

无耗网络么正性条件的等价表述

史小卫 梁昌洪

(西安电子科技大学 西安 710071)

摘要 本文将无耗网络的广义模对称定理加以推广,将其遗漏的相位信息补充完整,并证明了推广形式的定理与 S 矩阵的么正性条件完全等价。文中还给出了应用这一定理分析无耗网络特性的实例。

关键词 微波无耗网络, S 矩阵, 么正性条件, 广义模对称定理

1 引言

在微波工程中,许多微波部件往往可以认为是无耗的。因此,微波无耗网络(尤其是多端口网络)的分析和综合就显得非常重要。

我们知道,无耗网络(不论是否互易)的 S 矩阵满足么正性条件

$$S^+ S = I. \quad (1)$$

对于二端口网络,这一条件导致如下约束

$$|s_{11}| = |s_{22}|, \quad |s_{12}| = |s_{21}|, \quad (2)$$

$$\exp[j(\varphi_{11} + \varphi_{22})] = \exp\{j[(\varphi_{12} + \varphi_{21}) \pm \pi]\} = \det(S), \quad (3)$$

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1. \quad (4)$$

此处 $j = \sqrt{-1}$ 。

当网络的端口数大于2时,问题将变得复杂了。一般来说,对于 n 端口网络,直接由(1)式出发可得到用 S 参数 $s_{ik}(i, k = 1, \dots, n)$ 表示出的 n 个实方程和 $n(n-1)/2$ 个复方程。要利用这些方程来分析无耗网络的性质往往极其繁难。

1991年,梁昌洪^[1]、林守远^[2]把模对称关系(2)式推广到了无耗多端口网络,即广义模对称定理。本文工作表明:相位关系(3)式亦可以推广到无耗多端口网络。而且,对于端口数 $n \geq 3$ 的情况,广义模对称定理和推广的相位关系即隐含了 S 矩阵各行(或列)元素模平方和等于1的约束条件(即推广的(4)式)。这样,对于无耗多端口网络,就得到了与么正性条件完全等价的另一种表述形式。文中实例表明这种表述形式对于无耗网络性质的分析十分有用。

1992-09-21收到,1993-06-11定稿

史小卫 男,1963年生,讲师,从事电磁场与微波技术专业的科研和教学工作。

梁昌洪 男,1943年生,教授,博士生导师,从事电磁场与微波技术专业的科研和教学工作。

2 两个定理

由于无耗网络 S 矩阵行列式的模值必等于1,所以在本文中令

$$\det(S) = \exp(j\varphi_D). \quad (5)$$

于是,有如下两个定理.

定理 1 对于无耗 n 端口网络($n \geq 2$),在任意交换其行或列的编号后,可将其 S 矩阵写成分块形式

$$S = \begin{bmatrix} S_{I,I} & S_{I,II} \\ S_{II,I} & S_{II,II} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (6)$$

其中 $(S_{I,I}, S_{II,II})$ 和 $(S_{I,II}, S_{II,I})$ 这两对矩阵中至少有一对为方阵.以 $M_{ab}(a, b = I, II)$ 表示方阵 S_{ab} 的行列式在 $\det(S)$ 中的代数余子式,则必有

$$|\det(S_{ab})| = |M_{ab}| = |\det(S_{ba})|, \quad (a, b = I, II); \quad (7)$$

$$\arg[\det(S_{ab})] + \arg(M_{ab}) = \varphi_D, \quad (a, b = I, II); \quad (8)$$

或如下等价形式

$$[\det(S_{ab})]^* = \exp(-j\varphi_D) \cdot M_{ab}, \quad (a, b = I, II). \quad (9)$$

证明 这里仅对 $S_{I,II}, S_{II,I}$ 为方阵的情况进行证明,另一情况同理可证.设 $S_{I,II}$ 为 m 阶方阵,则 $S_{II,I}$ 为 $(n-m)$ 阶方阵, $S_{I,I}$ 为 $m \times (n-m)$ 阶矩阵, $S_{II,II}$ 为 $(n-m) \times m$ 阶矩阵.将么正性条件应用于分块矩阵(6)式可得

$$S_{I,I}^* S_{I,I} + S_{II,I}^* S_{II,I} = I_{(n-m)}, \quad (10)$$

$$S_{I,II}^* S_{I,II} + S_{II,II}^* S_{II,II} = I_m, \quad (11)$$

$$S_{I,I}^* S_{I,II} + S_{II,I}^* S_{II,II} = 0_{(n-m) \times m}, \quad (12)$$

其中, I_m 表示 m 阶单位方阵, $0_{(n-m) \times m}$ 表示 $(n-m) \times m$ 阶零矩阵.

