

多维信号的微局部奇异方向检测¹

陈小蓄 王 桥 吴乐南

(东南大学无线电工程系 南京 210096)

摘 要: 多维信号的奇异性方向检测在许多领域都有重要的应用。在微局部分析的意义下, 可以将图像的边缘和奇异性方向看作波前集。该文从工程角度对此给出一个比较直观的解释, 并且基于此提出了一个自动检测多重奇异性方向的算法, 可用于图像分析和多维信号检测等多个领域。

关键词: 奇异性, 微局部分析, 波前集, 多维信号处理

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)05-0696-06

Detection of Microlocal Singularity Directions of Multi-dimensional Signals

Chen Xiao-qiang Wang Qiao Wu Le-nan

(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract Detecting singularities of multi-dimensional signals is important and interesting in various fields. The edge of an image and the directions of singularity can be regarded as a wavefront set in the meaning of microlocal analysis, which is intuitively illustrated from the viewpoint of engineering in this paper. A wavefront detection algorithm is proposed, which is based on microlocal analysis and can be applied to image analysis, multi-dimensional signal detection and many other related fields. Experimental results indicate that this algorithm is simple and successful.

Key words Singularity, Microlocal analysis, Wavefront set, Multi-dimensional signal processing

1 引言

多维信号的奇异性检测在工程科学的许多领域都起着重要的作用。例如信号波达方向 (DOA) 的估计、图像分析、模式识别、雷达成像等都需要信号的局部方向奇异性信息。问题的复杂性在于: 在许多奇异点上, 奇异性传播方向并不唯一。为此, 需要诸多精细的信号处理技术^[1]。迄今为止, 在这个领域, 比较完善和深刻的理论当属微局部分析。但是工程界对此理论一般较为陌生。然而近年来, 一些学者已经开始使用这个工具, 例如在 SAR 成像^[2,3]、图像处理^[4]、以及信号检测^[5]等领域。

微局部分析是偏微分算子和相空间调和分析的一个基本课题。它是经典 Fourier 分析在高维空间非平凡的推广。它的深刻性由其集大成者 L. Hörmander 获得的崇高评价可以佐证^[6]。日本佐藤 (Saito) 超函数学派以解析函数边值的叠加观点系统地建立起一套微局部分析理论。最近他们和美国从事小波理论研究的一些学者联合提出了多小波微局部滤波的概念^[4], 并将其应用于图像处理。微局部分析的数学理论可以参考文献 [6]。本文的目的是提出直观的几何观点直接解释它的基本原理, 并运用到多维信号的奇异性检测等场合。这个工作在一定程度上可以看作是我们以往工作^[5]的延续。但是文献 [5] 的缺陷在于只给出局部的一个奇异性方向, 而实践中的课题, 绝大多数场合下都有多个奇异性方向, 例如两个或两个以上波的叠加情形。

¹ 2002-12-29 收到, 2003-04-11 改回
国家自然科学基金资助项目 (60002008)

微局部分析的思想借助“波前”的概念展开, 形象地说, 它指奇异点以及奇异点附近的传播方向。这实际上类似于对波的传播现象的刻画^[7](如图 1)。波前, 也称作等相位面, 沿着它的切平面方向, 波有最好的光滑性, 但在其法线方向上, 即垂直于波前的方向, 正则性最差。在微局部分析的意义下, 我们将图像的边缘和奇异性方向看作波前集, 因此可以像估计 DOA 那样自动搜索奇异性方向。注意, 这与一维数字信号处理中的奇异性分析在本质上是不同的。在一维情形下, 只需要知道奇异点的位置, 而在二维和更高维数的情形下, 必须既要知道奇异点的位置, 又要知道该点的奇异性传播方向。本文对 Fourier 变换做如下定义:

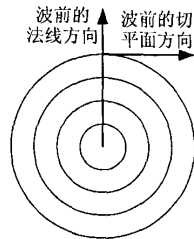


图 1 波的传播示意图

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (1)$$

2 理论分析

本文以二维信号为例说明微局部分析的相关理论。调和的基本理论指出: 信号在空间域的光滑性和它在频域的衰减性是互为对偶的, 即空间域中局部化的信号, 其 Fourier 模的衰减速度反映了信号的局部光滑性。在微局部分析的层次上, 这个对偶概念进一步加强为: 信号光滑性最差的方向可以由 Fourier 模衰减最慢的方向判定。为了直观地理解这个现象, 我们以单位脉冲函数为例进行分析:

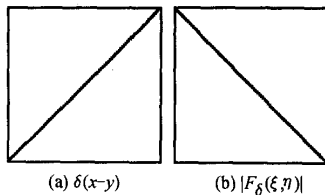


图 2

(黑色代表 1, 白色代表 0, 黑框表示图形的边界)

函数 $\delta(x - y)$ 的 Fourier 变换 $F_\delta(\xi, \eta)$ 为

$$F_\delta(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) e^{-j(x\xi + y\eta)} dx dy = 2\pi \delta(\xi + \eta) \quad (2)$$

图 2 是 $\delta(x - y)$ 和 $|F_\delta(\xi, \eta)|$ 的黑白图。容易看出, $\delta(x - y)$ 各奇异点均位于直线 $x - y = 0$ 上, 且奇异性方向均匀一致, $|F_\delta(\xi, \eta)|$ 在 $\xi + \eta = 0$ 的方向上衰减最慢。

2.1 角度对应关系

如果图 2(a) 中的直线绕图像的中心顺时针旋转 θ 角, 那么图 2(b) 中模的最慢衰减方向也会相应地顺时针旋转 θ 角。用矩阵形式表达: 令 $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)^T$, $\mathbf{X}_2 = (x_2, y_2)^T$, 旋转矩阵

$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad -1]$ 且 $\begin{cases} x_1 = x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ y_1 = x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{cases}$, 则 $X_1 = A \cdot X_2$. 再令 $W_1 = (\xi_1, \eta_1)^T$, $W_2 = (\xi_2, \eta_2)^T$, 且 $W_1 = A \cdot W_2$. 根据式 (2) 可得

$$\begin{aligned} F_\delta(W_1) &= \int \delta(B \cdot X_1) e^{-i W_1^T \cdot X_1} dX_1 \\ &= \int \delta(B \cdot A \cdot X_2) e^{-i W_1^T \cdot A \cdot X_2} d(A \cdot X_2) = F_\delta(A \cdot W_2) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 微局部分析原理的直观解释

这里为方便说明, 考虑奇异点恰好分布为整个直线的情况. 设函数 $g(x, y)$ 和它的 Fourier 变换被积函数 $G(x, y, \alpha, \beta)$ 分别具有如下形式:

$$g(x, y) = \begin{cases} C_1, & y - kx - b \geq 0 \\ C_2, & y - kx - b < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$G(x, y, \alpha, \beta) = g(x, y) \cos(\alpha x + \beta y) \quad (5)$$

其中 C_1 和 C_2 为常数, 且 $C_1 \neq C_2$; 频率 α 与 β 的比值保持为 $-k$ 时, $G(x, y, \alpha, \beta)$ 在间断直线附近的总面积无法抵消, 衰减最慢. 图 3(a), 3(b) 分别是 $g(x, y)$ 和 $G(x, y, \alpha, \beta)$ 的灰度图. 从图 3(b) 中可以看出, 与直线 $y - kx - b = 0$ 垂直的方向上信号的高频成分衰减最慢.

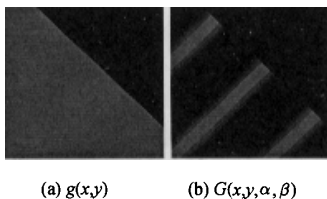


图 3

3 检测奇异性方向算法

$f(x, y)$ 为一幅灰度图像, 我们关心任意一点 (x_0, y_0) 处的奇异性方向. 算法分为如下 2 步:

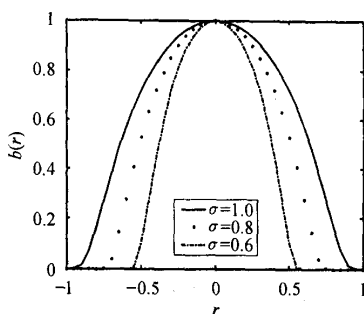
第 1 步 空间局域化 对整幅图像加窗, 即在点 (x_0, y_0) 乘上钟形函数 $B(x, y)$. 为了保证各向同性, $B(x, y)$ 由一维低通紧支集函数 $b(r)$ 旋转得到:

$$b(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-(r/\sigma)^2}}, & |r| < \sigma \\ 0, & |r| \geq \sigma \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\sigma > 0$, $r \in \mathbf{R}$. 当 σ 减小时, $b(r)$ 的支集变小 (如图 4). 用 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 代替 r , 得:

$$B(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-(x^2+y^2)/\sigma^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} < \sigma \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sigma \end{cases} \quad (7)$$

