

重建一维多层媒质的时域信号流图法*

崔铁军 梁昌洪

(西安电子科技大学, 西安 710071)

摘要 本文首次提出重建多层媒质的时域信号流图法。通过多层媒质的等效网络, 引出时域信号流图的概念, 建立其使用法则。借此分析了多层媒质的时域反射机理, 并给出重建方法。

关键词 多层媒质; 重建; 时域信号流图; 时域反射; 逆散射

一、引言

目前, 逆散射技术的应用非常广泛, 因此, 国际上众多学者对逆散射问题表现出越来越浓厚的兴趣, 并相应地建立起许多不同的研究方法^[1-4]。尤其是一维媒质层的重建问题, 其理论和方法均已趋于成熟, 如 Gal'fand-Levitan 法、Balanis 法等^[1]。但这些方法比较适合于连续媒质层。

当所研究的媒质是多层媒质时, 其时域反射系数应该是一系列反射脉冲^[3-4]。如果再使用上述方法, 重建结果将有某些缺陷^[1]。如何较理想地解决这个问题, 不仅有重要的理论意义, 而且对探地、测矿等均有十分广泛的应用价值。

本文所介绍的重建一维多层媒质方法, 是根据媒质的等效网络, 提出时域信号流图的概念和法则, 并借此成功地分析了时域反射系数的脉冲反射特性。利用这些性质, 建立起多层媒质的反演方法。最后, 文中给出了重建实例。

二、多层媒质的等效网络和时域信号流图

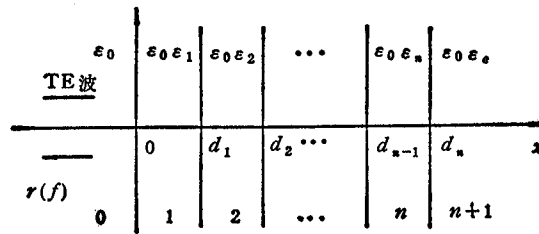
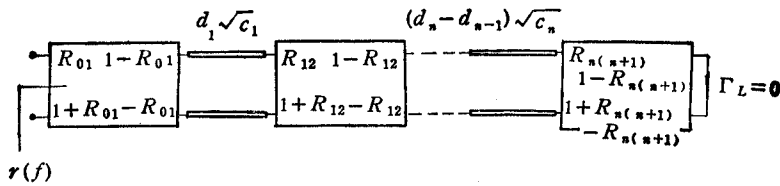
设所研究的多层媒质为 n 层媒质, 其相对介电常数和层坐标分别为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, $\epsilon_{n+1} = \epsilon_0$; $d_1, d_2, \dots, d_n$; 导磁率均为 μ_0 ; 入射波是平面波, 由自由空间垂直入射, 如图 1 所示。

根据数学归纳法, 很容易证明上述 n 层媒质的等效网络如图 2 所示, 且其反射系数与等效网络的输入反射系数完全相同^[3-4]。图中

$$\begin{aligned} R_{01} &= (1 - \sqrt{\epsilon_1}) / (1 + \sqrt{\epsilon_1}) \\ R_{m(m+1)} &= (\sqrt{\epsilon_m} - \sqrt{\epsilon_{m+1}}) / (\sqrt{\epsilon_m} + \sqrt{\epsilon_{m+1}}), \quad (m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

1991.05.16 收到, 1991.09.26 定稿。

* 国防科工委和机电部电子科学研究院基金资助课题。

图1 平面波垂直照射— n 层媒质图2 n 层媒质的等效网络(图中的 c_1, c_n 应为 s_1 和 s_n)

为方便地分析多层媒质的时域反射特性,我们在频域基础上,利用 Fourier 变换性质和卷积定理,将信号流图推广到时域,即引出时域信号流图的概念,其使用法则列于表 1. 其中, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $W(t)$ 分别是 $a_1(f)$, $a_2(f)$, $p(f)$, $q(f)$, $w(f)$ 的 Fourier 变换,“*”表示卷积.

