

余弦调制滤波器组的时频分析的等价性及其应用¹

潘兴德 郭 军

(北京邮电大学信息工程学院 北京 100876)

摘 要 该文通过证明 TDAC 余弦调制滤波器组时域和频域分析的 PR 条件的等价性,建立了 TDAC 和 CMF 分析技术的内在联系,并针对音频信号处理中往往根据人耳听觉的临界子带特性对信号进行非等带宽滤波,运用已有的一种 CMF 非等带宽余弦调制滤波器组构造技术构造了一个 TDAC 非等带宽余弦调制滤波器组。

关键词 时域混叠消除,余弦调制滤波器组,非等带宽滤波器组,音频编码

中图分类号 TN713

1 引 言

近些年来,余弦调制滤波器组以其设计和计算简单的优点,获得了在音频、静止图像和视频压缩方面广泛的应用,比较成功的基于余弦调制滤波器组的压缩算法有 MP3、Dolby AC-3 和 MPEG AAC 等。

自从调制滤波器出现伊始,该技术的研究方法就清晰地分为两大阵营:时域分析的时域混叠抵消 (TDAC, Time Domain Aliasing Cancellation)^[1-5] 和频域分析的余弦调制滤波器 (CMF, Cosine Modulated Filter)^[6-11]。在某种程度上,这种研究方法的分离给一般的研究和应用带来了许多不必要的障碍。例如,由于两种分析方法的出发点不同,因此,在滤波器组的具体实现形式上,往往存在一些差别。那么一种方法的结论是否在另一种方法中有相应的体现?如何确立这种联系?这些工作,虽然有学者曾经作过一些探索,但到目前为止,还没有将两者真正的在理论上结合起来。这里,我们通过证明 TDAC 余弦调制滤波器组时域和频域分析的 PR 条件的等价性,建立了 TDAC 和 CMF 分析技术的内在联系,然后运用 CMF 分析技术构造 TDAC 非等带宽余弦调制滤波器组。

2 TDAC 余弦调制滤波器组及其完全重构条件

TDAC 余弦调制滤波器组的冲击响应为^[1-3,11] :

$$k_k(n) = p_a(n) \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \left[\frac{\pi}{M} (k + 0.5) \left(n + \frac{M+1}{2} \right) \right] \quad (1)$$

$$f_k(n) = p_s(n) \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \left[\frac{\pi}{M} (k + 0.5) \left(n + \frac{M+1}{2} \right) \right] \quad (2)$$

其中 $0 \leq k < M-1$, $0 \leq n < 2KM-1$, K 为大于零的整数; $p_a(n)$ 和 $p_s(n)$ 分别为分析窗和综合窗。

当分析窗和综合窗相等,即

$$p_a(n) = p_s(n) \quad (3)$$

时,由 (1) 式和 (2) 式表示的余弦调制滤波器组为正交滤波器组,此时矩阵 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{F}([\mathbf{H}]_{n,k} = h_k(n), [\mathbf{F}]_{n,k} = f_k(n))$ 为正交变换矩阵。为获得线性相位滤波器,进一步规定对称窗

$$p_a(2KM-1-n) = p_a(n) \quad (4)$$

¹ 2002-01-28 收到, 2002-07-04 改回

则为满足完全重构, 由文献 [3] 可知, 分析窗和综合窗需满足

$$\sum_{m=0}^{2K-1-2s} p_a(mM+n)p_a((m+2s)M+n) = \delta(s) \quad (5)$$

其中 $s = 0, \dots, K-1$, $n = 0, \dots, M/2-1$.

放宽 (3) 式的约束条件, 即取消分析窗和综合窗相等的限制, 则余弦调制滤波器组为双正交调制滤波器组. 双正交调制滤波器组虽然丢失了变换的正交性, 但有可能获得其他更有实际意义的性能.

时域分析已经证明, 只要

$$\sum_{m=0}^{2K-1-2s} p_s(mM+n)p_a((m+2s)M+n) = \delta(s) \quad (6)$$

$$\sum_{m=0}^{2K-1-2s} (-1)^m p_s(mM+n)p_a((m+2s)M+(M-n-1)) = 0 \quad (7)$$

其中 $s = 0, \dots, K-1$, $n = 0, \dots, M-1$. (1) 式和 (2) 式获得的双正交调制滤波器组依然满足完全重构性能.

