

扇面波导及其腔体的格林函数*

吕善伟

(北京航空航天大学, 北京 100083)

摘要 文中介绍了扇面直波导及其腔体中电矢量位和磁矢量位的格林函数, 采用分离变量法、傅里叶变换法和留数定理导出了格林函数的具体表达式。

关键词 扇面波导; 扇面波导腔; 电矢量位格林函数; 磁矢量位格林函数

1. 引言

扇面直波导横截面的两个宽边为长度、半径不等的圆弧, 两个窄边是长度相等的垂直于宽边的直线。扇面波导能与圆柱体完全共形, 用于传输能量、设计共形缝隙天线、缝隙阵列和馈电系统。扇面波导天线在圆柱体上没有任何突起部分所以不影响气动特性。应用扇面波导及其器件和天线时, 需要了解波导中场及其激励问题, 本文利用分离变量法、傅里叶变换法和留数定理推导扇面直波导及其腔体中格林函数, 给出最终结果, 为讨论扇面波导及其元件、缝隙天线提供方便。

2. 磁矢量位格林函数 $\bar{G}_m$

扇面波导和扇面波导腔体示意图如图1和图2所示。图中标出了文中采用的圆柱坐标和有关几何尺寸。

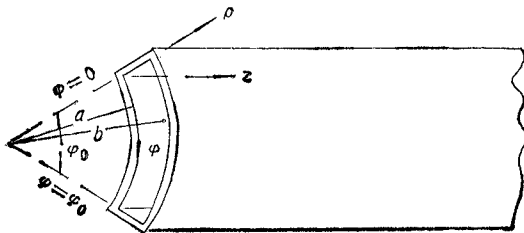


图1 扇面波导示意图

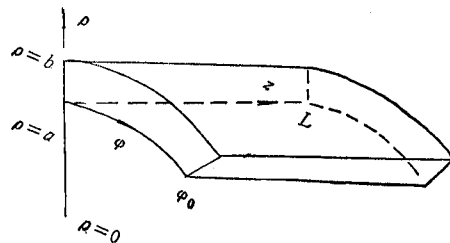


图2 扇面波导腔体示意图

矢量位格林函数在圆柱坐标系的波动方程为

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \left\{ \begin{matrix} \bar{G}_m \\ \bar{G}_e \end{matrix} \right\} = -\bar{I} \frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z')}{\rho} \quad (1)$$

1991.08.12 收到, 1991.10.10 定稿。

* 国家自然科学基金资助课题。

吕善伟 男, 1937年出生, 教授, 从事电磁场与微波技术的教学和研究工作。

在理想金属表面上满足

$$\hat{n} \times \bar{\mathbf{G}}_m = 0, \quad \hat{n} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_m = 0 \quad (2)$$

$$\hat{n} \cdot \bar{\mathbf{G}}_e = 0, \quad \hat{n} \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}_e = 0 \quad (3)$$

各式中 $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, $\hat{n}$ 为边界面法向单位矢量, $\bar{\mathbf{G}}_m, \bar{\mathbf{G}}_e$ 分别为磁、电矢量位并矢格林函数, $\bar{\mathbf{I}}$ 为单位并矢.

(1) 式包含 $\bar{\mathbf{G}}_m$ 或 $\bar{\mathbf{G}}_e$ 的三个分量的标量波动方程. 各分量可根据各自的边界条件求解波动方程获得. 对于扇面直波导假定伸向无限远, 满足辐射条件, 我们对 z 坐标采用傅里叶变换^[1], 即令

$$\tilde{\mathbf{G}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G} \exp(jtz) dz \quad (4)$$

则(1)式的一个标量方程变成

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} + (k^2 - t^2) \right] \tilde{G} = - \frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \exp(jtz')}{\rho} \quad (5)$$

利用(5)式并根据(2)式的边界条件便能确定 $\bar{\mathbf{G}}_m$ 的各分量.

