第 24 卷 第 7 期 电子与信息学报 Vol.24 No.7
2002 年 7 月 JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY July 2002

椭圆手征波导的导模特性研究 [1]

董建峰 陶卫东 白贵儒

(宁波大学光纤通信与网络技术研究所 宁波 315211)

摘 要 该文首先对椭圆手征波导进行了解析求解，导出了模式场解及模式特征方程，然后用数值计算的方法研究了手征参数对椭圆手征波导中导模的色散曲线和截止波长的影响，发现在椭圆手征波导中导模的第一个模式会随手征参数的增加而不同.

关键词 椭圆手征波导，手征参数，导模

中图号 TN814

1 引 言

由于在微波、毫米波等领域有广阔的应用前景，近十年来，人们对一类新型的由手征介质材料填充的手征波导进行了广泛而深入的研究 [1−4]．对圆手征波导的研究表明，手征参数可极大地改变圆波导中导模的色散特性，引起模式分岔 [3,4]，对截止频率 [2,4] 等也有影响．本文对椭圆手征波导进行了严格的求解，得到了模式场的解析解，推出了模式特征方程，当椭圆趋于圆时，模式场解和特征方程都退化到圆手征波导情形．对偶模和奇模特征方程进行数值求解，给出了几个低阶模在不同椭圆比下的色散曲线、不同手征参数下截止波长随椭圆偏心率的变化关系曲线以及偶模和奇模的截止波长随手征参数的变化关系曲线．结果发现在椭圆手征波导中不仅发生模式分岔，而且偶模和奇模的次序会随手征参数的不同而改变.

2 椭圆手征波导中的模式场解和模式特征方程

对各向同性的无损耗的互易手征介质，时谐场变化 $\exp(j\omega t)$，本构关系可写成 [5]

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(\varepsilon_r \boldsymbol{E} - j\chi Z_0 \boldsymbol{H}) \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\mu_r \boldsymbol{H} - j\chi Y_0 \boldsymbol{E}) \tag{1b}$$

式中 $Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ 为真空的本征阻抗，χ 为手征参数．由麦克斯韦方程及上述本构关系，可以导出 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 满足的方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + 2k_0\chi\nabla\times\boldsymbol{E} + k_0^2(n^2-\chi^2)\boldsymbol{E} = 0 \tag{2a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + 2k_0\chi\nabla\times\boldsymbol{H} + k_0^2(n^2-\chi^2)\boldsymbol{H} = 0 \tag{2b}$$

其中 $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$．令

$$\boldsymbol{F}_\pm = (1/2)[\boldsymbol{E} \pm (-j\eta\boldsymbol{H})] \tag{3}$$

其中 $\eta = \sqrt{\mu_r\mu_0/(\varepsilon_r\varepsilon_0)}$，则由 (2a), (2b), (3) 式可以得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{F}_\pm + k_0^2(n\pm\chi)^2\boldsymbol{F}_\pm = 0 \tag{4}$$

[1] 2000-09-12 收到， 2000-12-27 定稿

在柱形坐标系统中，设沿 z 轴传播的电磁波形式为 $\exp(-j\beta z)$，其中 β 是传播常数．令

$$\boldsymbol{F}_{\pm} = \boldsymbol{F}_{\pm t} + \hat{z}F_{\pm z} \tag{5}$$

则由 (4)，(5) 式可推出 $\boldsymbol{F}$ 的纵向分量 $\boldsymbol{F}_{\pm z}$ 满足的方程和横向分量 $\boldsymbol{F}_{\pm t}$ 与纵向分量 $\boldsymbol{F}_{\pm z}$ 之间的关系分别为

$$\nabla_t^2 F_{\pm z} + h_{\pm}^2 F_{\pm} = 0 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{F}_{\pm t} = (1/h_{\pm}^2)[-j\beta\nabla_t F_{\pm z} \mp (h_{\pm}^2 + \beta^2)^{1/2}\hat{z} \times \nabla_t F_{\pm z}] \tag{7}$$

