

含源多层弱起伏介质中的电磁场* **

李乐伟 焦培南

(中国电波传播研究所, 河南新乡)

提要 本文在 Born 近似下提出了求解含源多层随机介质的电磁场的并矢格林函数方法. 激发源可以在 N 层随机介质中的任意一层. 在背景介质的任一层均为各向同性慢变分层的假定下, 利用 W. K. B 近似及电型和磁型并矢格林函数, 导出了 N 层介质中任意一层中的平均场和起伏场, 并用反射系数、透射系数、阻抗、电导和波数比等物理量表示.

关键词 电磁场; 多层介质; W. K. B. 近似法; 并矢格林函数.

1. 引言

在电波传播研究中, 电磁波在随机介质中的传播问题是较为复杂的. 研究它的方法很多, 如辐射传输理论、相位屏理论、Rytov 近似、抛物方程法 (PEM)、重整化方法 (Renormalization Method), 并矢格林函数法以及全波法等. 但这些方法只讨论了二层和三层不含源随机介质模型, 而且随机介质层仅一层. 到目前为止, 还没有上述 N 层含源随机介质模型的一般公式.

本文考虑了 N 层含源弱起伏介质模型. 激发源被置于 N 层介质中任意一层. 观察点也可以在 N 层介质中任意一层. 利用 Born 近似并将电磁场分离成平均场和起伏场, 得到含源矢量波动方程以及相应的边界条件. 在假设 N 层背景介质中任意一层均为各向同性并随垂直位置慢变的前提下, 利用 W. K. B 近似和并矢格林函数方法, 得到了平均场和起伏场的解, 并用透射、反射系数、阻抗、导纳以及波数比表示出来.

2. 定解问题

考虑如图 1 所示的无界成层随机介质, 设电流源 J 位于标号为 i 的层, 具有时谐因子 $\exp(-j\omega t)$. 再设 N 层介质的背景介质中每一层都是水平慢变分层的, 而标号为 j 的观察层中, 其电磁场和介电常数可以写成下列形式:

$$E_j = \langle E_j \rangle + E_j^i \quad (1)$$

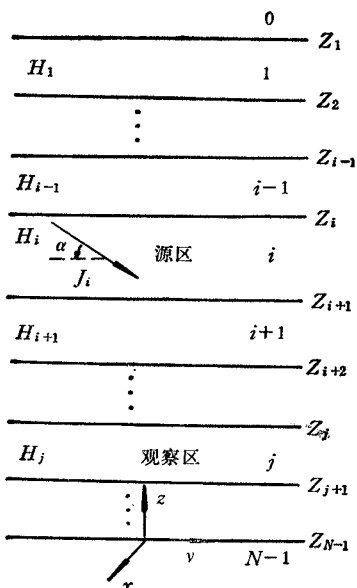


图1 问题的几何形状

* 1986年8月4日收到, 1987年3月16日修改定稿.

** 国家自然科学基金资助项目

$$\mathbf{H}_i = \langle \mathbf{H}_i \rangle + \mathbf{H}_i^s \quad (2)$$

$$\epsilon_i = \langle \epsilon_i \rangle + \epsilon_0 \epsilon_i^s \quad (3)$$

其中括号 $\langle \rangle$ 表示统计平均, $\mathbf{E}_i^s$, $\mathbf{H}_i^s$ 和 ϵ_i^s 是均值为零的起伏场和起伏介电常数. ϵ_0 是自由空间的介电常数, 上标 s 表示随机散射.

