

二维线性相位 FIR 数字滤波器的优化设计

王小华^{***} 何怡刚^{**} 彭玉楼^{***}

^{*}(长沙理工大学电气与信息工程学院 长沙 410077)

^{**}(湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082)

^{***}(长沙理工大学计算机与通信工程学院 长沙 410077)

摘要: 该文提出了一种用神经网络算法来设计二维线性相位数字滤波器的新方法。通过分析二维 FIR 线性相位滤波器的幅频响应特性,建立了神经网络算法。根据给定的幅频响应指标,按该算法可获得滤波器系数。为保证该算法的稳定性,提出并证明了该算法的收敛定理。文中给出了圆对称和矩形对称二维低通线性相位 FIR 数字滤波器优化设计实例。计算机仿真结果表明由该方法设计的二维数字滤波器,通带和阻带范围波动小,所需计算量非常少,稳定性强,因而是一种优异的设计方法。

关键词: 二维数字滤波器, 线性相位, 神经网络, 收敛定理, 优化设计

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)11-1755-05

Optimum Design of 2-D Linear-Phase FIR Digital Filters

Wang Xiao-hua^{**} He Yi-gang^{**} Peng Yu-lou^{***}

^{*}(Electrical and Infomational Engineering College, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410077, China)

^{**}(Electrical and Infomational Engineering College, Hunan University, Changsha 410082, China)

^{***}(Computer and Communication College, Changsha University of Science & Tchnology, Changsha 410077, China)

Abstract This paper provides a new design approach based on a Neural Networks Algorithm(NNA). According to the amplitude-frequency response characteristics of 2-D FIR linear-phase filters ,the NNA is established .Using the NNA,the designed filter coefficients can be obtained from the specified amplitude-frequency responses.To ensure stability of the NNA, the convergence theorem of the NNA is presented and proved. Two examples including circularly-symmetric and quadrately-symmetric 2-D lowpass linear-phase FIR filtrsrs are also given to illustrate the effectiveness of the NNA-based design approach,and the results show that the ripple is considerably small in passband and in stopband,and the NNA-based method is of strong stability and requires significantly little amount of computations.Therefore,the optimal design approach is effective and excellent in the design field of 2-D linear phase FIR digital filters.

Key words 2-D digital filters, Linear-phase, Neural network, Convergence theorem, Optimal design

1 引言

在过去的 30 年里,二维数字滤波器的设计受到了研究人员的广泛重视,并被应用于图像处理、地震数据处理及天文学等领域。与一维数字滤波器相比,由于人类的视觉相对于人类的听觉对二维数字滤波器的相位响应引起的波形失真更为敏感,二维数字滤波器通常要求满足期望的幅度和相位响应特性。因此,保证二维数字滤波器的线性相位显得非

常重要。二维FIR数字滤波器主要采用窗函数法, McClellan变换法及最优化方法实现。虽然窗函数法^[1,2]具有设计简单、方便等特点,但设计精度不高,且难以确定最优的窗函数。McClellan变换法^[3,4]对某些频率响应的滤波器具有很好的逼近效果,但对任意幅度响应的滤波器设计,变换法难以奏效,特别在设计高阶变换时要求出变换函数的最大值和最小值很困难。最优化方法能得到在 l_p 范数意义上最优的滤波器系

数, 基于 l_2 范数逼近的加权最小二乘法^[5,9]被认为是一种行之有效的优化设计方法, 然而在加权最小二乘法中不可避免要进行高阶矩阵的求逆运算, 而且矩阵的阶数与滤波器的阶数的平方成正比。解析最小二乘法^[10]虽然不要进行高阶矩阵的求逆运算, 但可能导致设计的滤波器不稳定。而文献[10]采用半确定规划算法(semidefinite programming)仅仅设计了第一象限对称二维滤波器, 且计算量较大。

本文提出一种新的基于神经网络的二维 FIR 线性相位数字滤波器优化设计方法。其基本思想是使神经网络的输出与期望二维滤波器的幅频响应之间的全局误差平方和最小化。应用该算法设计二维滤波器, 不需要进行高阶矩阵的求逆运算, 且计算量小, 算法稳定。文中分析了二维 FIR 线性相位数字滤波器的频率响应特性, 提出并证明了该神经网络算法的收敛定理, 给出了由该方法设计的二维线性相位 FIR 数字滤波器优化设计实例。

2 二维线性相位 FIR 滤波器幅频特性

设二维 FIR 数字滤波器的传递函数为

$$H(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} h_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j} = \mathbf{Z}_1^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{Z}_2 \quad (1)$$