3 TDAC 余弦调制滤波器组完全重构条件的时频分析的等价性

设分析滤波器组、转置综合滤波器组和延迟链用如下向量表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(z) &= [H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)]^T \\ \mathbf{f}(z) &= [F_0(z), F_1(z), \dots, F_{M-1}(z)]^T \\ \mathbf{e}(z) &= [1, z^{-1}, \dots, z^{-(M-1)}]^T \end{aligned} \quad (8)$$

并假设 $\mathbf{g}_i(z)$ 是对角矩阵, 且对角线上的元素:

$$[\mathbf{g}_0(z)]_{kk} = G_k(-z), \quad [\mathbf{g}_1(z)]_{kk} = G_{M+k}(-z) \quad (9)$$

我们可将分析滤波器组表示成多相形式:

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{E}(z^M)[1, z^{-1}, \dots, z^{-(M-1)}]^T = \mathbf{E}(z^M)\mathbf{e}(z) \quad (10)$$

其中 $\mathbf{E}(z) = \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(z^2) \\ z^{-1}\mathbf{g}_1(z^2) \end{bmatrix}$ 为分析多相矩阵, $\mathbf{T}_1$ 为分析 $M \times 2MDCT$ 调制矩阵.

同样, 综合多相矩阵 $\mathbf{R}(z)$ 可以写成 $\mathbf{R}(z) = [z^{-1}\mathbf{k}_1(z^2) \quad \mathbf{k}_0(z^2)]\mathbf{T}_2^T$ 的形式, 其中对角矩阵 $[\mathbf{k}_0(z)]_{kk} = \mathbf{K}_{M-1-k}(-z)$, $[\mathbf{k}_1(z)]_{kk} = \mathbf{K}_{2M-1-k}(-z)$, $\mathbf{T}_2$ 为综合 $M \times 2MDCT$ 调制矩阵. 由 (1) 和 (2) 式表示的余弦调制滤波器组的分析和综合调制矩阵为

$$[\mathbf{T}_1]_{kl} = [\mathbf{T}_2]_{kl} = \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \left[\frac{\pi}{M} (k+0.5) \left(n + \frac{M+1}{2} \right) \right], \quad 0 \leq k \leq M-1, \quad 0 \leq l \leq 2M-1 \quad (11)$$

综合滤波器组的多相形式为

$$\mathbf{f}^T(z) = [z^{-(M-1)}, z^{-(M-2)}, \dots, 1]\mathbf{R}(z^M) \quad (12)$$

至此, 系统的多相传递矩阵 $\mathbf{P}(z) = \mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z)$ 有

$$\mathbf{P}(z) = [z^{-1}\mathbf{k}_1(z^2) \quad \mathbf{k}_0(z^2)]\mathbf{T}_2^T\mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(z^2) \\ z^{-1}\mathbf{g}_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (13)$$

我们先求 $\mathbf{T}_2^T\mathbf{T}_1$

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_2^T\mathbf{T}_1]_{i,j} &= \sum_{k=0}^{M-1} [\mathbf{T}_2^T]_{i,k} [\mathbf{T}_1]_{k,j} = \sum_{k=0}^{M-1} [\mathbf{T}_2]_{k,i} [\mathbf{T}_1]_{k,j} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \left[\frac{\pi}{M}(k+0.5) \left(i + \frac{M+1}{2} \right) \right] \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2}{M}} \cos \left[\frac{\pi}{M}(k+0.5) \left(j + \frac{M+1}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2M} \left[W_{2M}^{-(k+0.5)[i+(M+1)/2]} + W_{2M}^{(k+0.5)[i+(M+1)/2]} \right] \\ &\quad \times \left[W_{2M}^{-(k+0.5)[j+(M+1)/2]} + W_{2M}^{(k+0.5)[j+(M+1)/2]} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2M} \left[W_{2M}^{-(k+0.5)(i+j+M+1)} + W_{2M}^{(k+0.5)(i+j+M+1)} \right. \\ &\quad \left. + W_{2M}^{-(k+0.5)(i-j)} + W_{2M}^{(k+0.5)(i-j)} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $W_{2M} = e^{-j2\pi/(2M)} = e^{-j\pi/M}$.