表1 频域、时域信号流图的基本法则及其比较

频域信号流图		时域信号流图	
串行相乘	$a_1(f) \xrightarrow{p(f)} a_2(f)$ $a_2(f) = p(f)q(f)a_1(f)$	串行卷积	$A_1(t) \xrightarrow{P(t)} A_2(t)$ $A_2(t) = P(t) * Q(t) * A_1(t)$
并行相加	$a_1(f) \xrightarrow{p(f)} a_2(f)$ $a_2(f) = [p(f) + q(f)]a_1(f)$	并行相加	$A_1(t) \xrightarrow{P(t)} A_2(t)$ $\hat{A}_2(t) = [P(t) + Q(t)] * A_1(t)$
消环法则	$a_1(f) \xrightarrow{p(f)} a_2(f)$ $a_2(f) = a_1(f) \frac{p(f)q(f)}{1-w(f)}$ $= a_1(f) p(f) q(f) [1 + w(f) + w^2(f) + \dots]$	环路法则	$A_1(t) \xrightarrow{P(t)} A_2(t)$ $A_2(t) = A_1(t) * P(t) * Q(t) * [1 + W(t) + W(t) * W(t) + \dots]$

三、多层媒质的时域反射系数和反射机理

在获得多层媒质的等效网络后,我们用时域信号流图来求时域反射系数.

1. 单层媒质

根据单层媒质的等效网络,可得其时域信号流图如图 3 所示. 图中

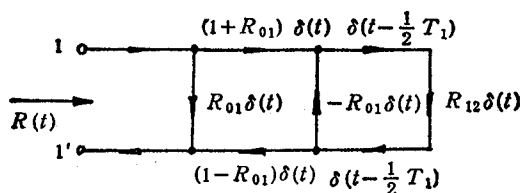


图3 单层媒质的时域信号流图

$$T_1 = 2d_1 \sqrt{\epsilon_1}/c, \quad (c \text{ 为光速}) \quad (2)$$

根据时域信号流图的基本法则, 易得

$$R(t) = R_{01}\delta(t) + (1 - R_{01}^2)R_{12}\delta(t - T_1) + (1 - R_{01}^2)R_{12}^2(-R_{01})\delta(t - 2T_1) + (1 - R_{01}^2)R_{12}^2R_{01}R_{12}\delta(t - 3T_1) + \dots \quad (3)$$

将(3)式与直接由 $r(f)$ 经 Fourier 变换所得的 $R(t)$ 比较^[4], 二者是完全相同的。注意, 后者在频域内利用了 $r(f)$ 的周期性, 使在有限频带内, 得到了 $R(t)$ 的理想 δ 脉冲。

2. 双层媒质

由双层媒质的等效网络, 可得其时域信号流图如图4所示。其中

$$T_1 = 2d_1 \sqrt{\epsilon_1}/c, \quad T_2 = 2(d_2 - d_1) \sqrt{\epsilon_2}/c \quad (4)$$