其中 N_1 和 N_2 为奇整数, $\mathbf{Z}_1 = [1, z_1^{-1}, \dots, z_1^{-(N_1-1)}]^T$, $\mathbf{Z}_2 = [1, z_2^{-1}, \dots, z_2^{-(N_2-1)}]^T$, $\hat{\mathbf{H}} \in R^{N_1 \times N_2}$ 。为了获得紧凑的二维线性相位 FIR 数字滤波器传递函数表达式, 设

$$\hat{\mathbf{H}} = [\mathbf{H}_{11}, \mathbf{h}_{12}, \mathbf{H}_{13}; \mathbf{h}_{21}^T, h_{22}, \mathbf{h}_{23}^T; \mathbf{H}_{31}, \mathbf{h}_{32}, \mathbf{H}_{33}] \quad (2)$$

其中, $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{13}, \mathbf{H}_{31}, \mathbf{H}_{33} \in R^{n_1 \times n_2}$, $\mathbf{h}_{12}, \mathbf{h}_{32} \in R^{n_1 \times 1}$, $\mathbf{h}_{21}, \mathbf{h}_{23} \in R^{n_2 \times 1}$, $h_{22} \in R$, $n_1 = (N_1 - 1)/2$, $n_2 = (N_2 - 1)/2$ 。

如要求该二维 FIR 数字滤波器具有线性相位特性, 则 $\mathbf{H}_{11} = \text{flipud}(\text{fliplr}(\mathbf{H}_{33}))$, $\mathbf{H}_{13} = \text{flipud}(\mathbf{H}_{33})$, $\mathbf{H}_{31} = \text{fliplr}(\mathbf{H}_{33})$,

$$\mathbf{h}_{12} = \text{flipud}(\mathbf{h}_{32}), \quad \mathbf{h}_{21}^T = \text{fliplr}(\mathbf{h}_{23}^T) \quad (3)$$

其中 flipud 和 fliplr 分别表示矩阵的垂直翻转和水平翻转操作。因此该二维线性相位 FIR 数字滤波器的频率响应可表示为

$$H(\omega_1, \omega_2) = e^{-j(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)} \mathbf{c}_1^T(\omega_1) \mathbf{H} \mathbf{c}_2(\omega_2) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{c}_i(\omega_i) = [1, \cos(\omega_i), \dots, \cos(n_i\omega_i)]^T$, $i = 1, 2$; $\mathbf{H} = [h_{22}, 2\mathbf{h}_{23}^T, 2\mathbf{h}_{32}, 4\mathbf{H}_{33}]$ 。该二维线性相位 FIR 数字滤波器的幅频响应可表示为

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{c}_1^T(\omega_1) \mathbf{H} \mathbf{c}_2(\omega_2) \quad (5)$$

因此, 二维线性相位 FIR 数字滤波器的设计问题可转化为使全局误差 $e(\omega_1, \omega_2)$ 平方和最小化的优化问题, 其中 $e(\omega_1, \omega_2) = H_d(\omega_1, \omega_2) - M_d(\omega_1, \omega_2)$, $M_d(\omega_1, \omega_2)$ 为期望二维滤波器的幅频响应。

下面先研究求解该优化问题的神经网络算法及其收敛条件, 然后给出基于该神经网络算法的两种二维线性相位 FIR 数字滤波器的优化设计实例。

3 神经网络模型

式(5)可表示为

$$\begin{aligned} H_d(\omega_1, \omega_2) &= \mathbf{c}_1^T(\omega_1) \mathbf{H} \mathbf{c}_2(\omega_2) \\ &= \mathbf{c}_1^T(\omega_1) \mathbf{W} \mathbf{c}_2(\omega_2) \\ &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} w_{ij} \cos(i\omega_1) \cos(j\omega_2) \end{aligned} \quad (6)$$

如果获得矩阵 \mathbf{W} , 由式(3), 式(4)即可获得二维线性相位 FIR 数字滤波器的系数 $\hat{\mathbf{H}}$ 。由式(6)可建立如图 1 所示的神经网络模型, 其中输入层至隐层各神经元的权值恒为 1, 隐层各神经元的激活函数分别为

$$\begin{aligned} f_{00} &= 1, \dots, f_{ij} = \cos(i\omega_1) \cos(j\omega_2), \dots, f_{n_1 n_2} \\ &= \cos(n_1\omega_1) \cos(n_2\omega_2) \end{aligned} \quad (7)$$