令

$$U = \begin{bmatrix} 0_{m \times (n-m)} & S_{I,II} \\ I_{(n-m)} & 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (13)$$

考虑下列矩阵乘积

$$S^+ U = \begin{bmatrix} S_{I,I}^* & S_{II,I}^* \\ S_{I,II}^* & S_{II,II}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{m \times (n-m)} & S_{I,II} \\ I_{(n-m)} & 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{II,I}^* & S_{II,I}^* S_{I,II} \\ S_{II,II}^* & S_{II,II}^* S_{I,II} \end{bmatrix} \quad (14)$$

的行列式,并把最右端矩阵之行列式的第一块列右乘 $S_{II,II}$ 加到第二块列上,即可得

$$\det(S^+ U) = \det \begin{bmatrix} S_{II,I}^* & 0_{(n-m) \times m} \\ S_{II,II}^* & I_m \end{bmatrix} = [\det(S_{II,I})]^*. \quad (15)$$

另一方面,

$$\det(S^+ U) = \det(S^+) \cdot \det(U) = \exp(-j\varphi_D) \cdot M_{II,I}. \quad (16)$$

这样我们就证明了(9)式中 $a = I, b = II$ 的情形,同理易于证明(9)式中 $a = II, b = I$ 的情形.

定理 2 将 n 端口网络($n \geq 3$)的 S 矩阵任意交换其行或列的编号后写成(6)式形式的分块矩阵,如果某个网络对于所有可能的分块形式中的各方阵 $S_{ab}(a, b = I, II)$ 均使

得(9)式成立,则其 S 矩阵满足么正性条件。

证明 由于(9)式对于所有分块形式均成立,故我们可以选取一种特殊的分块形式——其中 $S_{1,1}$ 或 $S_{1,11}$ 为一阶方阵。又以 Δ_{ik} 表示 $\det(S)$ 中 $s_{ik}(i, k = 1, 2, \dots, n)$ 的代数余子式,则根据(9)式有

$$s_{ik}^* = \exp(-j\varphi_D) \cdot \Delta_{ik}. \quad (19)$$

根据行列式的展开定理^[3]我们可以得到

$$\sum_{i=1}^n s_{ik}^* s_{il} = \sum_{i=1}^n \exp(-j\varphi_D) \cdot \Delta_{ik} s_{il} = \exp(-j\varphi_D) \cdot \delta_{kl} \det(S), \quad (18)$$

而么正性条件为

$$\sum_{i=1}^n s_{ik}^* s_{il} = \delta_{kl}, \quad (19)$$

故只须再证明 $\det(S) = \exp(j\varphi_D)$ 即可。下面我们把满足定理2条件的情况分为两类来进行讨论: (1) S 矩阵的所有非对角元素 $s_{ik}(i \neq k)$ 均为零,此时由(9)式易于求得 $|s_{11}| = |s_{22}| = \dots = |s_{nn}| = 1$,即退化为 n 个无耗单端口网络,这当然满足 $\det(S) = \exp(j\varphi_D)$ 。(2) 至少存在一个不为零的非对角元素。由于端口编号的任意性,不妨设 $s_{12} \neq 0$,此时有

$$s_{12} = \exp(j\varphi_D) \cdot \Delta_{12}^* = \exp(j\varphi_D) \cdot \left(\sum_{i=2}^n s_{i1} D_{i1} \right)^*. \quad (20)$$

