

Nakagami- m 分布 m 参数广义矩估计器的近似闭式解

黄庆松 吴伟陵

(北京邮电大学信息工程学院 北京 100876)

摘要: Nakagami- m 分布是描述无线多径小尺度衰落的有力工具, 有很多文献研究其 m 参数的估计问题。本文研究一类称为广义矩估计器的 Nakagami- m 参数估计器, 在推导一类超越函数的近似表示式的基础上, 给出广义矩估计器超越方程的近似闭式解。理论分析和数值仿真结果表明, 近似闭式解应用于低阶矩估计器, 不仅计算简单, 其性能也基本没有变化。本文给出的一类超越函数的近似表示式具有十分广泛的用途。

关键词: Nakagami- m 分布, 参数估计, 广义矩估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)12-1892-05

Approximate Close Form Expression for Generalized Moment-Based Nakagami- m Estimation

Huang Qing-song Wu Wei-ling

(School of Information Engineering, Beijing University of Posts and Telecomm., Beijing 100876, China)

Abstract A number of publications address the issue of the m -parameter estimation in Nakagami- m fading. The purpose of this contribution is to tackle approximate close form expression for a class of generalized moment-based estimator since it is always a transcendental equation. The details of derivation process are given. Numerical results are presented to demonstrate that the approximate estimator is not only computationally efficient but also accurate enough when compared with other estimators.

Key words Nakagami- m distribution, Parameter estimation, Generalized moment-based estimation.

1 引言

Nakagami- m 分布能够很好地描述多径小尺度衰落信道的包络分布, 其 m 参数的变化, 涵盖了莱斯分布、瑞利分布、高斯分布以及无衰落的情况, 是研究无线多径信道的一个有力工具。在实际的无线应用环境中, m 参数必须通过估计获得。基于独立同分布的 Nakagami- m 随机变量来估计 m 参数问题, 已经获得广泛深入的研究^[1-7], 提出了很多性能很好的 m 参数估计器。历史上, m 参数的估计方法可以分为两类: 一类是基于矩估计的, 另一类是基于极大似然方法的。根据文献[1]的研究, 基于极大似然的最早的工作在 Greenwood 和 Thom 的文章中给出。Cheng 和 Beaulieu 也在文献[2]中独立地给出了基于极大似然方法的估计器。文献[3]给出了基于矩估计的估计器, 而最有趣的基于矩估计的估计器由 Cheng 和 Beaulieu 在文献[5]中给出。文献[5]中作者提出了一种基于分数阶矩估计的估计器, 具有很好的性能, 只是其计算量比较大。文献[1]和文献[3]对多个 m 参数估计器的误差方差性能作

了分析比较。文献[6,7]研究了在加性高斯噪声干扰下的 m 参数估计, 给出了两个基于矩估计的估计器并且对其性能作了比较研究。

本文研究 m 参数的广义矩估计器, 首次推导出广义矩估计器中出现的一类特殊函数的近似表示式, 并在此基础上给出广义矩估计器的近似闭式解。把近似表示式应用于基于一阶和二阶矩估计的广义矩估计器, 得到了具有近似闭式解的在性能和计算复杂度上都很好的 m 参数估计器。我们推导的一类特殊函数的近似表示式, 具有很广泛的用途。

2 m 参数广义矩估计器及其近似闭式解

2.1 广义矩估计器

在 Nakagami- m 衰落信道中, 信号包络的概率密度函数为

$$P(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad m \geq \frac{1}{2}, \quad r \geq 0 \quad (1)$$

式(1)中, 衰落参数 m 和平均能量参数 Ω 定义为

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{E^2(r^2)}{E\{[r^2 - E(r^2)]^2\}} \\ \Omega &= E(r^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)中, $\Gamma(m)$ 为Gamma函数。Nakagami- m 分布的 k 阶矩为

$$\mu_k = E(r^k) = \frac{\Gamma(m+k/2)}{\Gamma(m)m^{k/2}} \Omega^{k/2} \quad (3)$$

对于衰落参数为 m 平均能量为 Ω 的独立同分布的 Nakagami- m 随机观测序列 $r_i, (i=1, \dots, N)$, 由此观测序列来估计 Nakagami- m 分布的参数, 其 k 阶矩的估计为

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^k \quad (4)$$

由式(3)和式(4), 可以得出 m 参数基于矩估计的一般形式为^[7]

$$\left. \frac{\hat{\mu}_l^k}{\hat{\mu}_k^l} = \frac{\Gamma^k(m+1/2)\Gamma^{l-k}(m)}{\Gamma^l(m+k/2)} \right|_{m=\hat{m}} \quad (5)$$

