

一种基于偏微分方程的 SAR 图像去噪方法

王新楼 乔 明 邹谋炎

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘 要: 传统的相干斑噪声抑制算法在多次迭代后通常会导致图像边缘的模糊, 这一直是 SAR 图像去噪处理的难点和热点所在。该文分析了应用于图像处理的各向异性扩散方程(PDE's), 在其基础上由最小化问题出发, 引入棱边指示子对图像的边缘加以限制, 得到新的去噪模型并降之应用于 SAR 图像的相干斑噪声去除。与传统的基于局部统计量和各向异性滤波器相比, 新的算法在棱边保持和噪声去除能力均有提高。

关键词: 相干斑噪声抑制, 各向异性扩散方程, 棱边指示子

中图分类号: TN957.52 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)09-1365-05

A New Speckle Noise Removal Method Based on PDE's

Wang Xin-lou Qiao Ming Zou Mou-yan

(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract Traditional speckle removal methods generally result in the lost of image features. This paper presents a new approach to edge-preserving smoothing of digital SAR images based on the PDE's. A brief analysis of the principle of anisotropic nonlinear diffusion equation for image restoration is introduced, and then an edge indicator is showed in the final update equation to constrain the image edge, staying as close as possible to the input image and to restore discontinuities, which improve the ability of speckle noise removal. Comparison and experimental result show the new proposed algorithm has high performance.

Key words Speckle noise removal, Anisotropic diffusion PDE, Edge indicator

1 引言

合成孔径雷达(SAR)由于成像机制的缘故, 在成像过程中导致不可避免地受到相干斑噪声(Speckle)的污染。相干斑噪声的存在, 使得图像的辐射分辨率大幅度下降, 严重影响了图像的判读和分类以及进一步处理, 它是造成 SAR 图像质量下降的主要原因之一。

Speckle 表现为图像灰度的剧烈变化^[1], 一般作为乘性噪声来建模,

$$u(x, y) = u_0(x, y)N(x, y) \quad (1)$$

其中 u_0 是未污染图像, N 是 Speckle 噪声, u 是观察图像。

对 SAR 图像进行处理的算法要求很高, 通常是既要有很强的噪声抑制能力, 又要有很好的边缘和细节保持能力, 既要在保存其中图像细节信息的同时去除 Speckle, 同时还要有相当高的处理效率。

为此, 人们对 Speckle 的抑制算法进行了深入的研究, 提出了一些有效算法。主要包括以下几大类: 第 1 类是基于局部统计量的 Lee 滤波器^[2-4], Frost 型滤波器^[5], 以及基于这

两种滤波器的改进型; 第 2 类是基于小波变换的方法去噪声, 还有一类就是偏微分方程的方法。

基于局部统计量的 Lee 和 Frost 包括它们的改进型滤波器, 它们的去 Speckle 的效果较好, 但是另一方面, 对于图像的棱边保持不够, 边缘在一定程度上被模糊了, 这背离了对 SAR 图像处理的本意; 基于小波变换的第二类方法同样存在这个问题。Perona 和 Malik(P&M)^[6]提出的偏微分方程因其兼具去除噪声和保持边缘两方面的优点而给图像处理提供了新思路。

在深入研究和实现偏微分方程法的过程中, 我们发现, 如果直接利用现有文献所提的方法得出的结果——包括 Teboul^[7]改进后的方法, 图像在灰度属性方面常常会偏离原图较多且棱边的模糊不可避免。对此问题我们做了改进, 在各向异性偏微分方程(PDE's)基础上由最小化问题出发, 引入棱边指示子对图像的边缘加以限制, 得到新的能量泛函使其适用于 SAR 图像中 Speckle 噪声的去除。

