

物理逆问题中的一个定理*

冯孔豫

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

冯思民

(中国科学院物理研究所 北京 100080)

摘要 本文将物象重建归结为描述这一物理过程的积分方程的定义域的反演问题。本文提出了一个定理,当被积函数满足某些先决条件时,则该定义域的轮廓可以借助于这个定理反演获得。计算机模拟结果表明了本文的论述和定理的正确性。

关键词 电磁学,物象重建,反演

引言

在一些物理过程中,例如电磁波散射、声波激发等,经常可以用下式表述

$$\rho(\mathbf{p}) = \int_{V_r} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (1)$$

试以电磁学为例,对(1)式的含义加以说明。在电磁学中 $\rho(\mathbf{p})$ 对应于某一观察方向 \mathbf{p} 的电磁场, $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 对应于这一观察方向的有效源, $\exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ 对应于源点在这一观察方向的有效相位, V_r 对应于辐射源所占据的空间。由于 f 既是 \mathbf{p} 又是 \mathbf{r} 的函数,所以(1)式不是一个傅氏积分。为行文简洁,我们把(1)式称为准傅氏积分(Quasi-Fourier Integral)。以下论证表明,在一定条件下, V_r 的轮廓可以借助于我们的定理反演出来。

2 定理及其证明

先定义一个广义圆函数(Generalized Circular Function),这个函数为:(1)圆函数,如 $\sin x, \exp(ix), \dots$, 等等。(2)在其参数和/或其宗量在某一范围内取值时,该函数成为或逼近于与圆函数有关的函数。例如贝塞尔(Bessel)函数 $J_\nu(x)$, 当其参数 ν 为 $n + 1/2$ (n 为整数),即成为与圆函数有关的函数; $J_0(x)$ 当 x 为大值,则逼近于与圆函数有关的函数。

定理 1 在

$$\rho(\mathbf{p}) = \int_{V_r} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in V_r (\text{有限}), \quad \mathbf{p} \in V_p (\rightarrow \pm \infty) \quad (2)$$

中,如果 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 是定义在 $V (=V_r + V_p)$ 上的既依赖于 \mathbf{p} 又依赖于 \mathbf{r} 的连续实函数,

1993-10-29 收到, 1994-05-10 定稿

* 国家自然科学基金资助课题

冯孔豫 男, 1930 年生, 研究员。现从事电磁场散射及其反演的研究。

冯思民 女, 1964 年生, 研究实习员。现从事量子阱理论的研究。

但不含有其宗量依赖于 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 的广义圆函数, 并令实矢量集 \mathbf{p}^3 和 \mathbf{r}^3 成为 6 维笛卡尔空间 (Cartesian Space) 中的对偶子空间, 则

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon(\mathbf{r}_0) &= \lim_{V_\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \left[\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} \rho(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{p} \right] d\mathbf{r} \\ &= \begin{cases} \text{某些值,} & \mathbf{r}_0 \text{ 在 } V_\epsilon \text{ 的轮廓上} \\ 0, & \mathbf{r}_0 \text{ 不在 } V_\epsilon \text{ 的轮廓上} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

这里 V_ϵ 是中心在 \mathbf{r}_0 处半径为 ϵ 的小球.

证明 由于 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 依赖于 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} , 就不能排除含有函数 $\exp(\pm i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ 这一情况. 如果这样, 它们将与 (2) 式中的 $\exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ 起作用, 改变 (2) 式的原有准傅氏积分形式, 使定理失去意义. 以下的证明将进一步表明, 当 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 按魏氏 (Weierstrass) 逼近定理展开为多项式时, 如果 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 含有其宗量依赖于 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 的广义圆函数, 例如 $\sin [f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r})], \dots$, 等等, 由其宗量 $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 展开的 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 的分量的多项式中就有可能含有 $p_i r_i$ 形式项. 这意味着 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 含有 $\exp(\pm i p_i r_i)$ 形式项, 它们同样会与 (2) 式中的 $\exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ 起作用, 将改变 (2) 式的准傅氏积分的原有形式.