设 $k = 2M - 1 - k_1$, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(k+0.5)(i+j+M+1)} + \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{(k+0.5)(i+j+M+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(k+0.5)(i+j+M+1)} + \sum_{k_1=M}^{2M-1} W_{2M}^{-(k_1+0.5)(i+j+M+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{2M-1} W_{2M}^{-(k+0.5)(i+j+M+1)} \\ &= \begin{cases} (-1)^\lambda 2M, & i+j+M+1 = \lambda \times 2M \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

由式 $i+j+M+1 = \lambda \times 2M$, 且 $0 \leq i, j \leq 2M-1$, 我们可得 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 2$. 因此

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(k+0.5)(i+j+M+1)} + \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{(k+0.5)(i+j+M+1)} \\ &= 2M[-\delta(i, M-1-i) + \delta(i, 3M-1-i)] \end{aligned} \quad (16)$$

同样的, 可以得到

$$\sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(k+0.5)(i-j)} + \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{(k+0.5)(i-j)} = \sum_{k=0}^{M-1} W_{2M}^{-(k+0.5)(i-j)} = 2M\delta(i, i) \quad (17)$$

$T_2^T T_1$ 可用矩阵形式表示为

$$T_2^T T_1 = I_{2M} + \begin{bmatrix} -J_M & 0 \\ 0 & J_M \end{bmatrix} \quad (18)$$

因此

$$P(z) = [z^{-1}k_1(z^2) \quad k_0(z^2)] \left[I_{2M} + \begin{bmatrix} -J_M & 0 \\ 0 & J_M \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} -g_0(z^2) \\ z^{-1}g_1(z^2) \end{bmatrix} = P_1(z) + P_2(z) \quad (19)$$

其中

$$P_1(z) = [z^{-1}k_1(z^2) \quad k_0(z^2)] \begin{bmatrix} -J_M & 0 \\ 0 & J_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g_0(z^2) \\ z^{-1}g_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$P_2(z) = [z^{-1}k_1(z^2) \quad k_0(z^2)] \begin{bmatrix} -g_0(z^2) \\ z^{-1}g_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (21)$$

由文献 [6] 可知, 要使分析和综合滤波器组组成的传递系统满足完全重构 (PR) 条件, $P(z)$ 必须满足

$$P(z) = cz^{-m_0} \begin{bmatrix} 0 & -I_{M-r} \\ z^{-1}I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq r \leq M-1 \quad (22)$$

且系统延迟 $D = (m_0 + 1)M + r - 1$ 。另外, 我们知道, 由 (1) 式和 (2) 式表示的余弦调制滤波器组系统延迟 $D = 2sM + d = 2(K-1)M + 2M - 1$ 。要使两者相等, 需有 $r = M, m_0 = 2(K-1)$, (22) 式可简化为

$$P(z) = cz^{-2K+1} I_M \quad (23)$$

由矩阵乘法性质可知, $P_1(z)$ 的非零元素在反对角线上, 而 $P_2(z)$ 的非零元素和 (23) 式中 $P(z)$ 的非零元素位置相同, 都在对角线上。且 $P_1(z)$ 的非零元素:

$$[P_1(z)]_{M-1-l,l} = -z^{-1}(K_{l+M}(-z^2)G_l(-z^2) - K_l(-z^2)G_{l+M}(-z^2)), \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (24)$$

$P_2(z)$ 的非零元素:

$$[P_2(z)]_{l,l} = z^{-1}(K_{2M-1-l}(-z^2)G_l(-z^2) - K_{M-1-l}(-z^2)G_{l+M}(-z^2)), \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (25)$$

为使系统满足 (23) 式, 必须有

$$[P_1(z)]_{M-1-l,l} = 0, \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (26)$$

和

$$[P_2(z)]_{l,l} = cz^{-2K+1}, \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (27)$$

由 (24)–(26) 和 (27) 式, 令 $z = -z^2$, 且 $K-1$ 为奇数时, $c = -1$; $K-1$ 为偶数时, $c = 1$ 。

我们有

$$K_{l+M}(z)G_l(z) - K_l(z)G_{l+M}(z) = 0, \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (28)$$

$$K_{2M-1-l}(z)G_l(z) - K_{M-1-l}(z)G_{l+M}(z) = z^{-(K-1)}, \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (29)$$

(28) 和 (29) 式就是由 (1) 和 (2) 式表示的余弦调制滤波器组 PR 条件。而 (6) 和 (7) 式分别是 (28) 和 (29) 式的时域表达式, 即两者是等价的。