(1) $G_m^{\rho\rho}$

令

$$\tilde{G}_m^{\rho\rho} = \sum_p Z_p(\rho) \sin(\nu_p \varphi), \quad \nu_p = \frac{p\pi}{\phi_0}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (6)$$

代入(5)式并利用正弦函数的正交性, 可得

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (\chi^2 - \nu_p^2 / \rho^2) \right] Z_p(\rho) = - \frac{2\delta(\rho - \rho')}{\phi_0 \rho} \sin(\nu_p \varphi') \exp(jtz') \quad (7)$$

式中

$$\chi^2 = k^2 - t^2 \quad (7a)$$

我们通过求解一个新的 g 的方程, 利用积分获得(7)式的解, g 方程为

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (\chi^2 - \nu_p^2 / \rho^2) \right] g = - \delta(\rho - \rho') \quad (8)$$

当 $\rho \neq \rho'$ 时, g 满足齐次波动方程, 对于 ν_p 为整数, 容易得到 g 的通解; 利用 $\rho = \rho'$ 时 g 连续和(2)式的边界条件确定通解的部分系数; 再由 g 的一阶导数在 $\rho = \rho'$ 处跃变-1, 确定其余系数. 最后得到

$$g = AD[J_{\nu_p}(\chi\rho)N'_{\nu_p}(\chi\rho_{ab}) - J'_{\nu_p}(\chi\rho_{ab})N_{\nu_p}(\chi\rho)] \quad (9)$$

式中

$$D = \begin{vmatrix} J_{\nu_p}(\chi\rho') & N_{\nu_p}(\chi\rho') \\ J'_{\nu_p}(\chi\rho_{ba}) & N'_{\nu_p}(\chi\rho_{ba}) \end{vmatrix} \quad (9a)$$

$$A = -\frac{\pi\rho'}{2D'}, \quad D' = \begin{vmatrix} J'_{\nu_p}(\chi b) & N'_{\nu_p}(\chi b) \\ J'_{\nu_p}(\chi a) & N'_{\nu_p}(\chi a) \end{vmatrix} \quad (9b)$$

在波导内不同区域, ρ_{ab} 和 ρ_{ba} 对应不同的值, 即

$$\rho \begin{cases} < \rho' \\ > \rho' \end{cases}, \quad \rho_{ab} = \begin{cases} a \\ b \end{cases}, \quad \rho_{ba} = \begin{cases} b \\ a \end{cases} \quad (10)$$

利用 g 函数通过积分得到(7)式的解 Z_p

$$\begin{aligned} Z_p &= \int g \left[-\frac{2}{\phi_0 \rho'} \sin(\nu_p \varphi') \exp(jt z') \right] d\rho' \\ &= -\frac{\pi}{\phi_0} \sin(\nu_p \varphi') \exp(jt z') \frac{D}{D'} [J_{\nu_p}(\chi \rho) N'_{\nu_p}(\chi \rho_{ab}) \\ &\quad - J_{\nu_p}(\chi \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi \rho)] \end{aligned} \quad (11)$$

把(11)式代到(6)式中, 并注意到 $D' = 0$ 为它的极点, 进行反傅氏变换, 利用留数定理得到 $G_m^{\rho\rho}$

$$\begin{aligned} G_m^{\rho\rho} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_m^{\rho\rho} \exp(-jtz) dt \\ &= \sum_p \sum_q \frac{j\pi \chi_{pq}}{\phi_0 \sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2}} \sin(\nu_p \varphi') \sin(\nu_p \varphi) \frac{D}{D'} [N'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho) \\ &\quad - J'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi \rho)] \exp(-j\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} |z - z'|) \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$D' = a \begin{vmatrix} J'_{\nu_p}(\chi_{pq} b) & N'_{\nu_p}(\chi_{pq} b) \\ J'_{\nu_p}(\chi_{pq} a) & N'_{\nu_p}(\chi_{pq} a) \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} J'_{\nu_p}(\chi_{pq} a) & N'_{\nu_p}(\chi_{pq} a) \\ J'_{\nu_p}(\chi_{pq} b) & N'_{\nu_p}(\chi_{pq} b) \end{vmatrix} \quad (12a)$$

χ_{pq} 是 $D' = 0$ 的第 q 个根.