现在设 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 满足定理中的全部条件, 将 (2) 式改写成

$$\rho(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \gamma_r(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (4)$$

这里 $\gamma_r(\mathbf{r})$ 为 V_r 的轮廓函数, 即 $\gamma_r(\mathbf{r}) = 1$, 当 $\mathbf{r} \in V_r$; $\gamma_r(\mathbf{r}) = 0$, 当 $\mathbf{r} \notin V_r$. $\gamma_r(\mathbf{r})$ 可表为

$$\gamma_r(\mathbf{r}) = \left\{ \sum_{u=1}^U h_{zu}(x + a_u) \right\} \left\{ \sum_{v=1}^V h_{yv}[y + f_v(x)] \right\} \left\{ \sum_{w=1}^W h_{zw}[z + f_w(x, y)] \right\}. \quad (5)$$

以上 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p_x x + p_y y + p_z z$, $d\mathbf{r} = dx dy dz$; $h(\dots)$ 为海维赛 (Heaviside) 单位阶跃函数; $a_u, f_v(x), f_w(x, y)$ 为变量 x, y, z 的各区间的积分限. 根据魏氏逼近定理, $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 可以在它的定义域 V 内用它的变量 p_x, p_y, p_z, x, y, z 的多项式一致逼近^[1,2]

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma+m=0}^n Q_m(x, y, z) p_x^\sigma p_y^m p_z^{\sigma+m}. \quad (6)$$

这里 $Q_m(x, y, z)$ 为 x, y, z 的 m 次齐次多项式, $\sigma = q + s + t$. 求和式中每一数组 (m, q, s, t) 对应一项, 数组应满足的条件为: $\sigma + m = n$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$; $0 \leq q \leq \sigma$, $0 \leq s \leq \sigma$, $0 \leq t \leq \sigma$. $\Sigma \Sigma$ 是从 $n = 0$ 到 $n = N$ 对所有这些项求和. 于是

$$\rho(\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma+m=0}^n p_x^\sigma p_y^m p_z^{\sigma+m} F[Q_m(x, y, z) \gamma_r(\mathbf{r})], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathbf{r}) &= \lim_{L \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \int_{-L}^{+L} \rho(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{p} \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma+m=0}^n F^{-1}[p_x^\sigma p_y^m p_z^{\sigma+m}] * [Q_m(x, y, z) \gamma_r(\mathbf{r})] \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma+m=0}^n (i)^{3\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(q)}(x - x') \delta^{(s)}(y - y') \\ &\quad \times \delta^{(t)}(z - z') [Q_m(x', y', z') \gamma_r(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma+m=0}^n (i)^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\sigma \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\sigma [Q_m(x, y, z) \gamma_r(\mathbf{r})] \\
&= \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma+m=0}^n (i)^\sigma \sum_{\alpha=0}^q \sum_{\nu=0}^i \sum_{\omega=0}^i C_q^\alpha C_i^\nu C_i^\omega \gamma_r^{(\nu)(\omega)}(\mathbf{r}) Q_m^{(q-\alpha)(i-\nu)(i-\omega)}(x, y, z). \quad (8)
\end{aligned}$$

这里 $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$, F 和 F^{-1} 为傅氏变换和逆傅氏变换, “*” 为卷积, δ 是狄拉克 (Dirac) 函数. $\gamma_r^{(u)}(\mathbf{r})$ 和 $Q_m^{(q-u)}(x, y, z)$ 是 $\gamma_r(\mathbf{r})$ 和 $Q_m(x, y, z)$ 对 x 的 u 次和 $(q-u)$ 次微商, …等等. 经过推演和重新组合, 其结果可写成以下简明形式

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^L h_x^{(i)} h_y^{(j)} h_z^{(k)} f_i(x, y, z) + \sum_{i'=1}^{L'} \delta_x^{(i')} \delta_y^{(j')} \delta_z^{(k')} f_{i'}(x, y, z). \quad (9)$$

这里 h_x 是 h_{x_n} 中的任一个, …等等; δ_x 是 h_x 对 x 的微商, …等等. 令 $\xi = i + j + k$, $\xi' = i' + j' + k'$. 在(9)式的第一个和式中, 每一数组对应一项, 数组应满足的条件为 $\xi = 0, 1, 2, \dots, N$; $0 \leq i \leq \xi$, $0 \leq j \leq \xi$, $0 \leq k \leq \xi$ 且 i, j, k 中至少有一个为零. L 是这些项的总数. 在其第二个和式中, 每一数组对应一项, 数组应满足的条件为 $\xi' = 0, 1, 2, \dots, (N-3)$; $0 \leq i' \leq \xi'$, $0 \leq j' \leq \xi'$, $0 \leq k' \leq \xi'$. L' 是这些项的总数. $f_i(x, y, z)$ 和 $f_{i'}(x, y, z)$ 是与这些项相应的函数. 当 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ 时, (6)式中 $q = s = t = 0$ 且 $\sum_{n=0}^N Q_n(x, y, z) = f(\mathbf{r})$. 这时(9)式中的第二和项不存在, 且第一和项成为 $\gamma(\mathbf{r})f(\mathbf{r})$. 于是(9)式回到了常规的傅氏逆变换的结果.