对于正交余弦调制滤波器组, 因为 $K_l(z) = G_l(z)$, 因此, (28) 式成立, 且 (29) 式可重写为

$$G_{2M-1-l}(z)G_l(z) + G_{M-1-l}(z)G_{l+M}(z) = z^{-(K-1)}, \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (30)$$

根据滤波器理论, 在 (4) 式的对称条件下有线性相位约束:

$$G_k(z) = z^{-(K-1)}\tilde{G}_{2M-1-k}(k) \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (30) 式, 则 PR 条件 (28) 和 (29) 式可简化为

$$\tilde{G}_l(z)G_l(z) + \tilde{G}_{M+l}(z)G_{M+l}(z) = 1, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (32)$$

可以证明, 上式与 (5) 式是等价的。

至此, 我们证明, 由 (1) 和 (2) 式表示的余弦调制滤波器组, 其时域和频域分析所得的 PR 条件是完全等价的。

4 利用时、频分析的等价性构造不等带宽余弦调制滤波器组

在实际应用中, 往往要求滤波器组是非等带宽的。如在音频编码中, 需要充分利用人耳的掩蔽效应压缩音频信号。人类的听觉系统可以按频率分布划分出一个非等带宽的频带组合, 在各个频带范围内人耳对声音的敏感程度有明显的不同, 把这些频带范围称为临界子带 (critical subband)。而如何设计高性能的贴近临界子带的非等宽子带滤波器组, 以充分利用人耳的听觉特性去除音频信号的听觉冗余信息, 通常是音频编码方案最终成功与否的关键因素之一。

如文献 [8] 所述, 在一定的限制条件下, 通过将一定数量的相邻正交余弦调制滤波器的频率响应进行线性组合, 可以形成一组适用的非等带宽滤波器。同理, 根据 TDAC 余弦调制滤波器组完全重构条件的时、频分析的等价性, 我们可利用 TDAC 余弦调制滤波器组实现非等带宽余弦调制滤波器组。

图 1 为当 $M = 32$, $K = 1$, 且窗函数为正弦窗时, 由文献 [12] 所述方法构造的一个非等带宽 TDAC 余弦调制滤波器组的幅频响应和相频响应。其中非等带宽滤波器组由 20 个滤波器组成, 滤波器 17 和 18 的通带宽度为原始通带宽的二倍, 滤波器 19 的通带宽度为原始带宽的四倍, 滤波器 20 的通带宽度为原始带宽的八倍。在一定的精度下, 该非等带宽滤波器组具有一定的多分辨率分析能力, 具体请参见文献 [12]。

5 结 论

本文通过证明 TDAC 余弦调制滤波器组时域和频域分析的 PR 条件的等价性, 建立了 TDAC 和 CMF 分析技术的内在联系, 为充分运用两种技术的已有成果打下了坚实的理论基础。最后, 针对音频信号处理中往往根据人耳听觉的临界子带特性对信号进行非等带宽滤波, 运用已有的一种 CMF 非等带宽余弦调制滤波器组构造技术构造了一个 TDAC 非等带宽余弦调制滤波器组。

同时应该注意到, 对于其他类型余弦调制滤波器组, 我们同样可以运用类似技术将频域和时域分析充分结合起来, 从而为原型滤波器的设计、非等带宽滤波器组的设计和滤波器组的实现提供了更多的方便。