式(5)中, k, l 为正的实数。在 k, l 确定后, 式(5)是 m 的单调函数, 因而被称为 m 参数的广义矩估计器。当取 k, l 都是不相等的偶数的时候, 式(5)有闭式解。当 k, l 不同时为偶数, 成为一个超越方程, 没有闭式解。

对于一个在无穷区间上分布的随机变量, 用有限 N 个观测值估计其 k 阶矩, 特别是高阶矩, 会存在很大的偏差^[8]。使用低阶矩来估计 m 参数, 会比使用高阶矩有更好的鲁棒性。文献[1,3]对几种估计器性能比较的结果, 特别是文献[5]的分数阶矩估计器带来的性能改善, 比较明确地验证了这种观点。因此, 应该尽量使用低阶矩来估计 m 参数。由于分数阶矩估计需要较多的计算, 考虑计算复杂度和估计器的性能这两个因素, 使用一阶和二阶矩估计的估计器应当是比较合适的选择。取 $k=2, l=1$, 式(5)导出基于一阶和二阶矩估计的估计器 \hat{m}_{12} :

$$\frac{\hat{\mu}_1^2}{\hat{\mu}_2} = \frac{\Gamma^2(m+1/2)}{m\Gamma^2(m)} \Big|_{m=\hat{m}_{12}} \quad (6)$$

可以预计, \hat{m}_{12} 会比式(25)和式(26)有更好的性能, 但式(6)的超越方程通常只能使用查表的方式求解。式(5)中, 只要 k, l 不同时为偶数, 就会出现式(7)的因子或者其倒数形式, 导致一个类似(6)式的超越方程:

$$f(m) = \frac{\Gamma^2(m+1/2)}{\Gamma^2(m)}, \quad m \geq \frac{1}{2} \quad (7)$$

下面推导函数 $f(m)$ 的近似表示形式, 使得式(5)和式(6)

有一个足够精确的近似闭式解。

2.2 函数的近似表示

对 $m > 0$, $\Gamma(m)$ 为大于 0 的实数且连续, 因而式(7) $f(m) \geq 0$ 。当 $m > 0$, $\Gamma(m)$ 可以表示为^[9]

$$\Gamma(m) = \sqrt{2\pi} m^{m-1/2} \exp(-m) [1+r(m)] \quad (8)$$

其中 $|r(m)| \leq \exp(1/12m) - 1$ 。式(7)可以表示为

$$f(m) = \left(\frac{(m+1/2)^m \exp(-m-1/2)(1+r(m+1/2))}{m^{m-1/2} \exp(-m)(1+r(m))} \right) \quad (9)$$

对于我们需要的 $m \geq 1/2$, $|r(m)| \leq 0.1814$, $|r(m+1/2)| \leq 0.09$; 则当 $m \geq 1/2$, 有 $0.78 \leq \frac{1+r(m+1/2)}{1+r(m)} \leq 1.33$, 并且有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1+r(m+1/2)}{1+r(m)} \right) = \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{1+r(m+1/2)}{1+r(m)} \right) = 1 \quad (10)$$

因此, 式(9)取对数后可以近似为(丢弃最后一项):

$$\ln(f(m)) \approx \ln(m) + 2m \ln \left(1 + \frac{1}{2m} \right) - 1 \quad (11)$$

对于实数 m , 满足收敛域 $|4m+1| > 1$ 时, 有

$$\ln \left(1 + \frac{1}{2m} \right) = 2 \left(\frac{1}{4m+1} + \frac{1}{3(4m+1)^3} + \frac{1}{5(4m+1)^5} + \dots \right) \quad (12)$$

分别对式(11)取 $\ln[1+1/(2m)]$ 展开式(12)中的第一项, 得到

$$\ln(f(m)) \approx \ln(m) - \frac{1}{4m+1} \quad (13)$$

由式(13)可得到

$$f(m) \approx m e^{-1/(4m+1)} \quad (14)$$

利用级数式 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ (n 为正整数,

$|x| < \infty$), 展开式(14), 得到

$$f(m) \approx m \left(1 - \frac{1}{4m+1} + \frac{1}{2(4m+1)^2} + \dots \right) \quad (15)$$