隐层至输出层的权值为 w_{ij} , $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$ 。

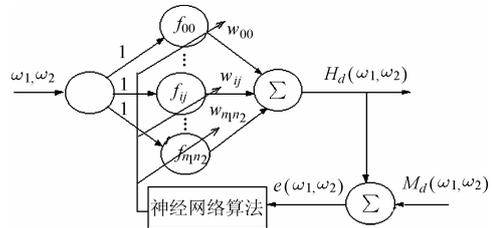


图1 神经网络模型

3.1 神经网络算法

神经网络输出如式(6), 误差函数

$$e[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)] = M_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)] - H_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)] \quad (8)$$

其中 $t_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$, $t_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1$; m_1, m_2 分别为 ω_1, ω_2 的训练样本数, $M_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)]$ 为期望输出, $H_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)]$ 为神经网络输出。定义性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t_1=0}^{m_1-1} \sum_{t_2=0}^{m_2-1} e^2(t_1, t_2) \quad (9)$$

权值调整: 由式(6), 式(8), 式(9)有

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W} &= -\eta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}} = -\eta \frac{\partial J}{\partial e(t_1, t_2)} \frac{\partial e(t_1, t_2)}{\partial H_d(t_1, t_2)} \frac{\partial H_d(t_1, t_2)}{\partial \mathbf{W}} \\ &= \eta e(t_1, t_2) \mathbf{c}_1(t_1) \mathbf{c}_2^T(t_2) \end{aligned}$$

设 t 对应训练样本 t_1, t_2 ; $t+1$ 对应下一个训练样本, 故

$$\mathbf{W}(t+1) = \mathbf{W}(t) + \eta e(t_1, t_2) \mathbf{c}_1(t_1) \mathbf{c}_2^T(t_2) \quad (10)$$

其中 η 为学习率, 且 $0 < \eta < 1$ 。

3.2 神经网络收敛性定理

定理 1 当学习率取为 $0 < \eta < 2/((n_1+1)(n_2+1))$ 时, 该神经网络算法是收敛的, 其中 $(n_1+1)(n_2+1)$ 是隐层神经元个数。

证明 设 t 对应训练样本 t_1, t_2 ; $t+1$ 对应下一个训练样本, 并设

$$\mathbf{c}(t) = [f_{00}, \dots, f_{0n_2}, \dots, f_{i0}, \dots, f_{in_2}, \dots, f_{n_10}, \dots, f_{n_1n_2}]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{W}' = [w_{00}, \dots, w_{0n_2}, \dots, w_{i0}, \dots, w_{in_2}, \dots, w_{n_10}, \dots, w_{n_1n_2}]^T \quad (12)$$

则式(6), 式(8), 式(9), 式(10)可改写为

$$H_d(t) = (\mathbf{W}')^T \mathbf{c}(t) \quad (13)$$

$$e(t) = M_d(t) - H_d(t) \quad (14)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{m_1 m_2 - 1} e^2(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{W}'(t+1) = \mathbf{W}'(t) + \eta e(t) \mathbf{c}(t) \quad (16)$$

取 Lyapunov 函数为 $V(t) = (1/2)e^2(t)$, 则有

$$\Delta V(t) = (1/2)e^2(t+1) - (1/2)e^2(t) \quad (17)$$

因为 $e(t+1) = e(t) + \Delta e(t) = e(t) + \left(\frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'}\right)^T \Delta \mathbf{W}'$, 而 $\Delta \mathbf{W}' =$

$-\eta e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'}$, 于是有

$$\Delta e(t) = -\eta e(t) \left(\frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'}\right)^T \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} = -\eta e(t) \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 \quad (18)$$

其中 $\|\bullet\|^2 = \sum |\bullet|^2$, 称为 Euclid 范数的平方。所以式(17)改写为

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &= \frac{1}{2} [e(t) + \Delta e(t)]^2 - \frac{1}{2} e^2(t) = \Delta e(t) \left[e(t) + \frac{1}{2} \Delta e(t) \right] \\ &= -\eta e(t) \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 \left[e(t) - \frac{1}{2} \eta e(t) \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 \right] \\ &= \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 e^2(t) \left(-\eta + \frac{1}{2} \eta^2 \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

由式(19)可知, 要使神经网络收敛, 必须有下式成立,

即 $-\eta + \frac{1}{2} \eta^2 \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 < 0$, 因 $\eta > 0$, 所以

$$0 < \eta < 2 / \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 \quad (20)$$

由式(13), 式(14)可得 $\frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} = \frac{\partial e(t)}{\partial H_d(t)} \frac{\partial H_d(t)}{\partial \mathbf{W}'} = -\mathbf{c}(t)$, 所以

$$\left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{W}'} \right\|^2 = \|\mathbf{c}(t)\|^2 = \|\mathbf{c}(t)\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |c_n(t)|^2, N = (n_1+1)(n_2+1)$$
。由