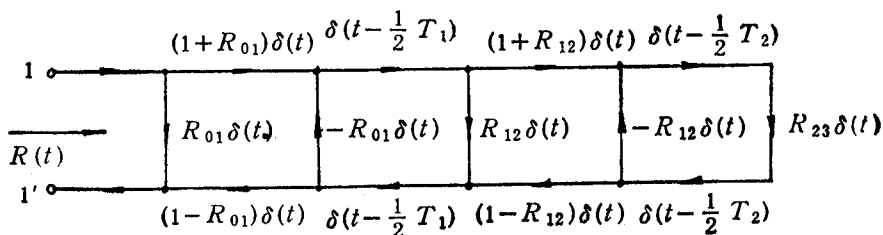


图4 双层媒质的时域信号流图

由图4可得

$$\begin{aligned} R(t) = & R_{01}\delta(t) + (1 - R_{01}^2)R_{12}\delta(t - T_1) + (1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2)R_{23}\delta(t - T_1 - T_2) \\ & + (1 - R_{01}^2)R_{12}^2(-R_{01})\delta(t - 2T_1) + (1 - R_{01}^2)R_{12}^2R_{01}R_{12}\delta(t - 3T_1) + \dots \\ & + 2(1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2)(-R_{01})R_{12}R_{23}\delta(t - 2T_1 - T_2) + 3(1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2) \\ & \times R_{01}^2R_{12}^2R_{23}\delta(t - 3T_1 - T_2) + \dots + (1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2)R_{23}^2(-R_{12})\delta(t - T_1 \\ & - 2T_2) + (1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2)R_{23}^2R_{12}R_{23}\delta(t - T_1 - 3T_2) + \dots \\ & + (1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2)^2R_{23}^2(-R_{01})\delta(t - 2T_1 - 2T_2) + \dots + 2(1 - R_{01}^2) \\ & \times (1 - R_{12}^2)R_{23}^2(-R_{12})R_{12}(-R_{01})\delta(t - 2T_1 - 2T_2) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式给出了一般双层媒质的时域反射系数闭式解。如果直接求 $r(f)$ 的 Fourier 变换, 此式很难获得。

对于三层或 n 层媒质, 依照上述步骤同样可以得到 $R(t)$ 的解析解。为验证所得结果的正确性, 表2列出了双层、三层媒质时域反射系数的解析解与 $r(f)$ 经离散 Fourier 变

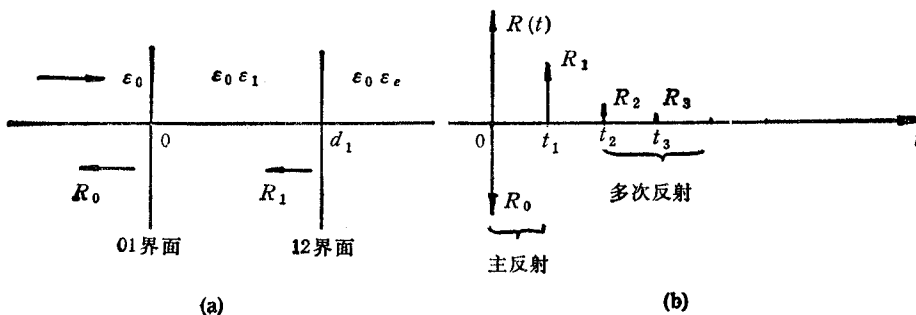
换 (FFT) 后数值结果的比较。可见,二者十分吻合。

表 2 双层媒质、三层媒质的时域反射系数

$n = 2$			$n = 3$		
$\varepsilon_1 = 4 \quad \varepsilon_2 = 16 \quad \varepsilon_3 = 2$ $d_1 = 0.5 \quad d_2 = 1.0$			$\varepsilon_1 = 4 \quad \varepsilon_2 = 16 \quad \varepsilon_3 = 36 \quad \varepsilon_4 = 4$ $d_1 = 0.5 \quad d_2 = 1.0 \quad d_3 = 1.5$		
时间(ct)	分析结果	FFT 结果	时间(ct)	分析结果	FFT 结果
0	-0.333333	-0.333333	0	-0.333333	-0.333333
2	-0.296296	-0.296296	2	-0.296296	-0.296296
4	0.032922	0.032922	4	0.032922	0.032922
6	0.373699	0.373699	6	-0.161683	-0.161683
8	-0.083451	-0.083451	8	0.035523	0.035523
10	0.074005	0.074005	10	0.004637	0.004637
12	0.038381	0.037984	12	0.387155	0.387155
14	-0.009564	-0.005724	14	-0.085103	-0.087834

