第 24 卷 第 3 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.24 No.3
2002 年 3 月 JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY Mar. 2002

一种具有鲁棒性的基于小波变换的滤波方法 [1]

杨晋生 蔡 靖 丁润涛

(天津大学电子信息工程学院 天津 300072)

摘 要 该文研究了空间分布不均匀信号及不同噪声在小波变换下的不同特性，提出了一种基于小波变换与排序统计滤波相结合的噪声消除方法．该方法利用了不同尺度下小波变换之间的相关特性及不同噪声小波变换的特性并结合排序统计原理自适应地选择小波域局部门限进行降噪滤波．实验证明，该滤波方法对于不同性质噪声都有很好的滤波性能．

关键词 小波变换，多分辨率，多层中值滤波，图像滤波

中图号 TN713, O177.6

1 引 言

在工业环境下和军事对抗中，获取的图像往往受到多种噪声污染，如果不预先对噪声图像进行降噪预滤波，后端处理就难以为继或被处理得面目全非．因此对噪声图像的预滤波是图像处理中的一个重要问题．自从 80 年代以来，小波变换应用在信息处理方面的研究日益增多，出现了不少滤波降噪的新方法 [1−7]．但是，由于小波变换本身是一种线性变换，而国内外的研究大多集中在如何选取一个合适的全局门限，通过将低于该门限的小波系数置 0 同时保持其余小波系数值不变的方法来降噪，因此大多数方法对于类似于高斯噪声的中、短拖尾噪声效果较好，而对于有脉冲噪声等重拖尾噪声污染的图像处理效果并不理想．同时，线性运算往往还造成边缘模糊．本文提出一种利用小波变换与排序统计滤波方法 [8] 相结合来决定滤波局部门限，同时利用不同尺度小波变换之间相关特性来保持边缘的新的滤波方法，实验证明该方法对于不同噪声都有良好的降噪性能，同时还具有良好的边缘保护性能．

2 小波变换与多层中值滤波

2.1 小波变换 定义函数 $f(x)$ 在尺度 s 和位置 x 上的小波变换为

$$W_s f(x) = f * \psi_s(x) \tag{1}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \psi_s(x) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{x}{s}\right) \tag{2}$$

取尺度 $s = 2^j$(j 为整数)．定义 $\psi_{2^j}(x) = (1/2^j)\psi(x/2^j)$，则函数 $f(x)$ 在尺度 2^j 和位置 x 上的二进小波变换为

$$W_{2^j} f(x) = f * \psi_{2^j}(x) \tag{3}$$

二进小波变换 $W_{2^j} f(x) = f * \psi_{2^j}(x)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{W}_{2^j} f(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{\psi}_{2^j}(\omega) \tag{4}$$

重建小波函数 $\chi(x)$ 满足条件：

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(2^j\omega)\hat{\chi}(2^j\omega) = 1 \tag{5}$$

[1] 2000-08-11 收到， 2001-02-19 定稿

国家自然科学基金资助项目 (69772041 号)，高校博士点基金资助项目 (98005610 号)

重建公式为

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_{2^j}f * \chi_{2^j}(x) \tag{6}$$

在实际应用中，信号的分辨率是有限的，因此分辨率应取有限值．我们把变换限定在一个最大尺度 $j=J$ 和最小尺度 $j=0$ 之间． 2^0 表示最高分辨率， 2^J 表示最低分辨率。为了建立小波变换的信号分辨率分解表示，引入函数 $\phi(x)$ ，且其 Fourier 变换满足条件:

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2=\sum_{j=1}^{+\infty}\hat{\psi}(2^j\omega)\hat{\chi}(2^j\omega) \tag{7}$$

由 (5), (7) 式可知， $\lim_{\omega\to 0}|\hat{\phi}(\omega)|=1$ ， Fourier 变换 $\hat{\phi}(\omega)$ 的能量集中在低频，所以 $\phi(x)$ 为低通特性的平滑函数。定义平滑算子 S_{2^j}

$$S_{2^j}f(x)=f*\phi_{2^j}(x),\quad \phi_{2^j}(x)=(1/2^j)\phi(x/2^j) \tag{8}$$

它表示在分辨率为 2^j 时的信号 $f(x)$ 的低通滤波分量。由 (7) 式可以得到

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2-|\hat{\phi}(2^J\omega)|^2=\sum_{j=1}^{J}\hat{\psi}(2^j\omega)\hat{\chi}(2^j\omega) \tag{9}$$

