

## 基于二叉树搜索的小波变换信号压缩<sup>1</sup>

张 磊 潘 泉 张洪才 戴冠中

(西北工业大学自动控制系 西安 710072)

**摘 要** 正交离散小波变换由于缺乏平移不变性,会对信号压缩的性能造成很大的影响。为避免这一缺陷,该文在每个变换尺度上均对偶采样和奇采样的结果进行保留,产生一个二叉树结构,由此二叉树的任意一路径均可重构原信号,按照一定的准则可以确定最优分解路线。仿真结果表明,该变换方式较标准正交离散小波变换有更高的压缩性能。

**关键词** 小波变换, 信号压缩, 下采样

**中图分类号** TN911.72, O177.6

### 1 引 言

小波理论是近二十年来迅速发展成熟起来的一门学科,特别是 1988 年 Daubechies<sup>[1]</sup> 首次构造出了紧支撑正交小波,极大增强了其应用价值。紧接着, Cohen<sup>[2]</sup> 等又给出了可同时满足紧支撑和(反)对称要求的双正交小波。而 Mallat<sup>[3]</sup> 则将塔式分解结构和小波结合,使得小波变换的快速算法成为可能,这从实质上使小波得到了广泛使用<sup>[4-10]</sup>。

正交离散小波变换 (Orthogonal Discrete Wavelet Transform, ODWT) 在压缩编码中已得到广泛应用, Shapiro<sup>[6]</sup> 的小波零叉树图像压缩可以说是小波压缩方法的重大进步。ODWT 在形式上是一种子带分解,这使得其在信号压缩中较 DCT(离散余弦变换)更为有效。利用小波进行信号压缩的基本原理是信号的相邻采样点之间存在很强的相关性,而小波变换起到解除信号相邻点间相关性的作用,如果信号的某些部分的自相关性很强,就体现在相应的小波系数很小,可以对这些系数进行更有效的编码,从而达到压缩数据量的目的。一般来说,同 DCT 相比,在同样的压缩比下,用 ODWT 压缩的信号解码后更为清晰,细节更丰富,而在同样的信噪比下, ODWT 可取得更大的压缩比。

ODWT 的塔式快速分解算法见图 1,  $H$  和  $G$  为对应小波基的高通和低通滤波器,  $\bar{H}$  和  $\bar{G}$  为相应的共轭滤波器,向下的箭头表示下采样,向上的箭头表示上采样。由于有下采样的过程,这使得 ODWT 丧失了平移不变性,比如对信号  $Y(n)$  做一个尺度的分解,  $Y(n)$  分别和滤波器  $H$  和  $G$  卷积后,记对偶数位置点进行采样得到的小波系数为  $W_e$ ,对奇数点采样的小波系数为  $W_o$ ;对  $Y(n-1)$  做小波变换,对偶数位置的点进行采样,记为  $W'_e$ ,则  $W'_e$  与  $W_o$  除了有一个坐标点的位移外,是完全相同的,但  $W'_e$  与  $W_e$  却有可能相差极大。

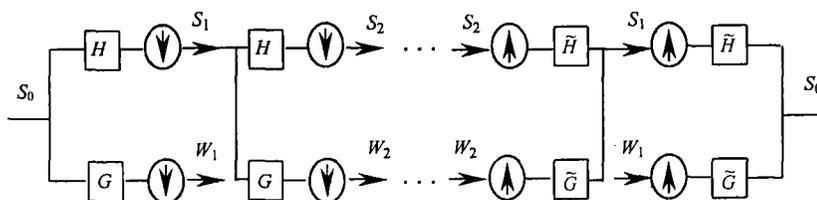


图 1 正交离散小波变换 (ODWT)

<sup>1</sup> 2000-06-16 收到, 2001-09-26 定稿

教育部“跨世纪优秀人才培养计划”基金(教计函[2000]1号)资助

图 2 中我们给出了一个例子, 采用 Haar 小波对方波  $S(n)$  及  $S(n-1)$  做一尺度的分解, 记分解系数  $W = [S_1, W_1]$ 。显然变换结果是不同的,  $S(n)$  的变换的  $W_1$  部分全为零, 而  $S(n-1)$  的  $W_1$  部分有很多“毛刺”。假设我们的压缩方案是将高频段  $W_1$  部分全部舍弃, 明显前者没有任何能量损失, 而后者将要丢失很多细节信息。若对  $Y(n-2)$  做小波变换, 对偶数位置的点进行采样得到的小波系数  $W'_e$ , 则  $W'_e$  与  $W_e$  除了有一个坐标点的位移外, 是完全相同的, 但由于其低频部分  $S'_e$  与  $S_e$  也只是相差一个坐标点的位移, 接着做第二个尺度的分解时, 又会出现类似  $Y(n)$  与  $Y(n-1)$  的问题。