根据以上分析,我们知道对于多层媒质,其时域反射系数是一系列反射脉冲。为进一步弄清这些脉冲与介质参数的关系,我们研究其时域反射机理。

首先,从讨论单层媒质入手。如图 5(a),当平面波垂直入射时,在 01 界面、12 界面将产生两个主反射: $t_0 = 0$, $R_0 = R_{01}$ 和 $t_1 = T_1$, $R_1 = (1 - R_{01}^2) R_{12}$ (对应于信号流图中由 1 直接到达 1' 的路值),而 R_1 在两个界面间又产生多次反射: $t = 2T_1$, $R = (1 - R_{01}^2) R_{12} (-R_{01}) \cdots$ (对应于信号流图中由 1 经多阶环到达 1' 的路值),从时间上看,多次反射一定发生在主反射之后,如图 5(b) 所示。



(a) 单层媒质 (b) 主反射和多次反射

图 5 单层媒质及其主反射和多次反射

同样,对 n 层媒质(如图 1),在 01 界面,12 界面, ..., $n(n+1)$ 界面将产生 $n+1$ 个主反射:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= 0, & R_0 &= R_{01} \\ t_1 &= T_1, & R_1 &= (1 - R_{01}^2)R_{12} \\ \dots & & \dots & \\ t_n &= T_1 + T_2 + \dots + T_n, & R_n &= (1 - R_{01}^2)(1 - R_{12}^2) \cdots [1 - R_{(n-1)n}^2]R_{n(n+1)} \end{aligned} \right\} (6)$$

式中

$$T_1 = 2d_1\sqrt{\varepsilon_1}/c, \quad T_m = 2(d_m - d_{m-1})\sqrt{\varepsilon_m}/c, \quad (m = 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

多次反射从略。

通过研究时域信号流图, 我们发现主反射 R_0, R_1 不会受多次反射的影响; 由于第二层主反射 R_2 可能与第一层内的多次反射发生在同一时刻, 故 R_2 可能要受第一层多次反射的影响; 第三层主反射 R_3 可能要受到前两层多次反射的影响; ……; 第 n 层主反射 R_n 可能要受到前 $n-1$ 层多次反射的影响, 如图 6 所示。

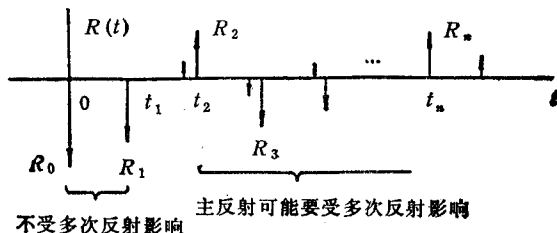


图 6 n 层媒质的主反射和多次反射

四、多层媒质的重建

在重建多层媒质的介质参数时, 已知的是反射系数 $r(f)$ 或 $R(t)$ 。若是前者, 经 Fourier 变换即得 $R(t)$ 。我们的目的是根据 $R(t)$ 的反射脉冲特性逐层重建 ε_m, d_m 。

应该指出, 主反射、多次反射中均包含有媒质信息, 但是前者绝对值较大, 即使有微小误差也无关大局; 同时, 其公式简单, 可以导出介电常数和层坐标的显式。由(6), (7)和(1)式容易推得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1 - R_0)^2 / (1 + R_0)^2 \\ \varepsilon_{m+1} &= \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m - R_m}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m + R_m} \right)^2 \varepsilon_m, \quad (m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= ct_1 / (2\sqrt{\varepsilon_1}) \\ d_m &= d_{m-1} + c(t_m - t_{m-1}) / (2\sqrt{\varepsilon_m}), \quad (m = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(8)式中

$$\alpha_m = 4\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_{m-1}} / (\sqrt{\varepsilon_m} + \sqrt{\varepsilon_{m-1}})^2 \quad (10)$$

但是, 多次反射有时干扰了主反射, 所以先要把主反射中的干扰除去。由上一节的分析知道, $(t_0, R_0), (t_1, R_1)$ 永远不受多次反射的影响, 因此由(8), (9), (10)式可重建出第一层的媒质参数 $\varepsilon_1, d_1, \varepsilon_2$; 用 $R(t)$ 减去第一层媒质的反射结果(这部分可由 $\varepsilon_1,$

d_1, ε_2 根据正问题求出), 就暴露出第二层媒质的主反射, 进而反演出 $\varepsilon_3, d_2; \dots$; 依此类推, 直到 $R(t)$ 减去前 n 层媒质的反射结果等于零为止。