(9) 式表明 $S_1f(x)$ 中所具有的而 $S_{2^j}f(x)$ 中失去的高频成分可以由尺度 2^1 和 2^J 之间的二进小波 $W_{2^j}f(x)$ 恢复。

对于原始信号 $D=(d_n)_{n\in Z}$ ，可以证明存在一个函数 $f(x)\in L^2(R)$ ，使得

$$\forall n\in Z,\quad S_1f(n)=d_n \tag{10}$$

这样，原始信号可以写成 $D=(S_1f(n))_{n\in Z}$ ．定义 $W_{2^j}^d=(W_{2^j}f(n+\omega))_{n\in Z}$、$S_{2^j}^d=(S_{2^j}f(n+\omega))_{n\in Z}$.这里 ω 是由 $\psi(x)$ 决定的取样移位。对于一个粗糙尺度 2^J ，离散序列 $\{S_{2^J}^d f,(W_{2^j}^d f)_{1\le j\le J}\}$ 称做信号 $D=(S_1f(n))_{n\in Z}$ 的二进离散小波变换。

2.2 *多层中值滤波* 设 $\{x_{i,j}\}$ 为原始图像像素，则窗为 $(2N+1)\times(2N+1)$ 的多层中值滤波 [8] 输出 $y_{i,j}$ 为

$$y_{i,j}=\mathrm{med}(y_{\max},y_{\min},x_{i,j}) \tag{11}$$

其中 $y_{\max}=\max(Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)$， $y_{\min}=\min(Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)$， $z_1=\mathrm{med}(x_{i,j-N},\cdots,x_{i,j},\cdots,x_{i,j+N})$， $z_2=\mathrm{med}(x_{i-N,j},\cdots,x_{i,j},\cdots,x_{i+N,j})$， $z_3=\mathrm{med}(x_{i+N,j-N},\cdots,x_{i,j},\cdots,x_{i-N,j+N})$， $z_4=\mathrm{med}(x_{i-N,j-N},\cdots,x_{i,j},\cdots,x_{i+N,j+N})$.

3 算法原理

Mallat 提出了一类特别的小波 [2]，不同性质的奇异点在相临尺度的小波变换中有着不同的相关特性。当奇异点为阶跃点时，相临尺度的小波系数值相等，而当奇异点处于斜坡边缘时，相应大尺度小波系数值要大于小尺度小波变换值；当奇异点为脉冲噪声点时，相应大尺度小波变换值要远远小于小尺度小波变换值。利用这一特性，很容易区分脉冲噪声点和信号的边缘点。

对于高斯白噪声，它对所有小波系数影响是相同的，同时它对信号的低频成分影响较小，通过平滑可以有效地降低高斯噪声；而脉冲噪声只影响少数小波系数，但由于其幅值较大，它

对信号的低频成分影响较大，并通过平滑运算将其影响扩展到周围像素。因此对于这两种噪声的滤除所采用的方法应有所不同。

对于高斯噪声，由于它在整个小波域的分布是一致的，因此采用一个全局门限进行滤波是适宜的。 Daubechies 提出并证明了一个有效的小波收缩算法的门限值 $\lambda=\sigma\sqrt{2\log(n)}$ 。该方法能够十分有效地滤除高斯噪声，但必须有一个先验知识，即必须预先知道噪声的均方差，而在许多实际场合这一点是很难做到的。另外，小尺度边缘的小波系数往往很小，在滤除噪声时往往被同时滤除了，这便在很大程度上造成了边缘模糊。

对于脉冲噪声，噪声点相应小波系数往往很大，因此在小波域不易滤除。即使将其滤除，它在信号低频成分的影响却难以滤除，而其对低频成分影响还很大。究其原因主要是由于脉冲噪声点小波域系数被滤除，其周围像素点在分解 - 重建过程中由于平滑运算而引起脉冲噪声污染点的扩散所造成的。因此对于不同像素点的恢复时，对与其相关像素的小波系数的处理应是不相同的。