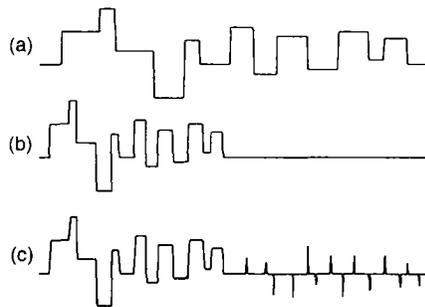


图 2

(a) 方波信号  $S(n)$ ; (b)  $S(n)$  的一尺度正交 Haar 小波变换; (c)  $S(n-1)$  的一尺度正交 Haar 小波变换

由于在每一个尺度  $j$  上, 我们只需考虑  $S_j(n)$  及其一步平移  $S_j(n-1)$  的 ODWT, 也即只需考虑偶采样和奇采样情况下的  $S_j(n)$  的 ODWT, 因此我们在每个尺度上均对偶采样和奇采样的结果进行保留, 产生一个二叉树结构, 由此二叉树的任意一路径均可重构原信号, 按照一定的准则  $\bar{C}$  我们可以确定一条最优分解路线。

## 2 二叉树搜索小波分解

### 2.1 正交离散小波变换的二叉树结构分解

参照图 1, 将原信号  $S_0$  进行小波变换, 在第一个尺度上, 若进行偶采样则记变换系数为  $W = [S_1^0, W_1^0]$ , 若进行奇采样则记变换系数为  $W = [S_1^1, W_1^1]$ , 我们用上标 0 来表示偶采样, 1 来表示奇采样, 下标表示尺度数。在第二个尺度上, 我们对  $S_1^0, S_1^1$  分别变换, 各自进行偶采样和奇采样后, 其变换系数分别为  $[S_2^{00}, W_2^{00}], [S_2^{01}, W_2^{01}], [S_2^{10}, W_2^{10}], [S_2^{11}, W_2^{11}]$ 。这样, 从原始信号  $S_0$  分解到第二个尺度, 共有 4 条路径, 分别为:  $W^0 = [S_2^{00}, W_2^{00}, W_1^0], W^1 = [S_2^{01}, W_2^{01}, W_1^0], W^2 = [S_2^{10}, W_2^{10}, W_1^1], W^3 = [S_2^{11}, W_2^{11}, W_1^1]$ , 其中  $S_2^{**}$  的上标 “\*\*” 记载了该分解路径的全部信息。如 “01” 表示第一个尺度为偶采样, 第二个尺度为奇采样。依次类推, 我们可得到如图 3 所示的分解二叉树结构。

假设分解的尺度数为  $j$ , 则共有  $2^j$  条分解路径, 分别对应最粗尺度上的  $S_j^{0 \cdots 0}, S_j^{0 \cdots 01}, \dots, S_j^{1 \cdots 10}, S_j^{1 \cdots 11}$ , 由任意一条路径都可重构原信号, 但它们对原始信号  $S_0$  的压缩性能可能有很大不同。因此我们有必要确定一条最优的分解路线, 当然最优是针对某种准则而言, 2.3 小节给出了几种常用准则。

### 2.2 计算量

ODWT 的计算量为  $O(N)^{[3]}$ , 其中  $N$  为信号的采样点数, ODWT 相当于在图 3 的二叉树的每一层上只保留一组数据。设想二叉树分解只进行一层, 则所需计算量与 ODWT 是一样的, 若

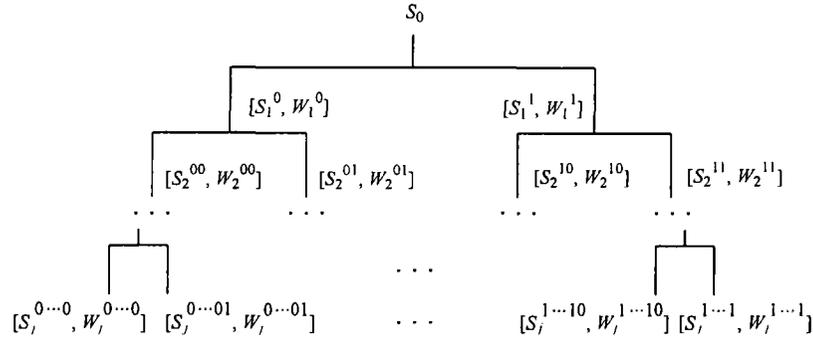


图 3 正交离散小波变换的二叉树结构分解

进行两层, 则除了对  $S_1^0$  进行变换外, 还要对  $S_1^1$  进行变换, 总的点数数目还是  $N$ , 而非 ODWT 时的  $N/2$ . 在每一层上, 二叉树分解所需处理的数据始终是  $N$ , 二叉树的层数可达  $\log_2 N$ , 故数据总量为  $N \log_2 N$ , 而对 ODWT 来说, 所要处理的数据总量为  $N + N/2 + N/4 + \dots + 1 \approx 2N$ , 故小波变换的二叉树结构分解的计算量为  $O(N \log_2 N)$ .