当介电常数 ϵ_i 的不规则变化为弱起伏时, 利用 Born 近似可以获得:

$$\nabla \times \nabla \times \langle \mathbf{E}_i \rangle - K_i^2 \langle \mathbf{E}_i \rangle = j\omega\mu_i \mathbf{J}_i(\mathbf{R}') \delta_i^s \quad (4)$$

$$\nabla \times \nabla \times \langle \mathbf{H}_i \rangle - K_i^2 \langle \mathbf{H}_i \rangle = [\nabla \times \mathbf{J}_i(\mathbf{R}')] \delta_i^s \quad (5)$$

以及

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i^s - K_i^2 \mathbf{E}_i^s = K_0^2 \epsilon_i^s \langle \mathbf{E}_i \rangle \quad (6)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_i^s - K_i^2 \mathbf{H}_i^s = K_0^2 \epsilon_i^s \langle \mathbf{H}_i \rangle \quad (7)$$

而相应的边界条件为:

$$\hat{n} \times \langle \mathbf{E}_i \rangle = \hat{n} \times \langle \mathbf{E}_{i+1} \rangle \quad (8)$$

$$\hat{n} \times \langle \mathbf{H}_i \rangle = \hat{n} \times \langle \mathbf{H}_{i+1} \rangle \quad (9)$$

和

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_i^s = \hat{n} \times \mathbf{E}_{i+1}^s \quad (10)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_i^s = \hat{n} \times \mathbf{H}_{i+1}^s \quad (11)$$

或从 Maxwell 方程和 Born 近似得

$$\frac{1}{\langle \epsilon_i \rangle} \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H}_i^s = \frac{1}{\langle \epsilon_{i+1} \rangle} \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H}_{i+1}^s \quad (12)$$

$$\frac{1}{\mu_i} \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}_i^s = \frac{1}{\mu_{i+1}} \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}_{i+1}^s \quad (13)$$

和

$$\frac{1}{\langle \epsilon_i \rangle} \hat{n} \times \nabla \times \langle \mathbf{H}_i \rangle = \frac{1}{\langle \epsilon_{i+1} \rangle} \hat{n} \times \nabla \times \langle \mathbf{H}_{i+1} \rangle \quad (14)$$

$$\frac{1}{\mu_i} \hat{n} \times \nabla \times \langle \mathbf{E}_i \rangle = \frac{1}{\mu_{i+1}} \hat{n} \times \nabla \times \langle \mathbf{E}_{i+1} \rangle \quad (15)$$

其中, $K_i^2 = \omega^2 \mu_i \langle \epsilon_i \rangle$, 而 $K_0^2 = \omega^2 \mu_i \epsilon_0$.

与文献 [1] 相类似的并矢格林函数方法结合慢变分层的 W. K. B 近似, 我们可以得到 (4)–(7) 式的解. 有关上述慢变分层介质中的并矢格林函数及其系数递推矩阵方程组的求得可参见文献 [1, 2].

3. 弱起伏介质中的平均场解

考虑与水平层夹角为 α 的电偶极子 (如图 1), 其电流密度可以表示为:

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{R}) = P_2 (\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}) \delta(X) \delta(Y) \delta(Z - Z') \quad (16)$$

其中, P_2 表示偶极矩.