上面最后一个等式再次引用了行列式的展开定理,把 Δ_{12} 按其第一列展开,其中 D_{i1} 为 s_{i1} 在 Δ_{12} 行列式中的代数余子式,式中的负号是因为 Δ_{12} 本身是个代数余子式从而与 Δ_{12} 所对应行列式相差一个负号。现在,我们回到原始的 S 矩阵中来看 D_{i1} ,应用(9)式有

$$D_{i1} = \exp(j\varphi_D) \cdot (s_{11}s_{i2} - s_{12}s_{i1})^*. \quad (21)$$

将(21)式代入(20)式,得

$$\begin{aligned} s_{12} &= \sum_{i=2}^n s_{12} |s_{i1}|^2 - s_{11} \sum_{i=2}^n s_{i1}^* s_{i2} \stackrel{(18)}{=} \sum_{i=2}^n s_{12} |s_{i1}|^2 - s_{11} \cdot (-s_{11}^* s_{12}) \\ &= s_{12} \cdot \sum_{i=1}^n |s_{i1}|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

所以

$$1 = \sum_{i=1}^n |s_{i1}|^2 \stackrel{(18)}{=} \exp(-j\varphi_D) \cdot \det(S) = \sum_{i=1}^n |s_{ik}|^2. \quad (23)$$

至此,证明了定理2。其中(23)式正是(4)式的推广形式。

实际上,并不需要像定理2所表述的那样去检验所有可能子方阵的行列式才能确定网络是否无耗。只须在 S 矩阵中任取 $[n/2] + 1$ 列($[]$ 表示取整),对其中每个元素及其代数余子式,如果(9)式都成立的话,该网络必为无耗网络,其它关系自然会得到满足。如果注意到么正性条件实际上只给出 n^2 个实方程,则上面这个判据的条件都显得略有冗余。

3 应用举例

例 1 互易无耗三端口网络具有如下性质^[4]:

(1) 如果在任一端口上外接短路活塞, 则总可以找到活塞的一个位置使其它两端口间没有能量传输。

(2) 如果网络对于接有短路活塞的那个端口是对称的, 则总可以找到活塞的一个位置, 使能量在其它两端口间无反射地完全传输。

利用定理 1 来证明这两条性质将显得非常简便、清晰。

根据网络理论^[5], 一般三端口网络第 3 端口接以负载 Γ 后所形成二端口网络的 S 矩阵 $[S']$ 与原三端口网络 S 矩阵 $[S]$ 有如下关系:

$$[S'] = \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_{11} - \Delta_{22}\Gamma}{1 - s_{33}\Gamma} & \frac{s_{12} + \Delta_{21}\Gamma}{1 - s_{33}\Gamma} \\ \frac{s_{21} + \Delta_{12}\Gamma}{1 - s_{33}\Gamma} & \frac{s_{22} - \Delta_{11}\Gamma}{1 - s_{33}\Gamma} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

其中, Δ_{ik} 为原三端口网络 S 矩阵之行列式中元素 s_{ik} 的代数余子式。如果原三端口网络无耗, 则根据(9)式有

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= \exp(j\varphi_D) \cdot s_{11}^*, & \Delta_{22} &= \exp(j\varphi_D) \cdot s_{22}^*, \\ \Delta_{12} &= \exp(j\varphi_D) \cdot s_{12}^*, & \Delta_{21} &= \exp(j\varphi_D) \cdot s_{21}^*, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 $\exp(j\varphi_D) = \det(S)$ 。当负载采用短路活塞时, 有

(a) 如果原网络满足 $|s_{12}| = |s_{21}|$, 则当

$$\Gamma = \exp\{j[\varphi_{12} + \varphi_{21}] + \pi - \varphi_D\} \quad (26)$$

时, $s'_{12} = s'_{21} = 0$, 即端口 1, 2 之间没有能量传输。

(b) 如果原网络满足 $|s_{11}| = |s_{22}|$, 则当

$$\Gamma = \exp\{j[(\varphi_{11} + \varphi_{22}) - \varphi_D]\} \quad (27)$$

时, $s'_{11} = s'_{22} = 0$, 即能量在端口 1, 2 间完全传输。

由此可见, 对于互易无耗三端口网络, 上述性质(1), (2)确实成立, 而且其中互易性并非必要条件。此外, 如果互易无耗对称三端口网络的对称端口是匹配的 ($s_{33} = 0$), 则情况(a)中活塞位置与情况(b)中活塞位置正好相差 $\lambda_g/4$ (此时由(9)式易得 $s_{11} = s_{12}$, 即 $\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{12} = \varphi_{21}$)。