对于在偏微分方程法中起重要作用的扩散系数函数, 我们选取了一个不同于以往文献中提到的新的扩散函数, 在图

像边缘附近的近似表达式表明该扩散函数具有改善棱边模糊的效果;结合棱边指示子和能量泛函,本文提出了一种基于偏微分方程的新的去噪方法。理论分析和实验结果表明,这种新的去噪方法取得了良好的效果。最后本文给出了新方法基于局部统计量和各向异性滤波器的传统方法在对实际 SAR 图像处理上的对比。

2 基于偏微分方程的方法

Perona 和 Malik^[6]提出用如下的方程对图像去噪进行建模:

$$\partial u / \partial t = \operatorname{div} (c(|\nabla u|) \nabla u) \quad (2)$$

其中 div 表示散度, $|\nabla u|$ 是图像的梯度场, $|\nabla u| = \sqrt{(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2}$ 。这个方程是非线性的, t 是一个人为引入的时间,作用是把图像的去噪过程变成一个随时间的演化问题。在物理上,这个方程的形式等同于热扩散方程,其中的 $c(|\nabla u|)$ 也叫做扩散系数。由于扩散系数 $c(|\nabla u|)$ 造成在各个方向上扩散速度不同,区别于无方向各向同性扩散方程,称方程式(2)为各向异性的扩散方程(Anisotropic Diffusion Equation, ADE)。

事实上,如果以 $u_0 = Gu$ 来表示图像的降质模型,那么上述方程可以归结为一个最小化问题 $\min J(u)$ ^[8]。

$$J(u) = \|Gu - u_0\|^2 + \alpha J_\alpha(u) \quad (3)$$

其中 $J_\alpha(u) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) dx dy$ 是附加的惩罚项,可以使问题得

到规整化。最小化式(3),经过简单的推导(对 u , ∇u 进行变分)^[9],可以得到其欧拉-拉格朗日方程为

$$G^*Gu - G^*u_0 - \alpha \operatorname{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] = 0 \quad (4)$$

P&M 的各向异性扩散方程模型在图像处理中取得了较好的效果,但同时其解依赖于其中 $\varphi(|\nabla u|)$ 函数的性质,对于图像棱边的模糊在一定程度上还是无法避免,多次迭代之后,棱边附近的像元在灰度属性方面常常会偏离原图较多。针对上述缺点,本文提出的改进方法基于如下想法:在图像的不连续区域即细节丰富的区域,式(4)平滑的结果不应该太偏离原图像,否则边缘就会被模糊导致图像细节丢失,所以考虑给式(3)加上一个如下的限制项:

$$J_\alpha(u) = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|) dx dy + \int_\Theta \beta (u - u_0)^p dx dy \quad (5)$$

其中 Θ 指图像中的不连续区域,通常是棱边。 β 是常数,在迭代中给出。将式(5)代入式(3)并对 u 求变分,可以得到其欧拉-拉格朗日方程为

$$G^*Gu - G^*u_0 - \alpha \operatorname{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] - \beta p v^2 (u - u_0)^{p-1} = 0 \quad (6)$$

其中 $v = v(x, y, t)$ 是一个指示子,它指明了图像的细节特征。在图像的棱边附近 v 的值接近于 1,在平坦区域,接近于 0,它相当于一个当前图像棱边的指示子。 p 与解的稳定性有关,可以取经验值 2~3。

综合边界和初始条件,实际上对于 SAR 图像去噪问题我们使用的是如下演化方程:

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t &= \alpha \operatorname{div} \left[\frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] - \beta p v^2 (u - u_0)^{p-1} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, u(x, y, 0) = u_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在后面的表述中我们称式(7)为边缘受限制的各向异性扩散方程(Edge Constrained Anisotropic Diffusion Equation, ECADE)。

3 ECADE 方程的参数选取和离散化

对于 2-D 图像,如果令 $\eta = \nabla u / |\nabla u|$ 表示梯度方向的单位向量, ξ 是垂直于 η 梯度方向的单位向量。有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ \xi &= \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