为了较好地在感兴趣的点 (x_0, y_0) 实现图像的局域化, 应适当选择 σ 的大小.

图 4 钟形函数 $b(r)$

第 2 步 频率锥形化及奇异性方向的检测

$$F_B(\xi, \eta, x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) B(x - x_0, y - y_0) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (8)$$

然后对频率进行锥形化。以下的步骤与标准的微局部分析略微有所区别, 主要是便于工程上实现。根据时频对偶理论^[7], Fourier 模的衰减速度反映了信号的光滑性。严格地说, 如果 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 光滑, 那么当 $\xi \rightarrow \infty$ 和 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 它的 Fourier 模 $|F_B(\xi, \eta, x_0, y_0)|$ 衰减得很快。通常情况下, 我们可以通过搜索模的最慢衰减方向找到奇异性方向。在奇异性方向的检测过程中, 我们将 Fourier 平面等分成 N 个锥 (图 5 为示意图), 分别研究模在各个锥中的衰减趋势。这里, 我们借助主分量分析法 (PCA)^[8] 来搜索第一个主分量方向。同时还要设定一些判决标准, 比如:

(1) 如果相邻两个主分量方向之间的夹角小于设定的角度门限, 那么我们认为只有一个主分量方向, 并设其为原来两主分量方向的平均值。

(2) 计算所有锥的像素值之和 S_i , $i = 1, 2, \dots, N$, 并选出其中的最大值 S_M , $1 \leq M \leq N$ 。如果 S_i 满足相应的门限, 比如, $20 \lg(S_i/S_M) \geq -3\text{dB}$, 则计算该锥中的主分量方向, 否则不计算。

(3) 某些奇异点的奇异性方向可能不只一个, 但通常我们最多对前 4 个或前 5 个主要的奇异性方向感兴趣。比如, 如果主分量方向的个数大于 4, 则认为点 (x_0, y_0) 没有明显的奇异性。

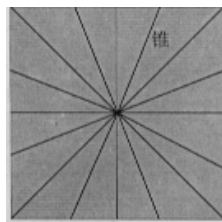


图 5 Fourier 平面的划分

4 实验结果及分析

算法的分辨率取决于钟形函数作用半径的大小。如图 6(a) 所示, 局部化时, 钟形函数会覆盖与点 (x_0, y_0) 相邻的多个像素, 因此这些像素的奇异性信息 (如果存在) 可能会干扰点 (x_0, y_0) 的奇异性信息。比如, 当点 (x_0, y_0) 不存在奇异性时, 如果与它相邻的点 (x_1, y_1) 存在奇异性, 算法的结果可能会告诉我们, 点 (x_0, y_0) 有奇异性。同样, 当相邻点 (x_1, y_1) 不存在奇异性, 而点 (x_0, y_0) 存在奇异性时, 算法的结果可能会告诉我们, 点 (x_1, y_1) 有奇异性。因此, 如果图像

中只有点 (x_0, y_0) 的奇异性是沿着 θ 角方向, 那么算法将检测出包含该点的一个小区域中的所有点都是奇异性近似沿着 θ 角方向的点 (如图 6(b) 所示)。

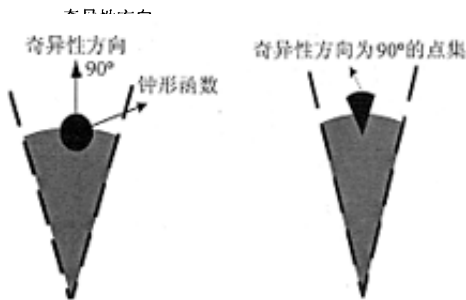


图 6

微局部分析的本质在于空间-频率的同时局部化。图 7 和图 8 分别是两幅原始图像和依次按照算法的 3 个步骤对图像进行处理的结果。这里以图 7 为例对实验结果进行说明。在图 7(a) 中, 我们选择两个等半径圆环的交点作为研究对象。根据波的传播理论, 奇异性方向应当是两个圆环的法线方向。图 7(c) 给出了 Fourier 模的最慢衰减方向。图 7(d) 是算法检测出的奇异性方向。从实验结果可以看出, 文中提出的算法简明准确。需要指出的是, 本文对标准微局部分析的锥形化作了一些必要的简化, 否则将消耗过多的计算时间。