将 $\bar{\rho}(\mathbf{r})$ 在 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 邻域无限小体积 V_ϵ 上积分. 积分后, (9)式中只有第二和项被保存下来, 即

$$\begin{aligned}
\rho_\epsilon(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{V_\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \bar{\rho}(x, y, z) dx dy dz \\
&= \begin{cases} \sum_{i'=1}^{L'} (-1)^{\xi'} f_{i'}^{(i')(j')(k')}(x_0, y_0, z_0), & \mathbf{r}_0 \text{ 在轮廓上;} \\ 0, & \mathbf{r}_0 \text{ 不在轮廓上.} \end{cases} \quad (10)
\end{aligned}$$

这里 $f_{i'}^{(i')(j')(k')}$ 是 $f_{i'}$ 对 x, y, z 的第 i', j', k' 次微商. 所以本定理在广义函数意义上得到证明^[9]. 这个结果说明, 如果求逆是在全 \mathbf{p} 空间上进行的, 则 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 的定义域 V_r 的轮廓可以被准确地重建. 虽然不能排除在某些特殊情况下, 在 V_r 轮廓的局部甚至全部上从(10)式得到的 $\rho_\epsilon(x_0, y_0, z_0)$ 之值为零, 但这无损于(10)式数学上的正确性. 实用上(10)式的结果是得不到的, 因为我们不可能在全 \mathbf{p} 空间上进行反演. 以下给出当观察空间 V_p 有限时的结果. 令 $\gamma_p(\mathbf{p})$ 为观察空间 V_p 的轮廓函数, 即 $\gamma_p(\mathbf{p}) = 1$, 当 $\mathbf{p} \in V_p$; $\gamma_p(\mathbf{p}) = 0$, 当 $\mathbf{p} \notin V_p$. 于是

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_{i=1}^L h_x^{(i)} h_y^{(j)} h_z^{(k)} f_i(x', y', z') d\mathbf{r}' \\
&+ \left\{ \sum_{i'=1}^{L'} \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{i'} \left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)^{j'} \left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^{k'} [f_{i'}(x', y', z') \bar{\gamma}_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

$\begin{matrix} x' = a_\mu, \mu = 1, \dots, U, \\ y' = b_\nu(x'), \nu = 1, \dots, V, \\ z' = c_\omega(x', y'), \omega = 1, \dots, W. \end{matrix}$

这里 $\bar{\gamma}_p(\mathbf{r})$ 是 $\gamma_p(\mathbf{p})$ 的逆傅氏变换. 当我们在 \mathbf{r} 子空间逐点求取 $\bar{\rho}(\mathbf{r})$ 值时, (11)式

中的和项将给出 V_r 的轮廓, 而其卷积项将带来背景杂波; 且 V_r 越大得到的 V_r 轮廓越清楚, 杂波越少。

引理 1 定理 1 对于 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 为复函数仍然成立。

当 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 为复函数时, 它可以被分解为实部和虚部。它们将分别被其所含变量的多项式所一致逼近。以上结论均可以类推获得。

引理 2 准傅氏积分保持“相移-位移”特性, 即

$$e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_0} \int_{V_r} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{V_r'} f(\mathbf{p}, \mathbf{r} \pm \mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (12)$$

这里 V_r' 是 V_r 位移了 \mathbf{r}_0 。

3 反演模拟

以下用计算机模拟验证定理的两个方面: (1) 当 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 含有其宗量依赖于 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 的广义圆函数时, 轮廓重建的不唯一性, 即定理不适用的情况。(2) 当 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 满足定理所要求的条件时, 轮廓重建是唯一的, 即定理适用的情况。

重建对象是轴线沿 z 向的无限长直柱体的横截面(即二维重建问题)。在 p_x - p_y 平面上采集数据, 取 $p_x = k \cos \phi$, $p_y = k \sin \phi$, 这里 $k = \omega/c$, ϕ 为方位角且 k 和 ϕ 为参变量。反演用离散快速傅氏变换 (DFT) 进行。

例 1 下列函数定义在其横截面由方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $(x+R)^2 + y^2 = R^2$ 界定的无限长直柱体内。现从 p_x - p_y 平面上计算得到的 $\rho(\mathbf{p})$ 值, 反演直柱横截面的轮廓。

(1) $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sin(p_x x)$, 在 p_x - p_y 平面内 64×64 个点上取 $\rho(\mathbf{p})$ 值。反演结果见图 1(a)。

(2) $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \cos(p_y y)$, 在 p_x - p_y 平面内 64×64 个点上取 $\rho(\mathbf{p})$ 值。反演结果见图 1(b)。