引入 ξ, η 之后, ECADE 方程可以改写成如下形式:

$$\partial u / \partial t = \alpha g(q) \left\{ \left[1 + \frac{q g'(q)}{g(q)} \right] u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} \right\} - \beta p v^2 (u - u_0)^{p-1} \quad (9)$$

其中 $g(q) = \varphi'(q) / q$,

$$\left. \begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \\ u_{\xi\xi} &= \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Teboul^[7], Lazaroia^[10]等详细讨论了 $g(q)$ 函数的选取原则与方程式(2)的解的存在性和收敛性的关系。在这里为了达到在平滑噪声的同时增强棱边的目的,我们提出考虑采用如下形式的 $g(q)$ 函数:

$$g(q) = (1 + K) / (q^2 + K) \quad (11)$$

其中参数 K 的物理含义就是图像 u 的梯度门限值,对于单视 SAR 图像,梯度门限一般取 10~20,通常可以认为 $K \gg 1$ 是成立的。 q 是对图像局部梯度的一个度量, $g(q)$ 函数曲线如图 1 所示,在 $q \rightarrow \infty$ 处, $g(q) \rightarrow 0$; 在 $q \rightarrow 0$, 如果 $K \gg 1$ 则有 $g(q) \rightarrow (1 + K) / K \approx 1$ 。一方面, $g(q)$ 函数符合 Teboul 在文献[7]中提出的对于扩散系数函数的 3 条要求,另一方面,代入式(9)后得到

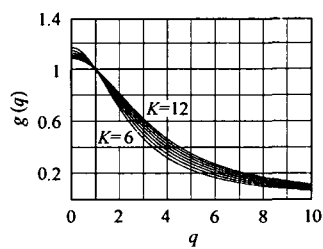


图1 $g(\cdot)$ 函数的性质

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha g(q) \left\{ \left[\frac{K - q^2}{K + q^2} \right] u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} \right\} - \beta p v^2 (u - u_0)^{p-1} \quad (12)$$

由式(12)可以看出，在棱边附近， $g(q) > 0$ ， $q^2 \gg K$ ，所以 $u_{\eta\eta}$ 的系数 $g(q) \left[\frac{K - q^2}{K + q^2} \right] \approx -g(q)$ ，这样就造成棱边的梯度 η 方向将得到一定程度的逆平滑(即锐化)，这无疑可以改善 Perona and Malik 方程的棱边模糊的现象。

而在图像的平坦区域， $g(q) \approx 1$ ， $v \rightarrow 0$ ， $K \gg 1$ 所以式(12)退化成

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \alpha \left(\frac{K+1}{K-1} u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} \right) \approx \alpha (u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}) \quad (13)$$

这正是各向同性的扩散方程，它与 Gauss 卷积平滑等价，可以在一定程度上平滑图像中的噪声。应当指出， $g(\cdot)$ 函数中参数 K 的具体取值(一般取 10~20)不会改变对 $g(\cdot)$ 函数的非凸性， $g(\cdot)$ 函数在无穷远处的性质也不依赖于 K 。 $g(\cdot)$ 函数是归结于文献[7]中所提出的非凸的但又符合各向异性扩散要求的系数函数，所以 K 的取值对于解的收敛性和存在性没有影响。

假定 u_0 是一幅尺寸为 $M \times N$ 的图，那么离散化 ECADE 演化方程得到

$$u_{i,j}^{t+\delta t} = u_{i,j}^t + \delta t [g_N(q) \nabla_N u + g_S(q) \nabla_S u + g_W(q) \nabla_W u + g_E(q) \nabla_E u] - \beta p (v'_{i,j})^2 (u_{i,j}^t - u_{0i,j})^{p-1} \quad (14)$$