其中 $h_{\pm}^2 = k_0^2(n \pm \chi)^2 - \beta^2$．

对由各向同性的无损耗的互易手征介质填充的椭圆手征波导，设椭圆芯中手征介质的手征参数、相对介电常数、相对磁导率分别为 $\chi, \varepsilon_r, \mu_r$，椭圆芯半长轴和半短轴分别为 a 和 b．采用椭圆柱坐标 (ξ, η, z)，在椭圆手征介质中 $(0 \le \xi \le \xi_0, \xi_0 = \ln\sqrt{(a+b)/(a-b)}$ 代表椭圆芯边界)，对 (6) 式进行类似于椭圆光波导 [6−8] 的求解，$F_{\pm z}$ 可写成 (省略因子 $\exp[j(\omega t - \beta z)]$):

$$\left.\begin{aligned} F_{+z} &= A_m[Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_+^2)ce_m(\eta,\gamma_+^2) \mp jMs_m^{(1)}(\xi,\gamma_+^2)se_m(\eta,\gamma_+^2)] \\ F_{-z} &= B_m[Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_-^2)ce_m(\eta,\gamma_-^2) \mp jMs_m^{(1)}(\xi,\gamma_-^2)se_m(\eta,\gamma_-^2)] \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

则由 (3) 式可得椭圆手征介质中电磁场的纵向分量:

$$\left.\begin{aligned} E_z &= A_m Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_+^2)ce_m(\eta,\gamma_+^2) + B_m Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_-^2)ce_m(\eta,\gamma_-^2) \\ &\quad \mp j[A_m Ms_m^{(1)}(\xi,\gamma_+^2)se_m(\eta,\gamma_+^2) + B_m Ms_m^{(1)}(\xi,\gamma_-^2)se_m(\eta,\gamma_-^2)] \\ H_z &= (j/\eta)\{A_m Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_+^2)ce_m(\eta,\gamma_+^2) - B_m Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_-^2)ce_m(\eta,\gamma_-^2) \\ &\quad \mp j[A_m Ms_m^{(1)}(\xi,\gamma_+^2)se_m(\eta,\gamma_+^2) - B_m Ms_m^{(1)}(\xi,\gamma_-^2)se_m(\eta,\gamma_-^2)]\} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(8), (9) 两式中，A_m, B_m 为待定常数，$Mc_m^{(1)}(\xi,\gamma_{\pm}^2), Ms_m^{(1)}(\xi,\gamma_{\pm}^2)$ 为第一类变型 Mathieu 函数，$ce_m(\eta,\gamma_{\pm}^2), se_m(\eta,\gamma_{\pm}^2)$ 为 Mathieu 周期函数 [9]．$\gamma_{\pm}^2 = q^2 h_{\pm}^2/4$, $h_{\pm}^2 = k_0^2(n \pm \chi)^2 - \beta^2$, $q = \sqrt{a^2 - b^2}$, $Ms_m^{(1)}(\xi,\gamma_{\pm}^2)$ 前面的 $\mp$ 号代表 $\mathrm{HE}_{\pm mn}$ 模 (这里 m 取正整数)．可以证明，当椭圆趋于圆时，(9) 式与圆手征波导的模式场解一致 [2]．

椭圆手征介质中电磁场横向分量可由 (7) 式和 (3) 式推出为

$$\left.\begin{aligned} E_\eta =& \frac{1}{\sqrt{g}h_+^2}\left[-j\beta\frac{\partial F_{+z}}{\partial\eta} - (h_+^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{+z}}{\partial\xi}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}h_-^2}\left[-j\beta\frac{\partial F_{-z}}{\partial\eta} + (h_-^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{-z}}{\partial\xi}\right] \\ H_\eta =& \frac{j}{\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}h_+^2}\left[-j\beta\frac{\partial F_{+z}}{\partial\eta} - (h_+^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{+z}}{\partial\xi}\right]\right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{g}h_-^2}\left[-j\beta\frac{\partial F_{-z}}{\partial\eta} + (h_-^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{-z}}{\partial\xi}\right]\right\} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}E_\xi =&\frac{1}{\sqrt{g}h_+^2}\left[-j\beta\frac{\partial F_{+z}}{\partial\xi}+(h_+^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{+z}}{\partial\eta}\right]\\&-\frac{1}{\sqrt{g}h_-^2}\left[j\beta\frac{\partial F_{-z}}{\partial\xi}+(h_-^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{-z}}{\partial\eta}\right]\\H_\xi =&\frac{j}{\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}h_+^2}\left[-j\beta\frac{\partial F_{+z}}{\partial\xi}+(h_+^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{+z}}{\partial\eta}\right]\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{g}h_-^2}\left[j\beta\frac{\partial F_{-z}}{\partial\xi}+(h_-^2+\beta^2)^{1/2}\frac{\partial F_{-z}}{\partial\eta}\right]\right\}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中 $g=q^2(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)$.

应该说明，A_m, B_m 两个常数之间的关系可由边界条件决定，其中只有一个常数是待定的.