本文提出了一种自适应局部门限选取法，在基本上解决了以上问题。

传统的小波降噪方法往往先对图像的小波变换域进行处理，得到处理后的小波系数，然后进行重建。本文提出的算法是在图像重建过程中同时进行小波域的系数处理。对于不同像素点重建所采用的小波系数处理方法是不同的。这样就可以有效地抑制脉冲噪声对周围像素的影响同时很好地保护边缘。

在对图像进行小波分解之前，先对图像进行多层中值滤波，以滤波后得到的图像作为参考图像。多层中值滤波有很好的消除脉冲噪声、保护细节及边缘的特性，但其平滑能力很差。然后对原始图像进行小波分解，得到序列 $\{S_{2^J}^d f,(W_{2^j}^d f)_{1\le j\le J},(W_{2^j}^2 f)_{1\le j\le J}\}$ 。在本文算法中，取 $J=2$ ，于是得到 $S_4^d f, W_2^d f, W_4^d f$ 。

文献 [4] 中给出了二维信号的三次样条小波分解 - 重建的快速算法。

分解算法

$$W_{2^{j+1}}^{1,d}=S_{2^j}^d*G_j,\quad W_{2^{j+1}}^{2,d}=S_{2^j}^d*G_j^T,\quad S_{2^{j+1}}^d=S_{2^j}^d*H_j \tag{12}$$

重建算法

$$S_{2^{j-1}}^d=S_{2^j}^d*\tilde{H}_{j-1}+W_{2^j}^{1,d}f*K_{j-1}+W_{2^j}^{2,d}f*K_{j-1}^T \tag{13}$$

由于每一点像素受噪声污染情况不同，它在图像中所处位置也不同，因此对每一点像素的重建时对与其相关的小波系数的处理应有所不同。对于受脉冲噪声污染的像素的恢复，由于其幅值很大，其小波系数也非常大，所以应该将门限值选得非常大，将最后的低频平滑结果作为输出以最大限度的降低脉冲噪声的影响。而对于非脉冲噪声污染点，其门限就不易选得过大，反之就会引入周围脉冲噪声污染的影响同时会造成边缘模糊。而对于边缘点，其小波系数的降低会引起边缘梯度的下降及边缘模糊，因此应保持其系数不变。

考虑到以上要求，发现图像原始值与其多层中值滤波输出值之间的差值恰好满足上面的要求。通过该差值可以得到一个较理想的局部门限值。同时通过对图像中不同奇异点相临尺度小波变换的相关性分析还发现，处于阶跃边缘点的像素的小波系数不变，而处于斜坡边缘点的像素的小波系数随尺度增大而变大。由此可以增加一个限制条件来保护边缘不受模糊。

本文利用文献 [4] 中所用的小波函数，同时采用以下门限选取函数：

$$T_{i,j}=\max(15(|x_{i,j}-x_{\text{multimed}}|),150) \tag{14}$$

其中 $x_{i,j}$ 为重建样点的原始像素值， x_{multimed} 是该点的窗为 5×5 多层中值滤波后的输出结果。

定义小波系数处理函数

$$\eta_T(y)=\begin{cases}y, & |y|\ge T\\ 0, & |y|<T\end{cases} \tag{15}$$

另外，边缘保护限制条件为：若 $W_2^{1,d}f(x,y) \le W_4^{1,d}f(x,y)$ 则保持该系数 $W_2^{1,d}f(x,y)$ 不变；若 $W_2^{2,d}f(x,y) \le W_4^{2,d}f(x,y)$ 则保持该小波系数 $W_2^{2,d}f(x,y)$ 不变。

在图像滤波过程中，首先根据 (12) 式进行小波分解，然后根据 (13) 式进行重建。其中在每一个像素重建时，与其重建相关的小波系数经 (15) 式处理，其中门限值由 (14) 式决定，并加以边缘保护条件限制。由于每一点像素重建所采用的门限不同，因此即使同一位置的小波系数对于不同像素重建时所采用的值也是不同的。这就有效地避免了脉冲噪声的扩散污染，同时对于高斯噪声进行有效地平滑。同时由于边缘保护条件的存在可以有效地避免边缘模糊现象。