其中 $i=1,2,3,\dots,M; j=1,2,3,\dots,N;$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_N u &= u_{i-1,j} - u_{i,j}, & g_N(q) &= g(\nabla_N u) \\ \nabla_S u &= u_{i+1,j} - u_{i,j}, & g_S(q) &= g(\nabla_S u) \\ \nabla_W u &= u_{i,j-1} - u_{i,j}, & g_W(q) &= g(\nabla_W u) \\ \nabla_E u &= u_{i,j+1} - u_{i,j}, & g_E(q) &= g(\nabla_E u) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

对于参数 v 棱边指示子，用归一化 $|\nabla u|$ 来表示：

$$v(t) = \begin{cases} K_v / \max(|\nabla u'|), & |\nabla u'| > K_v \\ |\nabla u'| / \max(|\nabla u'|), & |\nabla u'| \leq K_v \end{cases} \quad (16)$$

其中门限值 K_v 是由图像局部梯度值决定的，具体取值可以参考 Black^[11]中关于边缘与梯度阈值的取法。

参数 β 可以取较小的数值如 0.1~0.2，参数 p 可以取经

验值 2~3，它们的作用是对棱边附近的像元进行修正(如果其灰度属性偏离原图较多，则在迭代中对其进行补偿，补偿的权重就是以 β, p, v 为系数；否则不进行补偿或者补偿很少)。

4 实验结果

实验 1 首先我们用无噪图像加入模拟噪声的试验方法以估计算法的去噪能力。以图 2(a)的 cameraman 为例，在图像中加入乘性噪声得到图 2(b)。用如下的式子来近似 Speckle 噪声：

$$u = u_0 + n \cdot u_0 \quad (17)$$

其中 n 是均值为 0，方差为 0.04 的均匀分布的随机噪声。

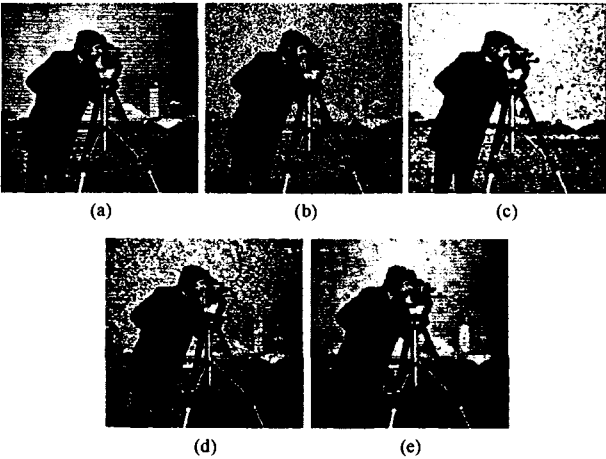


图2 (a)是原始图像，(b)–(e)分别是噪声图像和 Lee, P&M 方法, ECADE 滤波后的结果

上述 Lee 滤波器为 6 次迭代的结果，其余均为 30 次迭代的结果。定义误差曲线如下：

$$err = \|u^t - u_{origin}\|^2$$

在 $t=0$ 时刻 u^t 即噪声图像。几种方法的迭代过程误差曲线如图 3 所示：

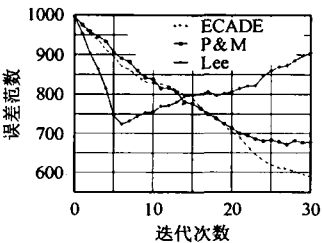


图3 迭代-误差曲线

从上图可以看出，Lee 滤波器，在开始的几步迭代中误差曲线下降较快，随后停滞，在(>10)的时候反而上升，在具体图像上表现为过分平滑，细节丧失，此时迭代已经失去意义。本文的 ECADE 方法在前面的迭代(<20 步)时性能与 P&M

方法相差不大,在随后的迭代中(20~30) P&M 方法因为对边缘控制较差的原因,无法得到更好的结果。经分析和数值验证,正是式(12)中的第 2 项起了限制的作用。