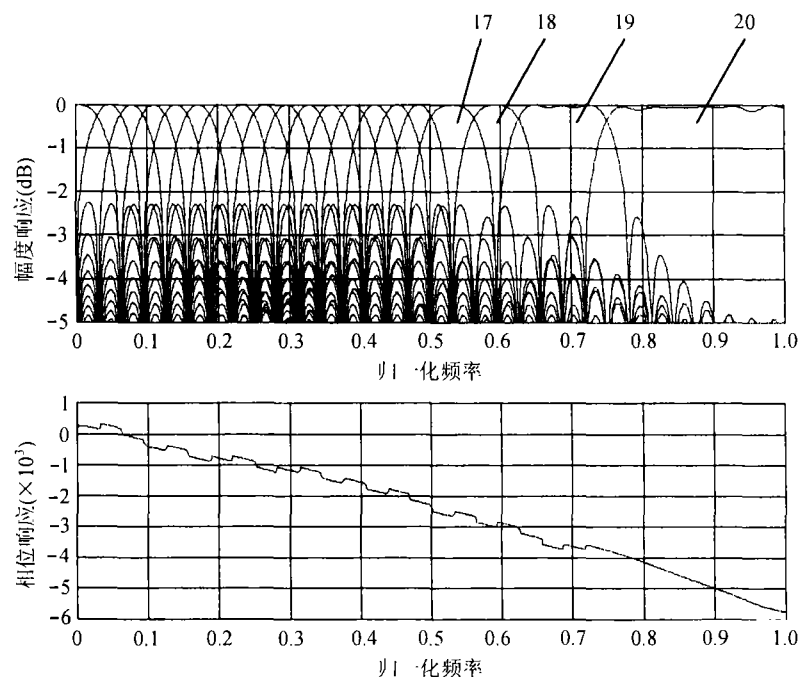


图 1 $M = 32$ 时的一个非等带宽 TDAC 余弦调制滤波器组的幅频响应和相频响应

参 考 文 献

- [1] H. S. Malvar, Biorthogonal and nonuniform lapped transforms for transform coding with reduced blocking and ringing artifacts, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, SP-46(4), 1043-1053.
- [2] H. S. Malvar, Lapped biorthogonal transforms for transform coding with reduced blocking and ringing artifacts, *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Munich, April 1997, 2421-2424.
- [3] S. F. Cheung, J. S. Lim, Incorporation of biorthogonality into lapped transforms for audio compression, *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Detroit, May 1997, 3079-3082.
- [4] J. Princen, A. W. Johnson, A. B. Bradley, Subband/transform coding using filter bank designs based on time domain aliasing cancellation, *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Dallas, April 1987, 2161-2164.
- [5] G. Smart, A. B. Bradley, Filter bank design based on time domain aliasing cancellation with non-identical windows, *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Adelaide(Australia), Apr., 1994, III185-III188.
- [6] P. P. Vaidynathan, *Multirate Systems and Filter Banks*[M], Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1993, 353-391.
- [7] T. D. Tran, Linear phase perfect reconstruction filter banks: Thoery, structure, design, and application in image compression, [Ph. D. thesis], University of Wisconsin, Madison, WI, May 1998.
- [8] J. J. Lee, B. G. Lee, A design of nonuniform cosine modulated filter banks, *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Anolog and Digital Signal Processing*, 1995, 42(11), 732-736.
- [9] P. N. Heller, T. Karp, T. Q. Nguyen, A general formulation of modulated filter banks, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, SP-47(4), 986-1002.

- [10] T. Karp, A. Mertins, G. Schuller, Recent trends in the design of biorthogonal modulated filter banks, In Proc. TICSP Workshop on Transforms and Filter Banks, Tampere, Finland, February, 1998. <http://webpages.acs.ttu.edu/tkarp/publications.html>
- [11] S. C. Chan, A. Nallanathan, T. S. Ng, C. K. Kwok, A class of m -channel linear-phase biorthogonal filter banks and their applications to subband coding, IEEE Trans. on Signal Processing, 1999, SP-47(2), 564–571.
- [12] X. D. Pan, J. Guo, The technology of multiresolution analysis based on cosine modulated filter bank, Proceeding of the Int. Conf. on Telecom, 2002, Vol. 1, Beijing, June 2002, 281–285.

THE EQUIVALENCE OF TIME-ANALYSIS AND FREQUENCY-ANALYSIS OF THE COSINE MODULATED FILTER BANK AND ITS APPLICATION

Pan Xingde Guo Jun

(Beijing University of Posts and Telecommunications BOX181, Beijing 100876, China)

Abstract Cosine Modulated Filter(CMF) bank is a kind of broadly used filter bank. By proving the equivalence of the Perfect Reconstruction(PR) conditions of time-analysis and frequency-analysis, the inherent relationship between Time Domain Aliasing Cancellation(TDAC) and CMF is found. By the means, the useful results of the two methods can be conveniently. Finally, a new kind of nonuniform filter bank is built based on TDAC which can be easily modified to audio coding in accord with psychoacoustics.

Key words TDAC, Cosine Modulated Filter(CMF) bank, Nonuniform filter bank, Audio coding

潘兴德: 男, 1973 年生, 博士生, 主要研究方向: 信号处理理论和算法, 感知信源编码技术.

郭 军: 男, 1959 年生, 教授、博士生导师, 研究方向: 模式识别, 智能信息处理等.