设 N 层介质中任一层的磁导率 μ_i 均等于自由空间的磁导率 μ_0 , 从 (4), (5) 和 (16) 式, 我们得到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \langle E_{jr} \rangle \\ \langle E_{j\varphi} \rangle \\ \langle E_{jz} \rangle \end{bmatrix} &= \frac{\omega \mu_0 P_2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda) h_j(Z, \omega)} \left\{ \cos \alpha (X^+ + X_\star^+) \right. \\
&\times \begin{pmatrix} -[J_0(\lambda r) + J_2(\lambda r)] \cos \varphi \\ [J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)] \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{Y^+ + Y_\star^+}{K_i(Z', \omega) K_j(Z, \omega)} \\
&\times \begin{bmatrix} j h_j(Z, \omega) [J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)] \cos \varphi \\ j h_j(Z, \omega) [J_0(\lambda r) + J_2(\lambda r)] \sin \varphi \\ \lambda J_1(\lambda r) \cos \varphi \end{bmatrix} \times j h_i(Z', \omega) \cos \alpha \\
&\left. + \lambda \sin \alpha \begin{pmatrix} -j h_j(Z, \omega) J_1(\lambda r) \\ 0 \\ \lambda J_0(\lambda r) \end{pmatrix} \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \langle H_{jr} \rangle \\ \langle H_{j\varphi} \rangle \\ \langle H_{jz} \rangle \end{bmatrix} &= -\frac{j P_2 K_j(Z, \omega)}{4\pi K_i(Z, \omega)} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda) h_j(Z, \omega)} \left\{ \cos \alpha (X^- + X_\star^-) \right. \\
&\times \frac{K_i(Z', \omega)}{K_j(Z, \omega)} \begin{pmatrix} j h_j(Z, \omega) [J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)] \sin \varphi \\ j h_j(Z, \omega) [J_0(\lambda r) + J_2(\lambda r)] \cos \varphi \\ \lambda J_1(\lambda r) \sin \varphi \end{pmatrix} \\
&+ (Y^- + Y_\star^-) \left[\lambda \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ J_1(\lambda r) \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\left. \left. + j h_i(Z', \omega) \cos \alpha \begin{pmatrix} [J_0(\lambda r) + J_2(\lambda r)] \sin \varphi \\ -[J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)] \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \quad (18)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
X^\pm &= \{(1 - \delta_i^N)(1 - \delta_i^I) a_j \exp[F(Z)] \pm (1 - \delta_i^I)(1 - \delta_i^I) \\
&\times e_j \exp[-F(Z)]\} \exp[-F(Z')] \\
&+ \{(1 - \delta_i^N)(1 - \delta_i^N) b_j \exp[F(Z)] \pm (1 - \delta_i^I)(1 - \delta_i^N) \\
&\times f_j \exp[-F(Z)]\} \exp[F(Z')]
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
Y^\pm &= \{(1 - \delta_i^N)(1 - \delta_i^I) c_j \exp[F(Z)] \pm (1 - \delta_i^I)(1 - \delta_i^I) \\
&\times g_j \exp[-F(Z)]\} \exp[-F(Z')] \\
&+ \{(1 - \delta_i^N)(1 - \delta_i^N) d_j \exp[F(Z)] \pm (1 - \delta_i^I)(1 - \delta_i^N) \\
&\times i_j \exp[-F(Z)]\} \exp[F(Z')]
\end{aligned}$$

而

$$X_\star^\pm = Y_\star^\pm = \delta_i^I \begin{cases} \exp[F(Z) - F(Z')], & Z \geq Z' \\ \pm \exp[F(Z') - F(Z)], & Z \leq Z' \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{Z_j}^x j h_i dZ + \sum_{l=0}^{N-i-2} \int_{Z_{j+l+1}}^{Z_{j+l+1}} j h_{i+l+1} dZ$$

$$W(\lambda) = 4[h_i(Z_j, \omega)h_i(Z, \omega)h_i(Z_i, \omega)h_i(Z', \omega)]^{1/2} \quad (19)$$

至此,我们求得了任意 N 层介质中的一般场解。

4. 弱起伏介质中的起伏场

由于 (6) 式、(7) 式和 (4) 式的数学模型是相同的, 因此 (6) 式和 (7) 式中 $\mathbf{E}_i^s$ 和 $\mathbf{H}_i^s$ 所对应的并矢格林函数和 (4) 式中 $\langle \mathbf{E}_i \rangle$ 所对应的电型并矢格林函数是相同的, 而数学意义上的激发源是平均场。但 ϵ_i^s 不为零, 因此, 起伏场实际上是由随机散射体二次激发的。类似于 (4) 式平均场的计算, 利用并矢格林函数方法, 我们同样可以计算起伏场。

从 (17) 和 (18) 式的场解可以看出, 由于并矢格林函数有关源点所在平面的上下方的场 $\langle \mathbf{E}_i^1 \rangle$ 和 $\langle \mathbf{E}_i^2 \rangle$ 是不同的。对于起伏场来说, 从 (6) 和 (7) 式可以看到, 起伏场数学意义上的激发源是平均场, 由于源点上下方的平均场的差异, 自然起伏场在源所在平面上下方的差异就更大一些。而有关源的激发情况如图 2 所示。