式(7)及式(11)可以证明 $0 \leq \sum_{n=0}^{N-1} c_n^2(t) \leq N = (n_1+1)(n_2+1)$ 。因

此, 由式(20)有: 当学习率 η 满足 $0 < \eta < 2/((n_1+1)(n_2+1))$ 时, 有 $\Delta V(t) < 0$, 从而本文讨论的神经网络算法是收敛的。

证毕

4 应用实例

例 1 设某期望的圆对称二维低通线性相位滤波器的幅频响应为

$$M_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq R \leq \omega_p \\ (\omega_a - R)/(\omega_a - \omega_p), & \omega_p \leq R \leq \omega_a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $R = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $\omega_p = 0.425\pi$, $\omega_a = 0.575\pi$ 。

用本文所介绍的方法设计阶数分别为 $(N, N) = (15, 15)$, $(19, 19)$, $(23, 23)$ 的线性相位 FIR 滤波器, 取学习率 $\eta = 1/(n+1)^2$, 其中 $n = (N-1)/2$, 并对 $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$ 的期望低通滤波器的幅频响应均匀取样 $[(N+1)/2] \times [(N+1)/2]$ 个点, 网络结构为 $1 \times [(N+1)/2]^2 \times 1$, 将取样序列送神经网络训练获得神经网络权值 \mathbf{W} , 从而获得滤波器系数。所设计的线性相位滤波器的通带和阻带的最大波动、该算法的 MATLAB 实现所需时间(CPU 为 Celeron735)见表 1。为方便比较, 表 1 中也列出了文献[11,12]所设计的滤波器的通带和阻带的最大波动及所需时间(CPU 为 Petium866)。显然, 用本文介绍的方法与用文献[11,12]介绍的方法设计的二维线性相位滤波器的效果相似, 但是本文介绍的方法的计算量要远小于文献[11,12]介绍的方法。图 2 和图 3 分别是阶数为(23,23)的圆对称二维线性相位 FIR 滤波器的幅频响应及幅频响应误差。

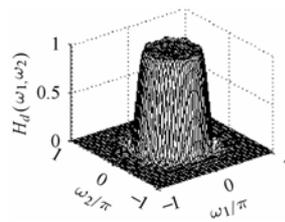


图 2 圆对称二维低通滤波器幅频响应

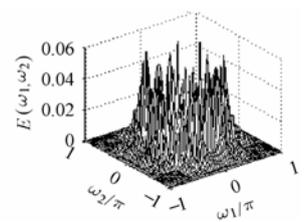


图 3 圆对称二维低通滤波器幅频响应误差

表1 本文算法设计的圆对称二维低通滤波器性能

N	本文算法最大波动		文献[11]算法最大波动		CPU 计算时间(s)		
	通带	阻带	通带	阻带	本文算法	文献[11]算法	文献[12]算法
15	0.1051	0.1074	0.0822	0.1115	0.171	10.47	53.01
19	0.0493	0.0551	0.0549	0.0830	0.220	20.34	102.47
23	0.0392	0.0558	0.0397	0.0578	0.371	39.22	199.62

例2 设某期望的矩形对称二维线性相位低通滤波器的幅频响应为

$$M_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega_1|, |\omega_2| \leq \omega_p \\ (\omega_a - |\omega_1|)/(\omega_a - \omega_p), & \omega_p < |\omega_1| < \omega_a, |\omega_2| \leq \omega_p \\ (\omega_a - |\omega_2|)/(\omega_a - \omega_p), & \omega_p < |\omega_2| < \omega_a, |\omega_1| \leq \omega_p \\ (\omega_a - |\omega_1|)(\omega_a - |\omega_2|)/(\omega_a - \omega_p)^2, & \omega_p < |\omega_1| < \omega_a, \omega_p < |\omega_2| < \omega_a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\omega_p = 0.425\pi$, $\omega_a = 0.575\pi$ 。

设计与例1相同。所设计的线性相位滤波器的通带与阻带的最大波动、该算法的 MATLAB 实现所需时间(CPU 为 Celeron735)见表2。显然,设计的矩形对称二维线性相位滤波器的通带波动与圆对称二维线性相位滤波器类似,但是其阻带波动远小于圆对称二维线性相位滤波器。图4和图5分别是阶数为(19,19)的矩形对称二维线性相位 FIR 滤波器的幅频响应及幅频误差。