实验 2 在实验 2 中我们采取尺寸为 256×256 的真实的 SAR 图 4(a)。图 4(b)–图 4(d)分别是用 Lee, P&M, ECADE ($K=10$)滤波后的实验结果。可以看出, Lee 滤波器对噪声起到了一定的抑制作用,但是带来边缘模糊, P&M 滤波器降噪和边缘保持的能力均好于 Lee,但无法避免图像某些细节的丢失。本文改进后的 ECADE 滤波器能在一定程度上保持边缘。

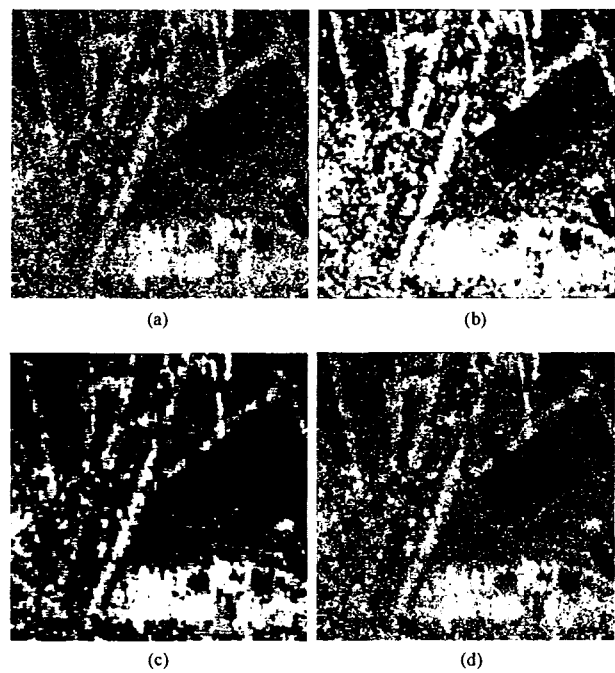


图 4 (a)原图尺寸是 256×256 , (b)–(d)分别是用 Lee, P&M, ECADE($K=10$)滤波后的图

通常情况下,用上小节中给定的各参数初始值已经能够得到较好的效果。如果要达到更好的去噪效果,则需要对演化方程式(7)中各个参数的选取作一定的优化调整。这种优化调整可以使用模拟退火方法,但会带来计算量大大增加。在实际处理图像的过程中我们发现,算法滤波结果对于参数 β , p , v 来说一般是不敏感的。因此我们可以固定参数 β , p , v , 对 K 进行调整来达到获得更好的滤波效果兼具较少的计算量的目的。

实验 3 实验 3 中我们采取尺寸为 360×620 的实际的 SAR 图 5(a), 该图中既有一定的平坦区域, 又有含丰富细节的多棱边区域。

从图 5 中可以看出, 在平原和耕地区域, ECADE 法的噪声去除的比较干净, 而在图下方和右边的山地等棱边丰富的区域, 相对于 P&M 方程滤波的效果而言, 边缘保存的更

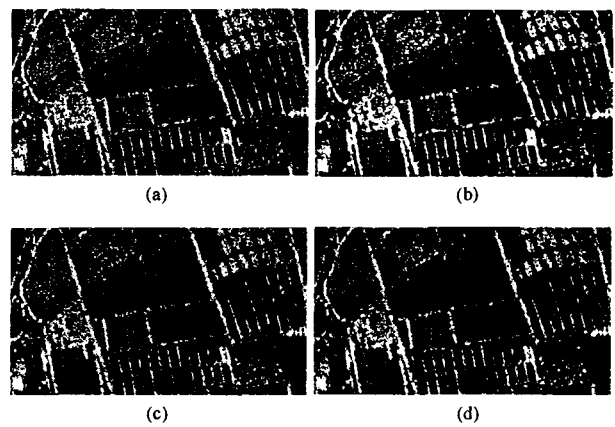


图 5 (a)–(d)分别是原 360×620 SAR 图, 经 Lee, P&M 和 ECADE(取 $K=13$)滤波后的图

多, 在一定程度上有效地避免了棱边模糊效应。
等效视数 ENL 通常用来衡量 SAR 图像平坦区域的去噪效果。图 6 中 1,2,3 三个区域的等效视数如表 1 所示。