实际上, 定理 1 用于分析端口数目较大的特殊无耗网络(如匹配网络或对称网络)时, 其优点将显得更为突出。

例 2 考虑全匹配的互易无耗五端口网络, 其 S 矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & 0 & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & 0 & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & 0 & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

对其 10 个二阶主子式及其代数余子式应用(9)式即可得

$$\left. \begin{aligned} -s_{12}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{34}s_{45}s_{35})^*, & -s_{13}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{24}s_{45}s_{25})^*, \\ -s_{14}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{23}s_{35}s_{25})^*, & -s_{15}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{23}s_{34}s_{24})^*, \\ -s_{23}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{14}s_{45}s_{15})^*, & -s_{24}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{13}s_{35}s_{15})^*, \\ -s_{25}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{13}s_{34}s_{14})^*, & -s_{34}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{12}s_{25}s_{15})^*, \\ -s_{35}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{12}s_{34}s_{14})^*, & -s_{45}^2 &= \exp(j\varphi_D) \cdot (2s_{12}s_{23}s_{13})^*. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

对这 10 个公式取模并注意到它们的对称性,立即可知它们仅有两组可能解: (a) $|s_{12}| = |s_{13}| = \dots = |s_{45}| = 0$; (b) $|s_{12}| = |s_{13}| = \dots = |s_{45}| = 1/2$. 第一组解显然无意义,第二组解不仅有意义而且符合无耗条件.

将(29)式去掉模值后将仅剩两个独立的公式:

$$\left. \begin{aligned} \exp[j(2\varphi_{12} + \varphi_{34} + \varphi_{45} + \varphi_{35})] &= \exp[j(\varphi_D \pm \pi)], \\ \exp[j(2\varphi_{13} + \varphi_{24} + \varphi_{45} + \varphi_{25})] &= \exp[j(\varphi_D \pm \pi)]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

当该网络为旋转对称时,即 $s_{12} = s_{23} = s_{34} = s_{45} = s_{15}$, $s_{13} = s_{35} = s_{25} = s_{24} = s_{14}$ 时,有

$$\varphi_{12} - \varphi_{13} = 2\pi/3 \quad (\varphi_{12} = \varphi_{13} \text{ 的解不满足么正性}). \quad (31)$$

相比之下,文献[6]为了证明上述两个结论(即 $|s_{ik}| = 1/2$ 和 $\varphi_{12} - \varphi_{13} = 2\pi/3$)则用了大量的篇幅.

4 结 语

本文工作表明定理 1 是一个十分有用的定理,而且与 S 矩阵的么正性条件完全等价($n \geq 3$). 借助这一定理,不仅可以分析无耗多端口网络的性质,而且可以从理论上预言一些具有特殊性质的无耗网络的存在性.

参 考 文 献

- [1] 梁昌洪,邱长兴. 电子学报,1991,19(3): 101-102,109.
- [2] 林守远. 电子科学学刊,1991,13(6): 637-639.
- [3] 屠伯坝,徐诚浩,王 芬. 高等代数. 上海: 上海科学技术出版社,1987,70-73.
- [4] 吴培亨. 微波电路. 北京: 科学出版社,1980,37-39.
- [5] 梁昌洪. 计算微波. 西安: 西北电讯工程学院出版社,1985,36-37.
- [6] Heiber A L, Vernon R J. IEEE Trans. on MTT, 1973, MTT-21(8): 547-552.

EQUIVALENT STATEMENT TO THE UNITARY CONDITION FOR LOSSLESS NETWORK

Shi Xiaowei Liang Changhong

(Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract The generalised magnitude-symmetry theorem for lossless network is extended, the phase information previously omitted is supplemented. The extended theorem is equivalent to the unitary condition for lossless network rigorously. Two illustrations are given for the applications of the theorem to analysing the properties of lossless network.

Key words Microwave lossless network, S matrix, Unitary condition, Generalised magnitude-symmetry theorem