(2) $G_m^{\varphi\varphi}$

$G_m^{\varphi\varphi}$ 的边界条件与 $G_m^{\rho\rho}$ 的不同, 它随 φ 的变化规律应为 $\cos(\nu_p \varphi)$, $\rho = a$ 或 b 时 $G_m^{\varphi\varphi} = 0$. 但仍可利用处理 $G_m^{\rho\rho}$ 的过程求解, 最后得到

$$\begin{aligned} G_m^{\varphi\varphi} &= \frac{-j\pi}{2\phi_0} \sum_p \sum_q \frac{\chi_{pq} \varepsilon_{op}}{\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2}} \cos(\nu_p \varphi') \cos(\nu_p \varphi) \frac{D_1}{D'_1} \\ &\quad \times [N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho) - J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho)] \\ &\quad \exp(-j\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} |z - z'|) \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$D'_1 = a \begin{vmatrix} J_{\nu_p}(\chi_{pq} b) & N_{\nu_p}(\chi_{pq} b) \\ J'_{\nu_p}(\chi_{pq} a) & N'_{\nu_p}(\chi_{pq} a) \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} J_{\nu_p}(\chi_{pq} a) & N_{\nu_p}(\chi_{pq} a) \\ J'_{\nu_p}(\chi_{pq} b) & N'_{\nu_p}(\chi_{pq} b) \end{vmatrix} \quad (13a)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho') & N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho') \\ J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ba}) & N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ba}) \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{op} = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 2, & p \neq 0 \end{cases} \quad (13b)$$

χ_{pq} 是 $J_{\nu_p}(\chi b) N_{\nu_p}(\chi_{pq} a) - J_{\nu_p}(\chi_{pq} a) N_{\nu_p}(\chi_{pq} b) = 0$ 的第 q 个根.

(3) G_m^{zz}

$\rho = a$ 或 b 时 G_m^{zz} 与 $G_m^{\varphi\varphi}$ 的边界条件相同, $\varphi = 0$ 或 φ_0 时 G_m^{zz} 与 $G_m^{\rho\rho}$ 的边界条件相同, 于是可直接由 $G_m^{\varphi\varphi}$ 的结果得到

$$G_m^{zz} = G_m^{\varphi\varphi} |_{\cos \rightarrow \sin} \quad (14)$$

最后得

$$\bar{G}_m = \rho \hat{\rho} G_m^{\rho\rho} + \hat{\varphi} \hat{\varphi} G_m^{\varphi\varphi} + z \hat{z} G_m^{zz} \quad (15)$$

磁矢量位格林函数可用于分析各种形式的电激励问题, 例如沿 ρ 向伸入金属波导中的金属探针, 利用 $G_m^{\rho\rho}$ 的结果容易分析它的激励场和匹配特性等。

3. 电矢量位格林函数 $\bar{G}_e$

采用求解磁矢量位并矢格林函数 $\bar{G}_m$ 的方法和过程, 从(1)式出发根据边界条件(3)式, 能够求出 $\bar{G}_e$ 的三个分量。

(1) $G_e^{\rho\rho}$

$$\begin{aligned} G_e^{\rho\rho} = & \frac{-j\pi}{2\phi_0} \sum_p \sum_q \frac{\varepsilon_{op} \chi_{pq}}{\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2}} \sin(\nu_p \varphi') \sin(\nu_p \varphi) \frac{D_1}{D_1'} \\ & \times [N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho) - J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho)] \\ & \times \exp(-j\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} |z - z'|) \end{aligned} \quad (16)$$

对于 $\varphi' = 0$ 或 φ_0 的波导侧壁上 ρ 向磁流源, 相当于侧壁上 ρ 向窄缝隙, 此时 $G_e^{\rho\rho} = 0$ 。

(2) $G_e^{\varphi\varphi}$

$G_e^{\varphi\varphi}$ 解的形式与 $G_m^{\rho\rho}$ 相同。对于 $\rho = a$ 或 b 的波导宽面上缝隙天线, 如图 3 所示, 磁流限于 $\rho' = a$ 或 b 的面上, 此时

$$\begin{aligned} G_e^{\varphi\varphi} = & \sum_p \sum_q \frac{j2 \sin(\nu_p \varphi') \sin(\nu_p \varphi)}{\phi_0 \sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} \rho'} \frac{1}{D''} \\ & \times [N'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho) - J'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho)] \\ & \times \exp(-j\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} |z - z'|) \end{aligned} \quad (17)$$

(3) G_e^{zz}

对应图 3 中 $\rho' = a$ 或 b 上窄缝隙的纵向磁流源

$$\begin{aligned} G_e^{zz} = & \sum_{p=0} \sum_{q=1} \frac{j\varepsilon_{op}}{\phi_0 \sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} \rho'} \cos(\nu_p \varphi') \cos(\nu_p \varphi) \frac{1}{D''} \\ & \times [N'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho) - J'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho)] \\ & \times \exp(-j\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} |z - z'|) \end{aligned} \quad (18)$$