注意到 $4m+1 > 1$, 对式(15)取前两项和前三项, 可以得到两个近似式:

$$f_1(m) = \frac{4m^2}{4m+1} \quad (16)$$

$$f_2(m) = \frac{32m^3 + 8m^2 + m}{32m^2 + 16m + 2} \quad (17)$$

至此, 我们得到式(16)、(17)作为式(7)的两个不同阶数的近似表示。根据具体应用的需要, 对式(11)采用不同展开

方式, 能得到多个不同的近似表示。

2.3 近似表示式的系数搜索

由于经过了多次近似过程,式(16)、(17)并不是同阶表示式中最好的。在近似式分子分母的最高阶数不变的前提下,可以在式(16),(17)的分子和分母上增加 m 的低阶项来调整近似式,使近似式与原始式(7)之间的误差更小。由式(16)表示的近似式的通式为

$$y_1 = \frac{m^2}{m + k_0} \tag{18}$$

$$y_2 = \frac{4m^2 + k_1m + k_2}{4m + k_3} \tag{19}$$

式(18),(19)中, $k_0k_1k_2k_3$ 是需要调整的常数系数。定义近似表示式的误差为

$$\Delta f(m) = f(m) - y_i(m), \quad i = 1, 2 \tag{20}$$

对 y_2 系数的搜索过程于图 1 所示, 一个比较满意的结果为

$$y_2 = \frac{4m^2 + 0.001m - 1/15}{4m + 1.002} \tag{21}$$

搜索 y_1 的系数, 一个比较满意的结果为

$$y_1 = \frac{m^2}{m + 0.2505} \tag{22}$$

式(22)的误差比较大, 但是, 其表示形式十分简洁, 在应用中能带来很多方便。式(22)的误差在 10^{-3} 量级以内。对式(17)进行同样的系数调整过程, 能得到更好的近似表示式, 误差能达到 10^{-8} 左右。

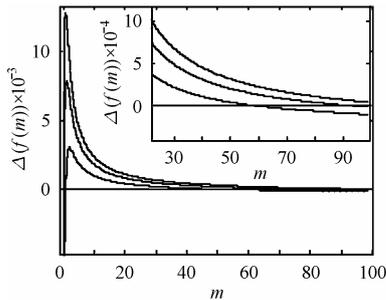


图1 对 y_2 的搜索过程中误差变化示意图

2.4 \hat{m}_{12} 估计器的近似闭式解

当出现式(7)的因子时, 不同的近似表示式都可以使式(5)获得相应精度的近似闭式解。考虑到低阶矩估计比高阶矩估计有更好的性能以及较低的计算复杂度, 我们仅研究近似闭式解在低阶矩估计下的性能。定义 $D = \hat{\mu}_1^2 / \hat{\mu}_2$, 分别使用式(21)和式(22)表示的近似, 带入式(6)的 \hat{m}_{12} 估计器, 得到其两个近似闭式解为

$$\hat{m}_{12-2} = \frac{(k_1 - k_3D) - \sqrt{(k_1 - Dk_3)^2 + 16(D-1)k_2}}{8(D-1)} \tag{23}$$

$$k_1 = 0.001, \quad k_2 = -1/15, \quad k_3 = 1.002$$

$$\hat{m}_{12-1} = \frac{0.2505D}{1-D} \tag{24}$$

从二次方程的两个解中选择式(23), 是因为 $0 \leq D \leq 1$ 而且 m 参数理论上大于零。

3 数值仿真

3.1 仿真中用到的 Nakagami- m 参数估计器

历史上, 由于没有闭式表示, \hat{m}_{12} 估计器没有受到应有的重视。我们使用 \hat{m}_{12} 的近似闭式形式与其他估计器进行比较, 以衡量其性能优劣和计算复杂度。文献[1~7]中提出的重要估计器共有 6 个。基于二、四阶矩的 m 参数的估计 \hat{m}_{INV} 为^[3]

$$\hat{m}_{\text{INV}} = \frac{\hat{\mu}_2^2}{\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_2^2} \tag{25}$$

基于一、二和三阶矩估计的 m 参数估计器^[5]:

$$\hat{m}_{123} = \frac{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2}{2(\hat{\mu}_3 - \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2)} \tag{26}$$

基于分数阶矩估计的 m 参数估计器^[5]:

$$\hat{m}_{1/p} = \frac{\mu_{1/p} \mu_2}{2p(\mu_{2+1/p} - \mu_{1/p} \mu_2)} \tag{27}$$

P 大于零。 $p=1$ 时就是 \hat{m}_{M1M2M3} ; $p=100$ 的性能基本达到极大似然估计的性能^[5]。

对于独立同分布的抽样序列, 对数极大似然方程为^[2]

$$-\Psi(m) + \ln(m) \approx y \tag{28}$$

式(27)的解就是极大似然估计 \hat{m}_{ML} 。式(28)中, $\Psi(m) = \Gamma'(m) / \Gamma(m)$, 为digamma函数; $y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(r_i^2) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2$ 。