(3) $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = p_x \left\{ \left[8 \left(p_y \frac{y}{3R} \right)^4 - 8 \left(p_y \frac{y}{3R} \right)^2 + 1 \right] + i \cos \left[2\pi \left(\frac{y}{R} \right) \sin \phi \right] \right\}$, 在 p_x - p_y 平面内 128×128 个点上取 $\rho(\mathbf{p})$ 值。反演结果见图 1(c)。以上(1)和(2)的 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 均不满足定理要求的条件, 反演结果不是唯一的。(3)的 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 满足定理要求的条件, 柱体横截面的轮廓被正确地重建。

例 2 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sinh[(px \cos \phi + py \sin \phi)/a] J_0[(2/b)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos \phi]$, 定义在由 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ 和中心在坐标系原点、边长为 c 的正方形界定的横截面的柱体内。这里 $a:b:c = 20:15:6$ 。在 p_x - p_y 平面内 128×128 个点上取 $\rho(\mathbf{p})$ 值。反演结

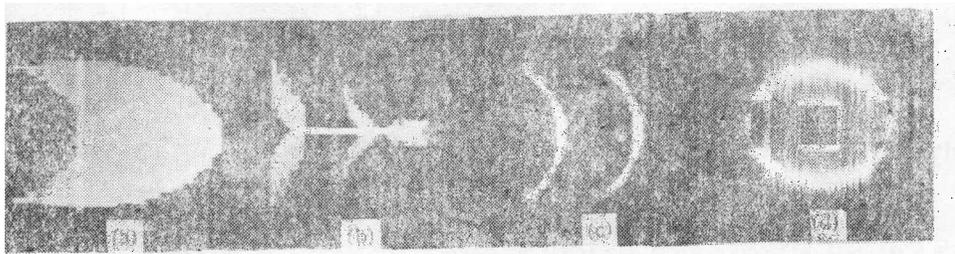


图 1 无限长直柱体的横截面轮廓的重建模拟结果。

果见图 1(d)。正如(10)和(11)式所预见的那样,当 V_p 足够大时,背景杂波不严重,柱体内部的轮廓也能清晰地分辨出来。

从图 1 可以看出,图 1(a),1(b)中 $f(\rho, r)$ 不满足定理要求,反演不唯一;图 1(c),1(d)中 $f(\rho, r)$ 满足定理要求,轮廓被正确地重建。

模拟表明,如果令 $f(\rho, r) = p_0 J_0(\rho y)$, 当 ρy 为大值时,反演结果与例 1(2) 的类似;而当 ρy 为小值时,其反演结果与例 1(3) 相同。

4 讨论和结论

(1) 模拟结果表明了本文提出的定理的正确性。图 1(c) 和 1(d) 均表明当观察范围(即 V_p) 有限时(实际问题中总是如此),轮廓虽能被正确地重建,但(11)式中的卷积项的影响将是明显的,它往往使画面出现杂乱的亮点或条纹。

(2) 在一些特殊情况下,对 V_p 轮廓的一部份,甚至全部,(10)式恒为零。这种特殊情况当轮廓由直线段组成时容易发生。模拟中曾出现过局部轮廓为零的情况,但全部轮廓为零尚未发现。

(3) 如果 $f(\rho, r)$ 随 ρ 和/或 r 变化剧烈,则 V_p 必须足够大,才能实现 V_p 轮廓的重建。

(4) 大量模拟表明,定理 1 中 $f(\rho, r)$ 应满足的条件是较苛刻的,如何能使定理 1 适合更普遍的情况,是今后需要进一步研究的。

本文提出的定理如何用于实际问题,将在另文中发表。

参 考 文 献

- [1] Stone M H. A Generalized Weierstrass Approximation Theorem, *Studies in Mathematics*, Vol.1. *Studies in modern analysis* by R. C. Buck, pp30--87. The Mathematical Association of America. York, Pa: The Maple Press, Inc., 1962.
- [2] Ren-Hong Wang. *Acta Mathematica Sinica*, 1980, 23(2): 163--176.
- [3] Zemanian A H. *Distribution Theory and Transform Analysis—An Introduction to Generalized Functions with Applications*. New York and London: McGraw-Hill Book Company, 1965.

A THEOREM FOR SOME INVERSE PROBLEMS IN PHYSICS

Feng Kongyu

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Feng Simin

(Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract The image reconstruction of a supporter is referred to an inverse problem of the defined domain of the integral which describes the physical process under investigation. A theorem is proposed. If the integrand satisfies some conditions, the contour of the domain can be reconstructed with this theorem. The results of computer simulation support the theorem and the analysis.

Key words Electromagnetism, Image reconstruction, Inverse