j,0} | p_{k,0} \neq 0, p_{j,0} \neq 0\} \geq M_0^{[(L-L_1)(L_1-2)]-K_1}, \quad (10)$$

当 $[(L-L_1)/(L_1-2)] - K_1 \geq 0$ 时, (10) 式右端大于等于 1, 从而有

$$d(L) \leq \log_D \{\min_{i,k} \{p_{0,i} \cdot p_{1,i,k}^{(L_1-2)} \cdot p_{k,0}\}\} = d(L_1). \quad (11)$$

因此自由空间距离

$$d = \min_{L \geq 1} \{d(L)\} = \min\{d(1), d(2), \dots, d(L_1), \dots, d(K_1(L_1-2) + L_1)\} \quad (12)$$

证毕

4 实例分析

根据上一节的理论分析, 对于一具体的 TCM 信号, 如果它为一广义准正则的格形码, 首先定义它的单步转移最小距离矩阵, 然后利用上述理论进行计算。特别从当前一状态到下一时刻某一状态之间无连通分支时, 理论上可定义它们之间的距离为无穷, 但是在具体计算时, 只能用一适当大的数 M 代替, 而这一替换不会影响计算结果。

下面以编码速率为 $2/3$ 的 4 状态 8PSK 的 TCM 信号为例, 它的信号星座图和格形图分别为图 1, 图 2。

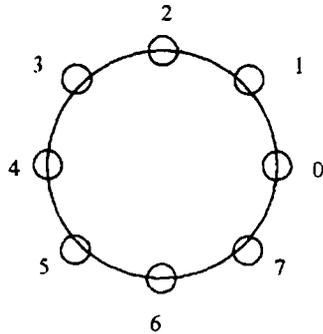


图 1 8PSK 的星座图

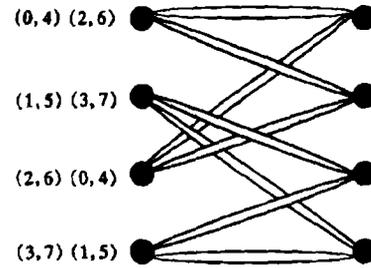


图 2 4 状态 8PSK 的 TCM 格形图

在高斯白噪声信道的情况下, 解调采用极大似然方法, 信号间的距离为平方欧几里德距离。此时相应的单步转移最小距离矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1.0 & 7.389056 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 1.796403 & 1.796403 \\ 7.389056 & 1.0 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 1.796403 & 1.796403 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中 D 取自然数 e , $M=100$ 。相应的矩阵 P_1 为

$$P_1 = \begin{pmatrix} 100 & 1.796403 & 1.796403 \\ 1.0 & 100 & 100 \\ 100 & 1.796403 & 1.796403 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

采用本文定义的矩阵乘法, 得

$$P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.796403 & 3.227065 & 3.227065 \\ 100 & 1.796403 & 1.796403 \\ 1.796403 & 3.227065 & 3.227065 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$P_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.227065 & 3.227065 & 3.227065 \\ 1.796403 & 3.227065 & 3.227065 \\ 3.227065 & 3.227065 & 3.227065 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

从 (16) 式知, $p_1^{(3)}$ 中不含有特定参数 M , 因此它为一非 (伪) 超越矩阵, 其最小元 M_0 为 1.796403, 并且

$$\min_{j \neq 0, k \neq 0} \left\{ \frac{P_{j,0}}{P_{k,0}} \mid p_{j,0} \neq M, p_{k,0} \neq M \right\} = 1. \tag{17}$$

因此, 参数 $L_1=5, K_1=1$ 。利用定理的结果, 所需计算 $d(L)$ 的数目为 $K_1(L_1 - 2) + L_1 = 8$ 。于是有

$$d = \min\{d(1), d(2), \dots, d(8)\}. \tag{18}$$

利用 (2)-(4) 式和 (18) 式得

$$d = 4. \tag{19}$$

在高斯白噪声信道的情况下, 利用本文的矩阵算法对编码速率为 2/3 的 8 状态, 16 状态的 8PSKTCM 信号的自由空间距离进行了计算, 得到了与文献 [3] 相同的结果。

在信道为慢衰落 Rice 信道时, 以 8 状态 8PSK, 编码速率为 2/3 的 TCM 信号为例, 解调算法采用相干解调, 并且信道状态信息已知, 信道衰落对接收信号的相位影响可完全补偿, 信号传输中采用交织和解交织方法, 此时, 信号间的距离为

$$m(y, y') = \frac{|y - y'|^2 K}{1 + K + \frac{E_s}{4N_0} |y - y'|^2} + \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^{-1} \ln \left\{ \frac{1 + K + \frac{E_s}{4N_0} |y - y'|^2}{1 + K} \right\}, \tag{20}$$