1988年, Bowman^[4]使用迭代的方法解似然方程式(28):

$$\hat{m}_{B,i} = \left[\hat{m}_{B,i-1} (\ln(\hat{m}_{B,i-1}) - \varphi(\hat{m}_{B,i-1})) \right] / y \tag{29}$$

式(29)中, i 为迭代次数, 初始 $\hat{m}_{B,0}$ 值由二阶近似估计器式(30)决定。极大似然估计器的二阶近似为

$$\hat{m}_{L-2} \approx \frac{1 + \sqrt{1 + (4/3)y}}{4y} \tag{30}$$

Greenwood和Duraud^[1]采用多项式拟合的方法, 给出了一个比二阶近似更接近极大似然估计的算法, 但是计算量比二阶近似要大:

$$\hat{m}_G = \begin{cases} (0.5000876 + 0.1648852y - 0.0544274y^2) / y, & 0 < y \leq 0.5772 \\ \frac{8.898919 + 9.059950y + 0.9775373y^2}{y(17.79728 + 11.968477y + y^2)}, & 0.5772 < y \leq 17 \end{cases} \quad (31)$$

m 参数估计器的归一化误差方差下界(Cramer-Rao界: CRB)为^[2]

$$\frac{\text{Var}(\hat{m})}{m^2} \geq \frac{1}{Nm^2[\psi'(m) - 1/m]} \quad (32)$$

我们用蒙特卡罗仿真来比较各种估计器偏差均值 Δm 和归一化误差方差:

$$\Delta m = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\hat{m} - m) \quad (33)$$

$$\frac{\text{Var}(\hat{m})}{m^2} = \frac{1}{Mm^2} \sum_{j=1}^M (\hat{m} - \bar{\hat{m}})^2 \quad (34)$$

其中 M 表示蒙特卡罗试验次数。Nakagami- m 独立同分布随机数的平均能量 $\Omega = 1$, m 参数为 $\{m_i = 0.5 \cdot i, i = 1, \dots, 40\}$, 抽样数目分别为 $N=100$ 和 1000 。

3.2 仿真结果

图 2 给出了不同的 m 参数估计器的归一化误差方差的性能对比。由图 2 可以看出, 我们给出的 \hat{m}_{12} 估计器的两个近似闭式解的误差方差远远小于使用了高阶矩的 \hat{m}_{123} 和 \hat{m}_{INV} 的误差方差, 体现并且保持了使用低阶矩估计的优越性。 \hat{m}_{12-2} 比 \hat{m}_{12-1} 在误差方差性能上略好, 接近Bowman^[4]使用迭代方法所达到的最好结果, 在 $N=1000$ 时, \hat{m}_{12-2} 和 \hat{m}_{12-1} 的归一化误差方差都接近CRB。图3给出不同估计器的由式(33)计算的均值偏差。所有的估计器都存在均值偏差, 随着 N 变大, 均值偏差减小, 实际上它们都是渐进无偏的。 \hat{m}_{12-2} 和 \hat{m}_{12-1} 的均值偏差相对于其他估计器有一个很小的平移, 在 $m > 5$ 且 $N=1000$ 时, \hat{m}_{12-2} 的平移大约为 0.05, \hat{m}_{12-1} 的平移大约为 0.1。 $N=1000$ 时, \hat{m}_{12-2} 的均值偏差大约在 $m=1$ 和 $m=10$ 处通过 $\Delta m = 0$ 的点, 这是比较有利的。

衡量估计器性能的另一个标准是算法的计算复杂度。由于仅仅涉及到一二阶矩估计, 在本文所列的估计器中, \hat{m}_{12-2} 和 \hat{m}_{12-1} 具有最低的计算复杂度。相对于查表的方法解决 \hat{m}_{12} 的求解问题, 近似表示省去了很多麻烦。因为要使 m 值达到 0.05 的查表间隔, 表格是比较大的。

比较 \hat{m}_{12-2} 和 \hat{m}_{12-1} 的估计性能, 可以看出, \hat{m}_{12-2} 的误差方差性能比 \hat{m}_{12-1} 的性能略好, 它们的主要差异在均值偏差上。由于均值偏差都比较小, 考虑到式(23)比式(24)计算复杂