五、重建举例

例 1 已知某待重建媒质的频域反射系数如图 7 所示, 试重建此媒质层参数。
首先, 将 $r(f)$ 作快速 Fourier 变换 (FFT), 得时域反射系数 $R(t)$ 如下:

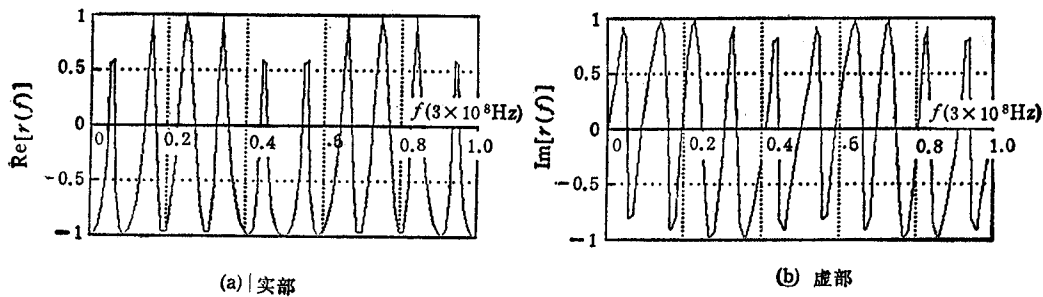


图 7 未知媒质层(例 1)的频域反射系数

时间 (ct)	$R(t)$	时间 (ct)	$R(t)$	时间 (ct)	$R(t)$
0	-0.333333	2	-0.296296	4	0.032922
6	-0.003658	8	0.000406	10	-0.790169
...	...	...	...	...	...

即 $R(t)$ 是一系列反射脉冲。由此可判断媒质为多层媒质。具体地, $R_0 = -0.333333$, $R_1 = -0.296296$, $ct_1 = 2$, 代入(8),(9)两式, 得

$$\varepsilon_1 = 4.00000, \quad \varepsilon_2 = 16.00000, \quad d_1 = 0.50000 \quad (10)$$

根据(10)式所列参数, 可计算出第一层媒质的主反射和多次反射为

时间 (ct)	$R_1(t)$	时间 (ct)	$R_1(t)$	时间 (ct)	$R_1(t)$
0	-0.333333	2	-0.296296	4	0.032922
6	-0.003658	8	0.000406	10	-0.000045
...	...	...	...	...	...

用 FFT 结果 $R(t)$ 减去上述结果 $R_1(t)$, 得

时间 (ct)	$R(t) - R_1(t)$	时间 (ct)	$R(t) - R_1(t)$	时间 (ct)	$R(t) - R_1(t)$
0	0.0	2	0.0	4	0.0
6	0.0	8	0.0	10	-0.790124
...	...	...	...	...	...

由此可知第二层的主反射为: $ct_2 = 10$, $R_2 = -0.790124$ 。将它代入(8),(9)式, 有

$$\varepsilon_3 \rightarrow \infty, \quad d_2 = 1.50000 \quad (11)$$

根据(10),(11)两式可计算出前两层媒质的主反射和多次反射 $R_2(t)$ 。用 FFT 结果 $R(t)$

与之相减恰好为零,说明此媒质就是双层媒质。具体参数为

$$\varepsilon_1 = 4.0, \quad d_1 = 0.5; \quad \varepsilon_2 = 16.0, \quad d_2 = 1.5.$$

背景媒质是理想导体。

例 2 已知某待重建媒质的频域反射系数如图 8 所示;经过 FFT 后,所得时域反射系数 $R(t)$ 示于图 9。可见, $R(t)$ 是一系列反射脉冲,此媒质为多层媒质。