根据电场切向分量在边界上为零的条件，即当 $\xi=\xi_0$ 时，$E_z=0, E_\eta=0$ ，令实部和虚部分别等于零，则通过与椭圆光波导中类似的推导 [6] ，得到偶模的特征方程为

$$\begin{vmatrix}a_{1o} & a_{2o}\\ a_{3e} & a_{4e}\end{vmatrix}=0\tag{12}$$

奇模的特征方程为

$$\begin{vmatrix}a_{1e} & a_{2e}\\ a_{3o} & a_{4o}\end{vmatrix}=0\tag{13}$$

其中参数定义如下：

$$a_{1e}=Mc_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_+^2)\alpha_+,\quad a_{2e}=Mc_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_-^2)\alpha_-,$$

$$a_{1o}=\pm Ms_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_+^2)\beta_+,\ a_{2o}=\pm Ms_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_-^2)\beta_-,$$

$$a_{3e}=\frac{1}{h_+^2}[\pm\beta Ms_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_+^2)\theta_+ +(h_+^2+\beta^2)^{1/2}Mc_m^{(1)\prime}(\xi_0,\gamma_+^2)\alpha_+],$$

$$a_{4e}=\frac{1}{h_-^2}[\pm\beta Ms_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_-^2)\theta_- -(h_-^2+\beta^2)^{1/2}Mc_m^{(1)\prime}(\xi_0,\gamma_-^2)\alpha_-],$$

$$a_{3o}=\frac{1}{h_+^2}[\beta Mc_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_+^2)\nu_+ \mp(h_+^2+\beta^2)^{1/2}Ms_m^{(1)\prime}(\xi_0,\gamma_+^2)\beta_+],$$

$$a_{4o}=\frac{1}{h_-^2}[\beta Mc_m^{(1)}(\xi_0,\gamma_-^2)\nu_- \pm(h_-^2+\beta^2)^{1/2}Ms_m^{(1)\prime}(\xi_0,\gamma_-^2)\beta_-],$$

$$\alpha_\pm=\frac{\int_0^{2\pi}ce_m(\eta,\gamma_+^2)ce_m(\eta,\gamma_\pm^2)\mathrm{d}\eta}{\int_0^{2\pi}ce_m^2(\eta,\gamma_+^2)\mathrm{d}\eta},\quad \beta_\pm=\frac{\int_0^{2\pi}se_m(\eta,\gamma_+^2)se_m(\eta,\gamma_\pm^2)\mathrm{d}\eta}{\int_0^{2\pi}se_m^2(\eta,\gamma_+^2)\mathrm{d}\eta},$$

$$\theta_\pm=\frac{\int_0^{2\pi}ce_m(\eta,\gamma_+^2)se_m'(\eta,\gamma_\pm^2)\mathrm{d}\eta}{\int_0^{2\pi}ce_m^2(\eta,\gamma_+^2)\mathrm{d}\eta},\quad \nu_\pm=\frac{\int_0^{2\pi}se_m(\eta,\gamma_+^2)ce_m'(\eta,\gamma_\pm^2)\mathrm{d}\eta}{\int_0^{2\pi}se_m^2(\eta,\gamma_+^2)\mathrm{d}\eta},$$

可以证明，当椭圆趋于圆时，奇模和偶模特征方程 (12) ，(13) 式都变成圆手征波导中模式的特征方程 [2] .

3 导模特性——数值计算结果

本文只对低阶模的偶模和奇模特征方程进行数值求解，研究手征参数对不同椭圆比下的色散曲线、截止波长等特性的影响．在下面的计算中，取 $\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$．在数值计算过程中，必须调用我们自己编制的 Mathieu 函数组成的函数库和积分参数 $\alpha_\pm, \beta_\pm$ 等组成的函数库 (参见文献 [7,8])．

图 1 和图 2 给出了不同椭圆比下椭圆手征波导中 (手征参数 $\chi = 0.5$) 几个低阶偶模和奇模的色散曲线，其中实线和虚线代表椭圆比 $a/b = 2.0$ 和 $a/b = 1.1$ 的椭圆手征波导情形，点线代表 $a/b = 1.0$ 的圆手征波导情形．从图可以看出，椭圆手征波导和圆手征波导 [3,4] 一样，在非手征波导中简并的模式 (如 HE^e_{11} 模和 HE^e_{-11} 模)，在手征波导中简并被解除，即也发生模式分岔，其中一个模 (如 HE^e_{11} 模) 的归一化传播常数 β/k_0 增大，而另一个模 (如 HE^e_{-11} 模) 的归一化传播常数 β/k_0 减小，但它们的截止频率仍相同．另外，在椭圆手征波导中还存在相速度和群速度的符号相反的后向区域，这一点也和圆手征波导 [3] 一样．椭圆手征波导中偶模和奇模的截止频率 k_0b 随椭圆比的增大而减小．对图示情形 (手征参数 $\chi = 0.5$)，偶模的截止频率 k_0b 比奇模的截止频率 k_0b 小．