得多, 实际应用中, 使用 \hat{m}_{12-1} 就能很好地估计 m 参数。

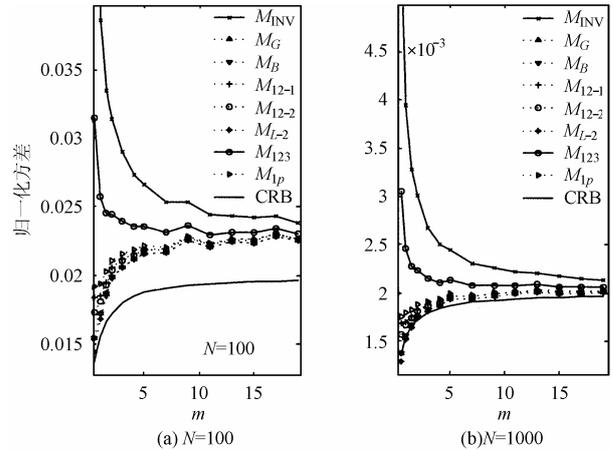


图 2 不同估计器的归一化误差方差的对比

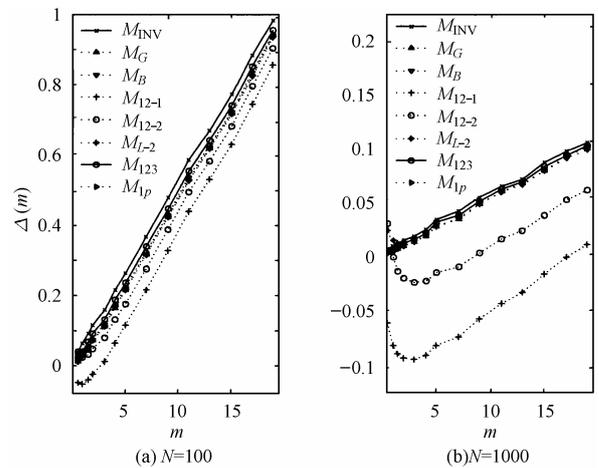


图 3 不同估计器的均值偏差对比

4 结束语

本文首次推导出式(7)函数简洁的近似表示式, 并且在此基础上给出了基于一二阶矩估计的Nakagami- m 参数估计器的近似闭式解。仿真结果表明, 近似函数的误差比较小, 基本保持了一二阶矩估计器相对于其他估计器的优良性能, 从而使得基于一二阶矩估计的 m 参数估计器成为在性能和计算复杂度综合衡量下最好的Nakagami- m 参数估计器。由于Nakagami- m 分布是描述多径小尺度衰落信道信号包络分布的重要工具, 式(7)函数的近似表示式及其可能的变化形式将为这一领域的信号处理带来很大的方便。

参考文献

[1] Zhang Q T. A note on the estimation of Nakagami- m fading parameter. *IEEE, Commun. Lett.*, 2002, 6(6): 237 - 238.

- [2] Cheng J, Beaulieu N. Maximum-likelihood based estimation of the Nakagami m parameter. *IEEE Commun. Lett.*, 2001, 5(3): 101 – 103.
- [3] Abdi A, Kaveh M. Performance comparison of three different estimators for the Nakagami m parameter using Monte Carlo simulation. *IEEE Commun. Lett.*, 2000, 4(4): 119 – 121.
- [4] Bowman K O, Shenton L R. Properties of Estimators for the Gamma Distribution. New York: Marcel Dekker, 1988: 46.
- [5] Cheng J, Beaulieu N. Generalized moment estimators for the Nakagami fading parameters. *IEEE Commun. Lett.*, 2002, 6 (4): 144 – 146.
- [6] Cheng Julian, Beaulieu N C. Moment-based estimation of the Nakagami- m fading parameter. PACRIM. 2001 IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and signal Processing, Kitakyushu, Japan: 26-28 Aug. 2001. vol.2: 361 – 364.
- [7] Tepedelenioglu C. Analytical performance analysis of moment-based estimators of the Nakagami parameter. Proceedings. Vehicular Technology Conference, 2002. VTC 2002-Fall. 2002 IEEE 56th, New Delhi, 24-28 Sept. 2002, vol.3: 1471 – 1474.
- [8] 张贤达. 现代信号处理. 北京: 清华大学出版社, 1994, 第9章.
- [9] 王元等. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1974.
- 黄庆松: 男, 1972 年生, 博士生, 研究方向为移动通信中的信号处理技术.
- 吴伟凌: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会信息论分会主任委员, 从事信息论、信息处理和移动通信方面的教学和研究工作.