### 2.3 判定准则

准则  $\bar{C}$  可以有多种选择, 在实际中应用较多的主要有如下几种, 从信息论的角度考虑, 熵准则被较多选取<sup>[7]</sup>, 但能量准则往往更实用.

对原信号  $S_0$  的二叉树分解有  $M = 2^j$  条路径,  $j$  为分解的层数, 记第  $m$  条路径为:

$$W_m = [S_j^{i_1 i_2 \dots i_j}, W_j^{i_1 i_2 \dots i_j}, W_{j-1}^{i_1 \dots i_{j-1}}, \dots, W_1^{i_1}], m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (1)$$

我们将其除了  $S_j^{i_1 i_2 \dots i_j}$  平滑部分外的小波系数记为

$$Wg_m = [W_j^{i_1 i_2 \dots i_j}, W_{j-1}^{i_1 \dots i_{j-1}}, \dots, W_1^{i_1}] \quad (2)$$

2.3.1 能量准则 记小波系数  $Wg_m$  的能量和为

$$P_m = \sum_l [Wg_m(l)]^2 \quad (3)$$

令  $\bar{P} = \min\{P_0, P_1, \dots, P_{M-1}\}$ , 则  $\bar{P}$  对应的分解结果为该准则下的最佳路径.

2.3.2 对数能量准则 计算  $Wg_m$  的对数能量

$$P_m = \sum_l \ln[Wg_m(l)]^2 \quad (4)$$

令  $\bar{P} = \min\{P_0, P_1, \dots, P_{M-1}\}$ , 则  $\bar{P}$  对应的分解结果为该准则下的最佳路径.

2.3.3 熵准则 计算  $Wg_m$  的熵

$$P_m = \sum_l [Wg_m(l)]^2 \ln[Wg_m(l)]^2 \quad (5)$$

令  $\bar{P} = \min\{P_0, P_1, \dots, P_{M-1}\}$ , 则  $\bar{P}$  对应的分解结果为该准则下的最佳路径.

### 3 编解码流程

我们的编码算法流程如图 4 所示, 首先对信号  $S$  做二叉树小波分解, 按照某个准则搜索出最佳变换路径, 记按路径得到的分解系数为  $W_m = [S_j^{i_1 i_2 \dots i_j}, W_j^{i_1 i_2 \dots i_j}, W_{j-1}^{i_1 \dots i_{j-1}}, \dots, W_1^{i_1}]$ . 对系数最低频部分  $S_j^{i_1 i_2 \dots i_j}$  进行 DPCM(Differential Pulse Code Modulation) 编码, 对其余频段采用 Lloyd-Max 量化后, 实行游程编码与熵编码的混合编码, 最后将码表和数据流一同写入输出  $CS$ . 解码只要将编码过程倒过来即可.

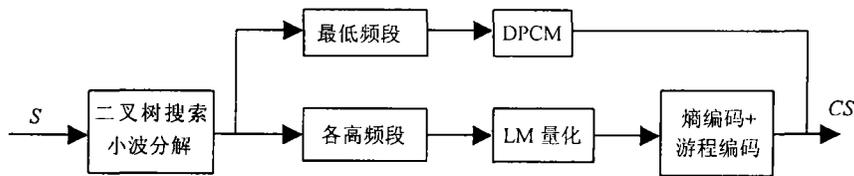


图 4 编码流程

### 4 仿真计算

为了进行比较, 我们对图 5、图 6 所示的冲击信号和分段多项式分别按普通的 ODWT 和本文提出的最佳路径进行变换, 然后用上小节描述的编码方法进行压缩.

图 7 和图 8 分别绘出了对冲击信号和分段多项式用普通 ODWT 分解和本文算法分解后编码的“压缩比 / 信噪比”曲线. 可以看到, 利用本文算法得到的压缩性能总是优于普通 ODWT 变换, 可见基于二叉树搜索寻优的小波变换在信号压缩中是一种有效的手段.