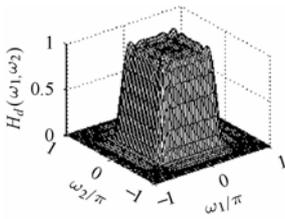


图4 矩形对称二维低通滤波器幅频响应

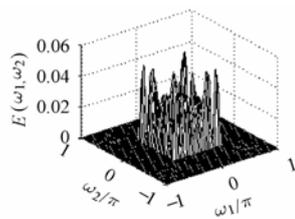


图5 矩形对称二维低通滤波器幅频响应误差

表2 本文算法设计的矩形二维低通滤波器性能

N	最大波动		CPU 计算时间(s)
	通带	阻带	
15	0.2264	0.0114	0.101
19	0.0549	0.0020	0.161
23	0.0251	0.0019	0.241

设计结果表明,用本文的神经网络算法设计的二维FIR线性相位滤波器,得到的滤波器系数明显优于窗函数法和变

换设计法,且当学习率取为 $\eta = 1/[(n_1 + 1)(n_2 + 1)]$ 时,该神经网络算法收敛速度极快,计算量极小,与基于加权的最小二乘设计法^[5,9]及半确定规划(semidefinite programming)设计法^[11]相比,所用计算量少近两个数量级,尤其在设计高阶滤波器时,这种优越性更加明显。

5 结束语

本文提出一种有效的基于神经网络的二维线性相位 FIR 数字滤波器优化设计方法。通过对 $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$ 的期望滤波器的幅频响应均匀取样获得训练样本值,再将训练样本值送神经网络训练,获得神经网络数值 \mathbf{W} ,从而得到二维线性相位数字滤波器系数 $\hat{\mathbf{H}}$ 。由文中的两个实例可以看出,用该方法设计的圆对称二维低通线性相位 FIR 数字滤波器和矩形对称二维低通线性相位 FIR 数字滤波器,通带和阻带范围波动小,计算量非常小;如果学习率满足本文提出的收敛定理,则可以保证设计出来的二维数字滤波器在 $\omega_1, \omega_2 \in [-\pi, \pi]$ 内总是稳定的。

参考文献

- [1] Huang T S. Two-dimensional windows[J]. *IEEE Trans.on Audio Electroacoust*, 1972, 20(3): 80 – 90.
- [2] Speake T C, Mersereau R M. A note on the use of windows for 2-D filter design[J]. *IEEE Trans. on ASSP*, 1981, 29(2): 125 – 127.
- [3] Mersereau R M, et al.. McClellan transformations for 2-D digital filtering[J]. *IEEE Trans.on Circuits Syst. I*, 1976, 3(7): 405 – 413.
- [4] Nguyen D T, Swamy M N S. Formulas for parameters scaling in the McClellan transform[J]. *IEEE Trans.on Circuits Syst.*, 1986, 33 (1): 108 – 109.
- [5] Algazi V R, et al.. Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques[J]. *IEEE Trans.on Circuits Syst.*, 1986, 33 (6): 590 – 596.
- [6] Hsieh C H, Kuo C M, Jou Y D, et al.. Design of two-dimensional

- FIR digital filters by a two- dimensional WLS technique[J]. *IEEE Trans.on Circuits Syst. II*, 1997, 44 (5): 348 – 412.
- [7] Charalambous C. The performance of an algorithm on minimax design of two- dimensional linear phase FIR filters[J]. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, 1985, 32(10): 1016 – 1028.
- [8] Lang M, Selesnick I W, Burrus C S. Constrained least squares design of 2-D FIR filters[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44 (5): 1234 – 1241.
- [9] Tseng Chien-Cheng. Design of 1-D and 2-D variable fractional delay allpass filters using weighted least-square method[J]. *IEEE Trans. on Circuits Syst. I*, 2002, 49 (10): 1413 – 1422.
- [10] Zhu W P, Ahmad M O, Swamy M N S. A closed form solution to the least square design problem of 2-D linear phase FIR filters[J]. *IEEE Trans. on Circuits Syst. II*, 1997, 12 (44): 1032 – 1039.
- [11] Lu W S. Aunified approach for the design of 2- D digital filters via semidefinite programming[J]. *IEEE Trans.on Circuits Syst. I*, 2002, 49 (6): 814 – 825.
- [12] Charalambous C. The performance of an algorithm on minimax design of two- dimensional linear phase FIR filters[J]. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, 1985, 32 (10): 1016 – 1028.
- 王小华: 男, 1968 年生, 副教授, 博士生, 研究方向为数字滤波器设计、信号检测与信号处理、神经网络理论与应用等.
- 何怡刚: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 博士, 研究方向为模数集成电路、模数电路故障诊断、信号处理、神经网络理论与应用等.