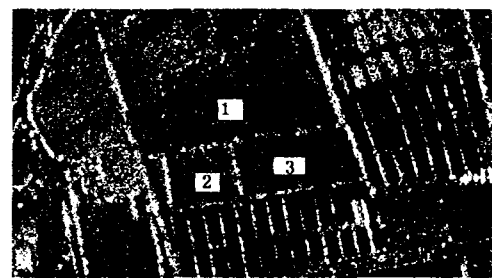


图 6 不同区域的等效视数比较

表 1 不同区域有效视数比较

区域编号	原图	Lee	P&M	ECADE
1	3.68	8.15	5.04	7.92
2	2.72	7.24	4.33	7.01
3	3.24	7.41	4.56	7.37

由表 1 可以定量地看出, 在平坦区域 Lee 滤波器的去噪能力是不错的, P&M 滤波器相对于原图等效视数稍有提高, ECADE 与 Lee 相差不多, 它们都能有效地提高平坦区域的等效视数。但注意到 Lee 的平坦区域去噪的代价是棱边附近的细节丧失, 而 P&M 滤波器和 ECADE 都能较好地保持, 这一点是 Lee 滤波器无法企及的。

5 结束语

在图像处理的众多去噪方法中, 基于偏微分方程的各向异性扩散法在去除噪声的同时能保存图像细节边缘, 计算的便捷和快速性方面都有很多优点。本文对于 P&M 模型进行了改进, 引进了棱边指示子 $v(x, y, t)$ 并使用新的扩散系数函

数 $g(q)$ 。理论分析和实验结果表明,新的迭代方法在边缘保持和去噪能力上均好于传统的去相干斑噪声方法。

参 考 文 献

- [1] Goodman J M. Some fundamental properties of speckle. *J Opt. Soc. Am.*, 1976, 66(11): 1145 – 1149.
- [2] Lee J S. Digital image enhancement and noise filtering by using local statistics. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, 1980, PAMI-2(2): 165 – 168.
- [3] Lee J S. Refined filtering of image noise using local statistics. *Comput. Graph. Image Proc.*, 1981, 15(3): 380 – 389.
- [4] Lee J S. Speckle suppression and analysis for synthetic aperture radar. *Opt. Eng.*, 1986, 25(5): 634 – 643.
- [5] Frost V S, Stiles J A, Shanmugan K S, Holtzman J C. A model for radar images and its application to adaptive digital filtering of multiplicative noise. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, 1982, PAMI-4(2): 157 – 165.
- [6] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, 1990, 12(7): 629 – 639.
- [7] Teboul S, Blanc-Feraud L, Aubert G, *et al.*. Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1998, 7(3): 387 – 397.
- [8] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Applied. Math.* 1989, 42(5): 577 – 685.
- [9] 邹谋炎. 反卷积和图像复原. 北京: 国防工业出版社, 2001: 248 – 250.
- [10] Lazaroia L. A study in the BV space of denoising-deblurring variational problem. prepubl. No.439, Laboratory J-A. Dieudonne, URA 168 du CNRS, University of Nice-Sophia Antipolis, France, 1996.
- [11] Black M, Sapiro G. Edges as outliers: Anisotropic smoothing using local image statistics. *Proceedings of the Scale-Space Conference, Berlin*, Springer-Verlag, 1999: 58 – 62.

王新楼: 男, 1979 年生, 硕士生, 研究方向为图像复原.

乔 明: 男, 1977 年生, 硕士生, 研究方向为图像复原.

邹谋炎: 男, 1941 年生, 博士, 研究员, 博士生导师, 中科院研究生院兼职教授, 主要研究方向为图像处理与信号复原.