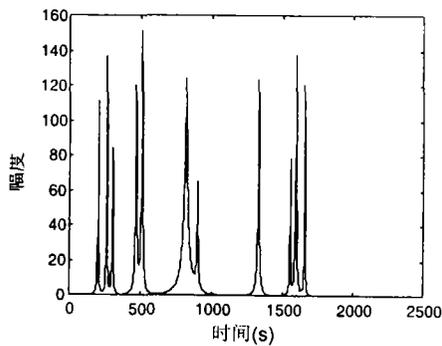


图 5 冲击信号

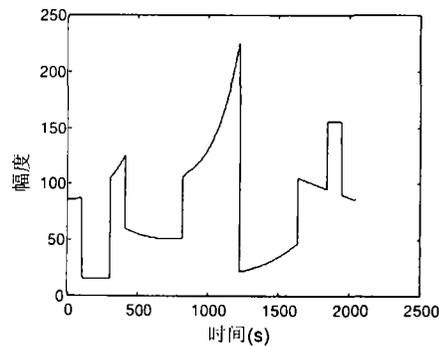


图 6 分段多项式

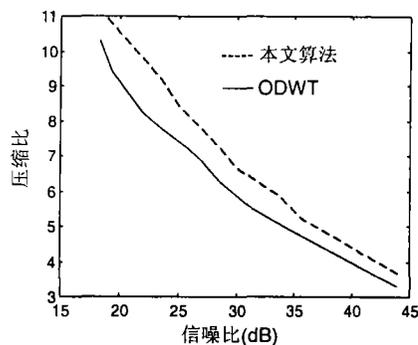


图 7 冲击信号的压缩性能曲线

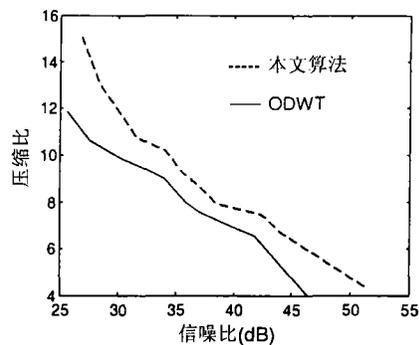


图 8 分段多项式信号的压缩性能曲线

## 5 结 论

本文我们针对正交离散小波变换由于下采样而造成的缺乏平移不变性, 从而对信号压缩的性能造成很大的影响的问题, 提出了小波变换二叉树分解的概念, 我们在每个变换尺度上均对偶采样和奇采样的结果进行保留, 产生一个小波分解的二叉树结构, 由此二叉树的任意一路径均可重构原信号, 我们按照一定的准则确定最优分解路线。仿真结果表明, 利用本文提出的算法得到的压缩性能优于普通 ODWT 变换, 是一种有效的信号压缩手段。

## 参 考 文 献

- [1] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 1988, 41(7), 909-996.
- [2] A. Cohen, I. Daubechies, J.-C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 1992, 45(5), 485-560.
- [3] S. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition, *The wavelet representation*, *IEEE Trans. on PAMI*, 1989, PAMI-11(7), 674-693.
- [4] S. Mallat, Characterization of signals from multiscale edges, *IEEE Trans. on PAMI*, 1992, PAMI-14(7), 710-732.
- [5] S. Mallat, Singularity detection and processing with wavelet, *IEEE Trans. on IT*, 1992, IT-38(2), 617-643.
- [6] J. M. Shapiro, Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients, *IEEE Trans. on SP*, 1993, SP-41(12), 3445-3462.
- [7] R. Coifman, M. Wickerhauser, Entropy-based algorithms for best basis selection, *IEEE Trans. on IT*, 1992, IT-38(2), 713-718.
- [8] 潘泉, 张磊, 子波域自适应滤波, *航空学报*, 1997, 18(5), 583-586.
- [9] 张磊, 潘泉, 一种子波域滤波算法的改进, *电子学报*, 1999, 27(2), 19-21.
- [10] Pan Quan, Zhang Lei, Two de-noising methods by wavelet transform, *IEEE Trans. on SP*, 1999, SP-47(12), 3401-3406.

## SIGNAL COMPRESSION BY BITREE-SEARCH-BASED WAVELET TRANSFORM

Zhang Lei    Pan Quan    Zhang Hongcai    Dai Guanzhong

*(Dept. of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)*

**Abstract** ODWT (Orthogonal Discrete Wavelet Transform) is translation-variant, which will depress the compression efficiency. To avoid the deficiency, by holding all the even and odd indexed subsamples in every scale, a bitree structure is formed here. From any route of the bitree the signal can be reconstructed. According to some given criterion, a best transform route can be determined. The simulations show that the compression performance of the best transform route is better than that of the ordinary ODWT.

**Key words** Wavelet transform, Signal compression, Subsample

张 磊: 男, 1974 年生, 博士研究生, 研究方向为数字信号处理, 小波理论, 最优估计等.

潘 泉: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为多尺度建模与估计, 自动控制理论, 多目标跟踪, 计算机视觉与模式识别等.

张洪才: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为动态系统的建模、估计与仿真, 非线性估计与控制, 故障诊断与容错控制, 数据融合等.

戴冠中: 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 俄罗斯宇航科学院外籍院士, 研究方向为现代控制理论和计算机控制技术.