4 实验结果及讨论

为了直观而有效地观察算法效果，本文对不同噪声污染图像进行滤波的模拟实验 (如图 1)。由图 1 可以看出，本文所提出的算法对高斯噪声有很好的平滑特性 (图 1(a), 1(b))，对脉冲噪声有很好的消除能力 (图 1(c), 1(d))，从而对受混合噪声污染的图像有很好的滤波效果 (图 1(e), 1(f))。

(a) $\sigma = 20$ 高斯噪声污染图像　　(b) 图像 (a) 滤波结果　　(c) 1% 脉冲噪声污染图像

(d) 图像 (c) 滤波结果　　(e) $\sigma = 20$、$p = 1\%$ 混合噪声　　(f) 图像 (e) 滤波结果

图 1　该滤波算法对于不同噪声污染图像的滤波效果

表 1 给出了本文提出算法与传统的均值滤波和中值滤波对于不同噪声污染图像滤波后的归一化均方误差 (NMSE) 的比较。其中 NMSE 定义为

$$\mathrm{NMSE} \sum_{i,j}[x(i,j) - y(i,j)]^2 \Big/ \Big[\sum_{i,j} x(i,j)^2\Big] \tag{16}$$

其中 $x(i,j)$ 为无噪原始图像，$y(i,j)$ 为降噪后滤波输出的图像。从表 1 可以看出本文所提出的算法在平滑高斯噪声和处理有脉冲噪声在内的混合噪声的效果均优于均值滤波和中值滤波。

表 1　不同滤波方法效果比较

噪声	$\sigma = 10$	$\sigma = 15$	$\sigma = 20$	$\sigma = 20\ p = 1\%$
本文算法	0.0048246	0.0061439	0.0077389	0.0088699
均值滤波	0.0061941	0.0074324	0.0090358	0.0107413
中值滤波	0.0050402	0.0072636	0.0099652	0.0101911

5 结 论

本文提出了一种利用不同尺度小波变换相关性及小波与排序统计滤波相结合的滤波算法，并给出了模拟实验结果。实验证明，该算法对于不同噪声都有很好的滤波效果，同时具有很好的边缘和细节保护特性。

参 考 文 献

[1] S. G. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, IEEE Trans. on PAMI, 1989, PAMI-11(7), 674–693.

[2] S. Mallat, Sifen Zhong, Characterization of signals from multiscale edges, IEEE Trans. on PAMI, 1992, PAMI-14(7), 710–732.

[3] Yansun Xu, B. Weaver, D. M. Healy, Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique, IEEE Trans. on IP, 1994, IP-3(6), 747–758.

[4] D. L. Donoho, De-noising by soft-thresholding, IEEE Trans. on IT, 1995, IT-41(3), 613–627.

[5] S. Mallat, Wen Liang Hwang, Singularity detection and processing with wavelets, IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2), 617–643.

[6] M. R. Banham, A. K. Katsaggelos, Spatially adaptive wavelet-based multiscale image restoration, IEEE Trans. on IP, 1996, IP-5(4), 619–634.

[7] N. Weyrich, G. T. Warhola, Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising, IEEE Trans. on IP, 1998, IP-7(1), 82–90.

[8] I. Pitas, A. N. Venetsanoponlos, Nonlinear Digital Filters Principles and Application, Kluwer Academic Publishers, 1990.

ROBUST FILTER ALGORITHM BASED ON WAVELET

Yang Jinsheng　　Cai Jing　　Ding Runtao

(*School of Electronic & Information Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

Abstract This paper studies mainly different properties of non-stationary signals and different kinds of noise under wavelet transformation, and presents a novel algorithm based on wavelet transformation and order statistic filter to attenuate noises. The algorithm attenuates the noise by choosing local threshold through the relativity property between different wavelet transformations with different scales, the different properties of different noises under wavelet transform and the order statistical theory. The simulation experiments show that the algorithm has good property for different kinds of noise.

Key words Wavelet transform, Multi-resolution, Multi-median filter, Image filter

杨晋生：　男，1965 年生，副教授，主要研究方为数字信号处理及数字通信.

蔡　靖：　男，1973 年生，博士，主要研究方向为非线性滤波理论、模式识别、计算机视觉、模糊理论论及小波变换等.

丁润涛：　男，1938 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为图象处理、非线性数字滤波、视频技术等.