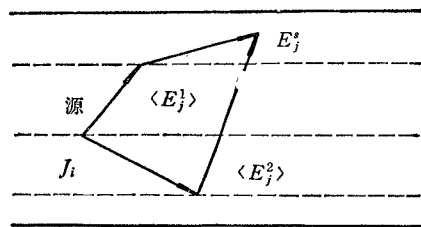


图 2 源层的源激发情况

从 (6), (7), (17) 和 (18) 式, 我们得到起伏场为:

$$\begin{bmatrix} T_{ir}^s \\ T_{i\varphi}^s \\ T_{iz}^s \end{bmatrix} = -\epsilon_i^s(\mathbf{R}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \langle T_{iz} \rangle \end{bmatrix} - \frac{K_0^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda' d\lambda'}{h_i'(Z, \omega) [h_i'(Z_j, \omega) h_i'(Z, \omega)]^{1/2}}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_0) \{ [I_M^T(\lambda', Z', n) + I_M^{T*}(\lambda', Z', n)]$$

$$\times \begin{bmatrix} \pm [J_{n-1}(\lambda' r) + J_{n+1}(\lambda' r)] \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} n\varphi \\ \pm [J_{n-1}(\lambda' r) - J_{n+1}(\lambda' r)] \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{K_i(Z, \omega)}$$

$$\times \begin{bmatrix} j h_i(Z, \omega) [J_{n-1}(\lambda' r) - J_{n+1}(\lambda' r)] \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\varphi \\ \pm j h_i(Z, \omega) [J_{n-1}(\lambda' r) + J_{n+1}(\lambda' r)] \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} n\varphi \\ \lambda' J_n(\lambda' r) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\varphi \end{bmatrix}$$

$$\times [I_N^T(\lambda', Z', n) + I_N^{T*}(\lambda', Z', n)] \} \quad (20)$$

其中符号 T 表示电场 E 或磁场 H , 而式中偶型 (E 型) 波或奇型 (O 型) 波传播模式的取舍是由如下的 $I_{M,N}^T$ 和 $I_{M,N}^{T*}$ 的积分决定的。而这里 $\epsilon_i^s(\mathbf{R})$ 表示起伏介电常数, 角标 l 满足 Einstein 求和规则。

$$\begin{aligned}
I_M^T(\lambda', Z', n) &= \{(1 - \delta_j^N)(1 - \delta_i^1)a_j \exp[F(Z)] + (1 - \delta_j^1)(1 - \delta_i^N) \\
&\quad \times e_j \exp[-F(Z)]\} U_M^T \\
&\quad + \{(1 - \delta_j^N)(1 - \delta_i^N)b_j \exp[F(Z)] + (1 - \delta_j^1)(1 - \delta_i^N) \\
&\quad \times f_j \exp[-F(Z)]\} U_{M+}^T \\
I_N^T(\lambda', Z', n) &= \{(1 - \delta_j^N)(1 - \delta_i^1)c_j \exp[F(Z)] + (1 - \delta_j^1)(1 - \delta_i^1) \\
&\quad \times g_j \exp[-F(Z)]\} U_N^T \\
&\quad + \{(1 - \delta_j^N)(1 - \delta_i^N)d_j \exp[F(Z)] + (1 - \delta_j^1)(1 - \delta_i^N) \\
&\quad \times i_j \exp[-F(Z)]\} U_{N+}^T \\
I_M^{T*}(\lambda', Z', n) &= \delta_j^1 \begin{cases} \exp[F(Z)] U_{M-}^{T1} + \exp[-F(Z)] U_{M+}^{T2}, & Z \geq Z' \\ \exp[F(Z)] U_{M-}^{T2} + \exp[-F(Z)] U_{M+}^{T1}, & Z \leq Z' \end{cases} \\
I_N^{T*}(\lambda', Z', n) &= \delta_j^1 \begin{cases} \exp[F(Z)] U_{N-}^{T1} + \exp[-F(Z)] U_{N+}^{T2}, & Z \geq Z' \\ \exp[F(Z)] U_{N-}^{T2} + \exp[-F(Z)] U_{N+}^{T1}, & Z \leq Z' \end{cases} \quad (21)
\end{aligned}$$