其中 E_s/N_0 为平均信噪比, K 为直射分量与散射分量的功率比。利用上述矩阵算法, 取参数 $M=100$, 具体结果如图 3 所示

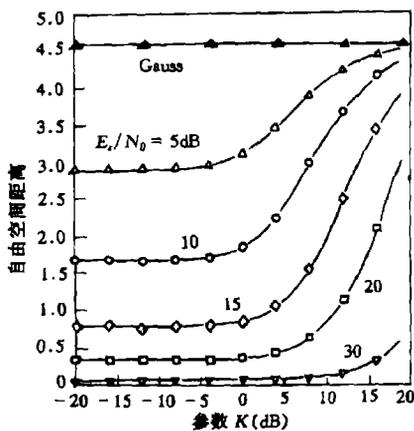


图 3 8 状态 8PSK, 编码速率为 2/3 的 TCM 的自由空间距离

从图 3 知, 它的自由空间距离为参数 K 和平均信噪比 E_s/N_0 的函数。当 K 小于 -5dB 时, 自由空间距离主要依赖于平均信噪比, 而参数 K 对它的影响极小, 信噪比越大, 相应的自由空间距离越小, 这一结果近似反映出 Rayleigh 信道的情况, 即参数 $K=0$ 的情况。当 K 充分大时, 自由空间距离将趋向于高斯信道情况下的值, 但收敛的速度随着信噪比的增加而减慢。特别当信噪比较大时, 参数 K 不变时, 自由空间距离变得很小, 它间接说明了在信噪比高于某一门限后, 信噪比再增加, 而 TCM 系统的误比特性能几乎不再有任何改善的原因, 即所谓的出现误比特平底的原因。

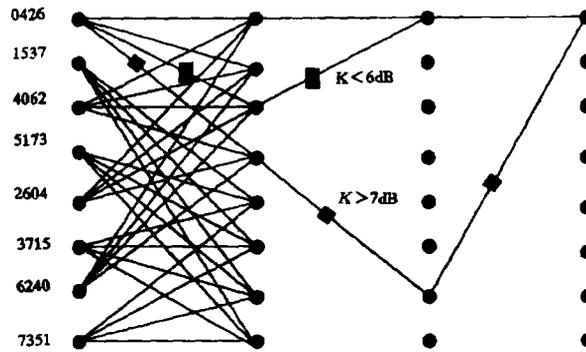


图4 8 状态 8PSK 编码速率为 2/3 的 TCM 的最短路径, 信道为瑞利信道 $E_s/N_0=10\text{dB}$

图4给出了 $E_s/N_0=10\text{dB}$ 的结果, 当 K 小于 6dB 时, 最短路径为 2-4, 路径长度为 2; 当 K 大于 7dB 时, 最短路径为 6-7-6, 路径长度为 3。事实上, 8 状态 8PSK 编码速率为 2/3 的 TCM 的最短有效路径长度为 2, 即首错事件的最短长度为 2。此结果进一步证实了 Divsalar 和 Simon^[5] 的结论: 在深衰落信道上设计 TCM 码型结构时, 最短有效路径的长度是一重要的参数, 应作为衡量 TCM 码有效性的标准之一。

5 结 论

本文给出一种新的求解 TCM 信号自由空间距离的矩阵算法。此算法和已有的算法相比, 对信号空间距离的变化有更强的适应性, 当信号空间距离变化时, 只需修正单步转移的最小距离矩阵, 而无需改变算法。同时, 本文在理论上解决了计算自由空间距离所需状态转移次数问题。

参 考 文 献

- [1] Rouanne M, Costello D J. An algorithm for computing the distance spectrum of trellis codes. IEEE J. of SAC, 1989, SAC-7(6): 929-940.
- [2] Biglieri E, Divsalar D, et al. Introduction to trellis-coded modulation with applications. New York: Macmillan Publishing Company, 1991: 125-145.
- [3] 樊平毅, 曹志刚. 广义正则格形码距离谱的计算. 中国通信学会第四届年会, 北京: 1995, 741-745.
- [4] Ungerboeck G. Channel coding with multilevel/phase signals. IEEE Trans. on IT, 1988, IT-34(5): 1123-1151.
- [5] Divsalar D, Simon M K. The design of trellis codes for fading channels. IEEE Trans. on C, 1988, C-36(9): 1004-1012.

A MATRIX ALGORITHM FOR COMPUTING THE FREE SPACE DISTANCE OF TCM SIGNAL SEQUENCE

Fan Pingyi Cao Zhigang

(The State Key Lab. on Microwave and Digital Communications

Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract The problem of computing the free distance of TCM signal sequence has been discussed, a new algorithm—the matrix algorithm is proposed, and the estimation problem of state transition number required for computing the free distance of TCM signal sequence has been theoretically solved. The matrix algorithm is derived from the Viterbi algorithm, and is an implementation of Viterbi algorithm in the form of matrix. Compared with other algorithms, the matrix algorithm gains two advantages: (1) The explicit solution, and its relatively less complexity. (2) more flexible ability to the signal space distance variation. As some examples, the results of some TCM signal sequence on additive Gaussian white noise(AWGN) channel and fading channels have been presented.

Key words Trellis coded modulation, Matrix algorithm, Fading channel

樊平毅: 男, 1965年生, 博士, 副教授, 主要从事卫星通信, 移动通信和信号处理方面的研究.

曹志刚: 男, 1939年生, 教授, 博士生导师, 主要从事卫星通信, 移动通信和语音信号处理方面的研究.