$\varphi' = 0$ 或 φ_0 时

$$\begin{aligned} G_e^{zz} = & \sum_{p=0} \sum_{q=1} \frac{(\pm 1)^p j\varepsilon_{op} \pi \chi_{pq}}{2\phi_0 \sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2}} \cos(\nu_p \varphi) \frac{D}{D''} \cdot [N'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) J_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho) \\ & - J'_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho_{ab}) N_{\nu_p}(\chi_{pq} \rho)] \exp[-j\sqrt{k^2 - \chi_{pq}^2} |z - z'|] \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $(\pm)^p$ 分别对应 $\varphi' = 0$ 和 φ_0 。

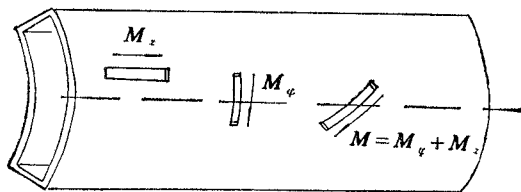


图 3 扇面波导辐射缝隙示例

4. 扇面波导腔的格林函数

为了书写简便,把格林函数表示为

$$G = \sum_q \sum_p \sum_l Z_q(\rho) \Phi_p(\varphi) \mathfrak{Z}_l(z) \quad (20)$$

并令

$$\int_0^L \mathfrak{Z}^2(z) dz = 1 \quad (21)$$

$Z_q(\rho)$ 和 $\Phi_p(\varphi)$ 解的形式与前两节有关公式相同,只需求出 $\mathfrak{Z}_l(z)$ 便可得到 G 。

$$G_m^{\rho\rho} = \sum_q \sum_p \sum_l Z_{mq}^{\rho\rho}(\rho) \Phi_{mp}^{\rho\rho}(\varphi) \frac{\epsilon_{ol}}{L} \sin\left(\frac{l\pi}{L} z'\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$G_m^{\varphi\varphi} = \sum_q \sum_p \sum_l Z_{mq}^{\varphi\varphi}(\rho) \Phi_{mp}^{\varphi\varphi}(\varphi) \frac{\epsilon_{ol}}{L} \sin\left(\frac{l\pi}{L} z'\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$G_m^{zz} = \sum_q \sum_p \sum_l Z_{mq}^{zz}(\rho) \Phi_{mp}^{zz}(\varphi) \frac{\epsilon_{ol}}{L} \cos\left(\frac{l\pi}{L} z'\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$G_c^{\rho\rho} = \sum_q \sum_p \sum_l Z_{cq}^{\rho\rho}(\rho) \Phi_{cp}^{\rho\rho}(\varphi) \frac{\epsilon_{ol}}{L} \cos\left(\frac{l\pi}{L} z'\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$G_c^{\varphi\varphi} = \sum_q \sum_p \sum_l Z_{cq}^{\varphi\varphi}(\rho) \Phi_{cp}^{\varphi\varphi}(\varphi) \frac{\epsilon_{ol}}{L} \cos\left(\frac{l\pi}{L} z'\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$G_c^{zz} = \sum_q \sum_p \sum_l Z_{cq}^{zz}(\rho) \Phi_{cp}^{zz}(\varphi) \frac{\epsilon_{ol}}{L} \sin\left(\frac{l\pi}{L} z'\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L} z\right)$$

$$\epsilon_{ol} = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 2, & l \neq 0 \end{cases}$$

参 考 文 献

- [1] 陈敬熊,李桂生著: 电磁场理论中的直接法与积分方程法,科学出版社,北京,1987年,第2章
- [2] Y.Rahmat-samii, IEEE Trans. on MTT, MTT-23(1975)9, 762—809

THE GREEN'S FUNCTIONS IN SECTORAL WAVEGUIDE AND ITS CAVITY

Lü Shanwei

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract The Green's functions for electric and magnetic vector potentials in a sectoral wave guide and its cavity are derivated by using the separation of variables, Fourier transform and residue theory.

Key words Sectoral waveguide; Cavity; Electric potential Green's function; Magnetic potential Green's function