而其中

$$\begin{aligned}
U_{P\pm}^T &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{Z'} \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(\pm h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l'(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{Z'}^\infty \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(\pm h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l'(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
U_{P-}^{T1} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{Z'} \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(-h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l''(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{Z'}^Z \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(-h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l'(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
U_{P+}^{T1} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_Z^{Z'} \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(+h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l''(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{Z'}^\infty \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(+h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l'(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
U_{P-}^{T2} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^Z \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(-h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l''(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \\
U_{P+}^{T2} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_Z^\infty \varepsilon_l^i(\mathbf{R}) \mathbf{P}(+h_l) \cdot \langle \mathbf{T}_l'(\mathbf{R}) \rangle r dr d\varphi dz \quad (22)
\end{aligned}$$

这里符号 P 表示 M 或 N , 而 $\mathbf{T}_l'(\mathbf{R})$ 和 $\mathbf{T}_l''(\mathbf{R})$ 是相应于 $Z \geq Z'$ 和 $Z \leq Z'$ 区域的场, 这里的角标 l 满足 Einstein 求和规则。

应注意 (20) 式右边的第一项是由并矢格林函数的奇异性而导出的, 第二项是由主值并矢格林函数导出的。很显然, (20) 式的起伏场是一个随机量。若获得进一步的细节, 必须考虑电磁场的统计特性。

5. 结论

利用 Born 近似, 本文发展了电磁波在弱起伏、多层、各向同性、每层均为水平慢变分层的含源介质中传播的一种分析理论。类似于 J. A. Kong 等人^[3]处理随机问题的方法, 获得了平均场和起伏场分别满足的矢量非齐次波动方程及其边界条件。在 G. P. S. Cavalcante 等人^[4]均匀分层介质的并矢格林函数的基础上, 通过求解各层均为水平慢变分层介质的并矢格林函数, 我们分别求得了上述问题的平均场和起伏场, 其一般公式是以

积分的形式表示的,在二、三和四层随机含源介质中,尚未见到闭合式(closed form)的解,这些都有待于进一步地研究。另外,含源强起伏多层介质中的电磁波传播尚未被研究,可以期望在解上述矢量波动方程时,重整化方法可能提供一些有用的结果。

参 考 文 献

- [1] 李乐伟, 焦培南, 电波科学学报, 1986 年, 第 2 期, 第 10—25 页
- [2] 李乐伟, 焦培南, 含源多层弱起伏介质中电磁场的积分解, 1986 年电波传播学术年会论文摘要集, 西安, 1986 年, 第 217—219 页
- [3] L. Tsang, J. A. Kong, *Radio Sci.*, 11(1976), 595—598.
- [4] G. P. S. Cavalcante, D. A. Rogers, A. J. Giardola, *Radio Sci.*, 17(1982), 503—508.

THE COMPUTATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN WEAK FLUCTUATING MULTILAYERED MEDIA WITH SOURCE

Li Lewei, Jiao Peinan

(China Research Institute of Radio Wave Propagation, Xinxiang, Henan)

ABSTRACT Based on the Born approximation, an analytical theory for computing the electromagnetic field in weak fluctuating multilayered media with source is developed. In the theory, the source can be placed in an arbitrary layer among N -layers of the media. On the assumption that every layer among N -layers of the background media is isotropic and varies sufficiently slowly along the vertical position, the average and scattering fields represented by their reflection coefficients, transmission coefficients, impedances, admittances and wave number ratios are obtained by W. K. B method and the dyadic Green's function of electric and magnetic typed.

KEY WORDS Electromagnetic field; Multilayered media; W. K. B method; Dyadic Green's function