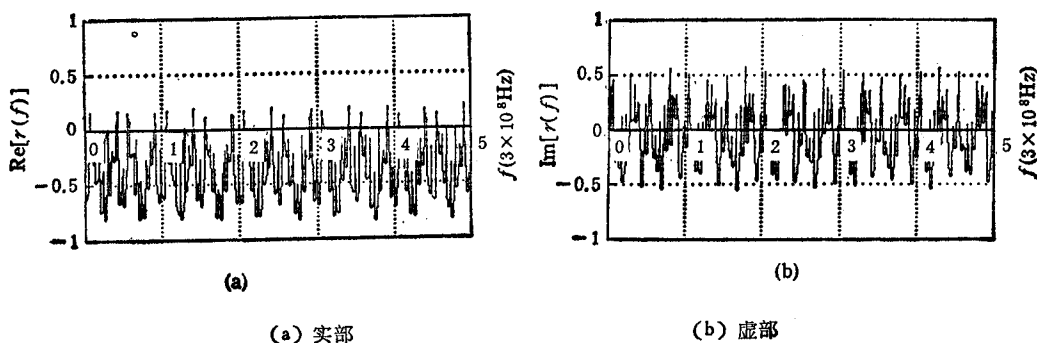


图 8 未知媒质层(例 2)的频域反射系数

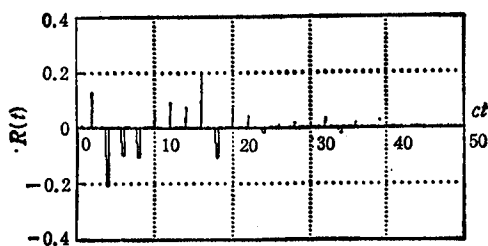


图 9 未知媒质层(例 2)的时域反射系数

按照与例 1 同样的步骤,可重建出此媒质层的参数为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= 4, & d_1 &= 0.5000001; & \varepsilon_2 &= 2.250001, & d_2 &= 1.166667; \\
 \varepsilon_3 &= 6.250007, & d_3 &= 1.566667; & \varepsilon_4 &= 9.000019, & d_4 &= 1.90; \\
 \varepsilon_5 &= 16.00005, & d_5 &= 2.15; & \varepsilon_6 &= 12.25004, & d_6 &= 2.435714; \\
 \varepsilon_7 &= 9.000017, & d_7 &= 2.769047; & \varepsilon_8 &= 6.250001, & d_8 &= 3.169047; \\
 \varepsilon_9 &= 2.249992, & d_9 &= 3.835715; & \varepsilon_{10} &= 3.999953, & d_{10} &= 4.335718; \\
 \varepsilon_{11} &= 1.999979
 \end{aligned}$$

即媒质(例 2)为 10 层媒质。

六、结 语

本文用时域信号流图法分析了多层媒质的时域反射机理,并由此建立了重建方法。计算结果表明,本文方法是有效的。

参 考 文 献

- [1] 葛德彪, 电磁逆散射原理, 西北电讯工程学院出版社, 西安, 1987年.
- [2] T. Uno, S. Adachi, Electromagnetic inverse scattering method for one-dimensional inhomogeneous layered media, Proc. ISAP. Vol. III, (1985), pp. 887—890.
- [3] 崔铁军, 梁昌洪, 西安电子科技大学学报, 17 (1990) 3, 44—53.
- [4] 崔铁军, 重建一维多层介质的新理论——时域信号流图法, 西安电子科技大学硕士论文, 西安, 1989年12月.

RECONSTRUCTION OF ONE-DEMENSIONAL MULTIPLE-LAYERED MEDIUM USING A TIME-DOMAIN SIGNAL-FLOWGRAPH TECHNIQUE

Cui Tiejun Liang Changhong

(Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract A new method to reconstruct multiple-layered medium is first proposed by using a time-domain signal-flow graph (TDSFG) technique. With the equivalent network of the medium, a concept of TDSFG is given, and its rules are derived. Furthermore, the reflection principles in time domain are analysed, and a reconstruction method is established.

Key words Multiple-layered medium; Reconstruction; TDSFG; Time domain reflection; Inverse scattering