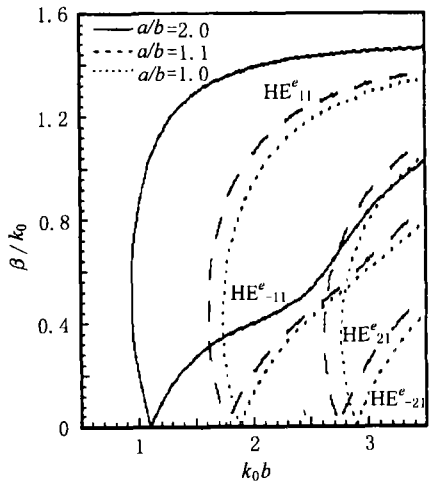

图 1　不同椭圆比下椭圆手征波导中几个低阶偶模的色散曲线 (手征参数 $\chi = 0.5$)

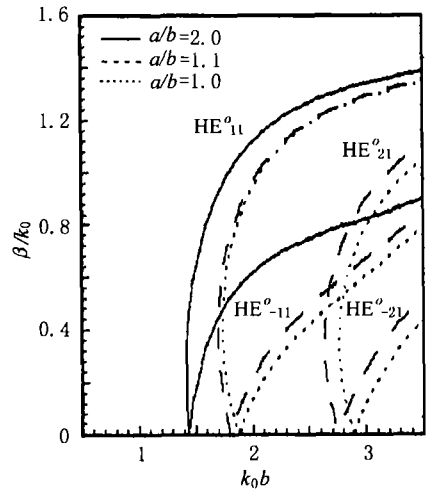

图 2　不同椭圆比下椭圆手征波导中几个低阶奇模的色散曲线 (手征参数 $\chi = 0.5$)

不同手征参数下椭圆手征波导中几个低阶模的归一化截止波长 λ_c/a 随椭圆偏心率 $e(= q/a = \sqrt{1-(b/a)^2})$ 的变化关系如图 3 所示，其中实线和虚线代表手征参数 $\chi = 0.5$ 和 $\chi = 0.8$ 情形，点线代表 $\chi = 0$ 的椭圆非手征波导情形．由图可知，椭圆非手征波导的曲线与文献 [10] 一致，偶模的归一化截止波长 λ_c/a 随椭圆偏心率的变化不大，而奇模的归一化截止波长 λ_c/a 随椭圆偏心率的增大而很快减小．对于圆手征波导情形 $(e = 0, \chi \neq 0)$，虽然偶模和奇模的截止波长相同，但 HE_{11} 模的归一化截止波长 λ_c/a 比圆非手征波导的小，而 HE_{21} 模的归一化截止波长 λ_c/a 比圆非手征波导的大．对于椭圆手征波导，偶模和奇模的归一化截止波长 λ_c/a 的变化趋势与椭圆非手征波导中的相同，但对较大的椭圆偏心率，当手征参数增大时，HE^e_{11} 模的归一化截止波长 λ_c/a 减小而 HE^o_{11} 模的归一化截止波长 λ_c/a 增大．当手征参数较大时，奇模的

归一化截止波长 λ_c/a 超过偶模归一化截止波长 λ_c/a(如图 3 中 $\chi=0.8$ 的虚线所示)，即椭圆手征波导中的第一个导模，当手征参数较小时为 HE_{11}^e 模，但当手征参数较大时为 HE_{11}^o 模．图 4 为一定椭圆比下 $(a/b=2.0)$ 椭圆手征波导中几个低阶偶模和奇模的归一化截止波长 λ_c/a 随手征参数的变化关系，图中显示出，当手征参数小于 0.7 时，第一个导模为 HE_{11}^e 模，当手征参数大于 0.7 时，第一个导模为 HE_{11}^o 模．对于 HE_{21}^e 模和 HE_{21}^o 模的次序，在手征参数为 0.6 时相互交换．