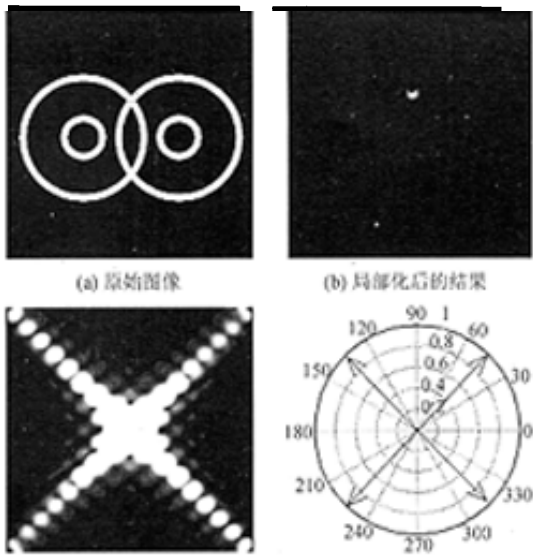


图 7 原始图像及算法的处理结果

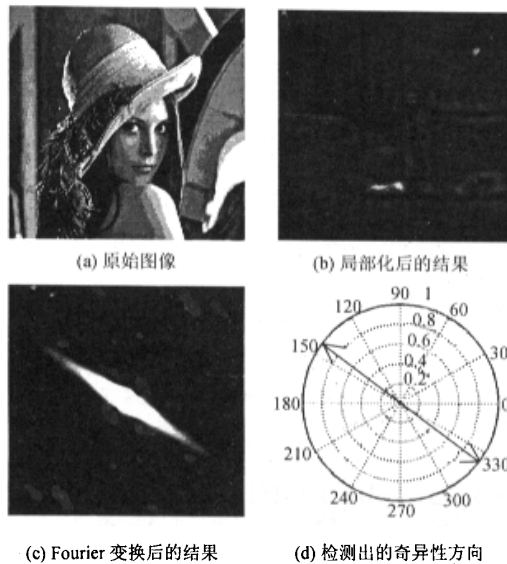


图 8 Lenna 图像及算法的处理结果

参 考 文 献

- [1] Martin H. Efficient One-, Two- and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing. Aachen: Shaker Verlag, 1997: 9-57.
- [2] Margaret C. Synthetic Aperture Radar (SAR) and Microlocal Analysis, Dept. of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, March 2002.
- [3] Margaret C. A mathematical tutorial on synthetic aperture radar. *SIAM Review*, 2001, 43(2): 301-312.
- [4] Ashino R, Heil C, Nagase M, Vaillancourt R. Microlocal filtering with multiwavelets. *Computers and Mathematics with Applications*, 2001, 41: 111-133.
- [5] 王桥, 吴乐南. 方向正交小波基与信号的方向性分析. *应用科学学报*, 2000, 18(1): 76-79.
- [6] 齐民友. 线性偏微分算子引论 (上)[M]. 北京, 科学出版社, 1984: 508-518.
- [7] Popivanov P R, Iordanov I V. Paradifferential operators and propagation of singularities for nonlinear P. D. E.. Akademie der Wissenschaften der DDR. Institut für Mathematik, 1983.
- [8] Hyvärinen A. Survey on independent component analysis. *Neural Computing Surveys*, 1999, 2: 94-128.

陈小藩: 女, 1977 年生, 博士生, 研究方向: 现代信号处理.

王 桥: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 现在哈佛大学从事 DNA Signature 和信息论方面的访问研究. 研究领域: 调和分析、图像处理、网络多媒体、信号分析和传感器网络.

吴乐南: 男, 1952 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向: 多媒体技术、数字广播.