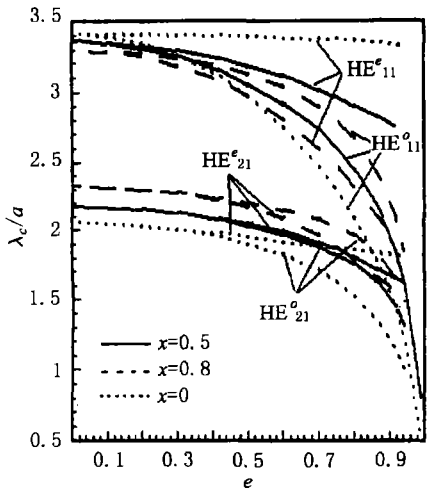

图 3 不同手征参数下椭圆手征波导中几个低阶模的归一化截止波长 λ_c/a 随椭圆偏心率 e 的变化关系

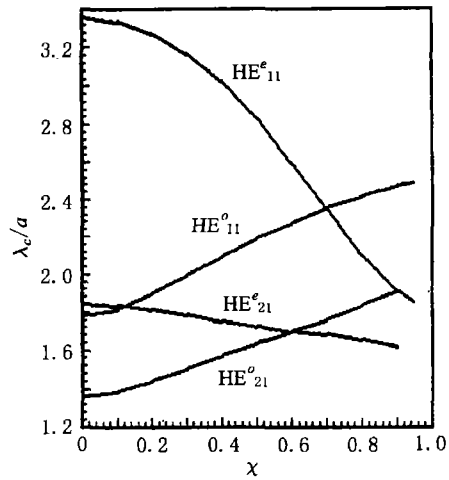

图 4 一定椭圆比下椭圆手征波导中几个低阶偶模和奇模的归一化截止波长 λ_c/a 随手征参数 χ 的变化关系 $(a/b=2.0)$

4 结 论

本文对椭圆手征波导进行了严格的求解，得到了模式场的解析解表达式，并且推出了偶模和奇模的模式特征方程，当椭圆趋于圆时，都退化成圆手征波导情形．用数值计算方法研究了手征参数对椭圆手征波导中导模的色散曲线、截止波长等特性的影响，结果发现在椭圆手征波导中不仅发生模式分岔，而且导模的第一个模式会随手征参数的不同而不同，当手征参数较小时是偶模 (HE_{11}^e 模)，而当手征参数较大时是奇模 (HE_{11}^o 模)．

参 考 文 献

[1] P. Pelet, N. Engheta, The theory of chirowaveguides, IEEE Trans. on AP., 1990, AP-38(1), 90–98.

[2] C. Eftimiu, L. W. Pearson, Guided electromagnetic waves in chiral media, Radio Sci., 1989, 24(3), 351–359.

[3] J. A. M. Svedin, Propagation analysis of chirowaveguides using the finite-element method, IEEE Trans. on MTT., 1990, MTT-38(10), 1488–1496.

[4] S. F. Mahmoud, On mode bifurcation in chirowaveguides with perfect electric walls, J. Electromagnetic Waves and Appl., 1992, 6(10), 1381–1392.

[5] C. R. Pavia, A. L. Topa, A. M. Barbosa, Semileaky waves in dielectric chirowaveguides, Opt. Lett., 1992, 17(23), 1670–1672.

[6] 董建峰，椭圆芯手征光纤的基模特性研究，光学学报，1998, 18(10), 1385–1389.

[7] 董建峰，聂秋华，椭圆光波导解析解及第一个高阶模的截止频率研究，光通信研究，1995, 21(3), 35-39.
[8] 董建峰，聂秋华，双包层椭圆光波导解析解，光学学报，1997, 17(1), 106-111.
[9] Edited by Milton Abramowitz, Irene A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York, Dover Publications Inc., 1965, 721-750.
[10] 张善杰，沈耀春，任意偏心率椭圆波导的本征模序列，电子学报，1994, 22(3), 86-89.

CHARACTERISTICS OF GUIDED MODES IN THE ELLIPTICAL CHIROWAVEGUIDE

Dong Jianfeng Tao Weidong Bai Guiru

(*The Inst. of Opt. Fiber Comm. and Network Tech., Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)

Abstract Analytical solutions of electromagnetic fields in the elliptical chirowaveguide have been studied. The modal fields distribution and modal characteristic equations are obtained. The numerical solutions for the modal characteristic equations of lower-order modes have been investigated. Effects of chirality parameters on the characteristics such as dispersion curves and cutoff wavelengths of guided modes in the elliptical chirowaveguide are presented. The first-order mode will be changed as the chirality parameter increased.

Key words Elliptical chirowaveguide, Chirality parameter, Guided modes

董建峰： 男，1964 年生，副教授，从事光纤方面的研究工作.
陶卫东： 男，1969 年生，讲师，从事光纤方面的研究工作.
白贵儒： 男，1936 年生，教授，长期从事光学，光纤方面的研究工作.