Oct. 2002

混沌时间序列的 Volterra 自适应预测滤波器定阶 1

郭双冰 肖先赐*

(电子科技大学应用数学系 成都 610054) *(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

摘 要 由于 Volterra 自适应滤波器的阶数对预测性能有较大的影响,在实际预测中,如何确定 Volterra 自适应滤波器的最优阶数就成为一个关键问题。该文运用相空间重构理论,推导出了 Volterra 自适应滤波器的最优阶数等于混沌动力系统的最小嵌入维数. 作者用六种混沌时间序列进行实验,结果表明这种定阶方法在混沌时间序列 Volterra 自适应预测中非常成功,该方法对噪声影响的变化,表现出较好的鲁棒性.

关键词 混沌, Volterra 级数,最小嵌入维数,概率,预测

中图号 TN713

1 引言

一个由确定的非线性动力系统产生的复杂的类似随机的行为,我们称之为混沌现象,这样的动力系统称之为混沌系统。自从美国的气象学家 E.Lorenz 在 1963 年发表了后来以他的名字命名的奇怪吸引子以来,混沌的理论在 30 年来的发展中已经影响到了自然科学,甚至社会科学的众多领域。

随着混沌理论和应用技术研究的不断深入,混沌序列的建模和预测已成为混沌信息处理领域中 90 年代的一个热点 [1-6] 。混沌时间序列的预测问题可以理解成动力系统研究的"逆问题",它是给定相空间中的一串迭代序列,如何构造一个非线性映射来表示这一动力系统,这样的非线性映射就可以作为我们的预测模型。重构相空间理论保证了这种非线性映射的存在。到目前为止,已经发展了许多的混沌时间序列建模和预测的方法。主要的有局部线形模型 [1] ,基于 Taylor 展开的全局模型,神经网络模型 [2] ,径向基函数模型 [3,4],小波神经网络模型 [5] ,Volterra 自适应滤波模型 [6] ,其中,文献 [6] 说明了 Volterra 自适应滤波预测模型能够有效地预测低维混沌时间序列。在工程上,这种模型易于硬件实现,运算量小,特别是工程上常常要求实时性,这种模型的优点就更加突出。但该文只提出了该模型,没有确定自适应滤波器的阶数。由于 Volterra 滤波器的阶数对预测性能有影响,选得过小,预测精度降低,选得过大,运算量增加,不但速度减慢,而且预测精度也会降低。这就提出了如何确定 Volterra 自适应滤波器最优的阶数?对非线性滤波器定阶是一个非常难的问题,因为目前对非线性定阶问题还缺乏理论基础。本文基于相空间重构理论,分析推导了用于混沌时间序列的 Volterra 自适应滤波器的定阶,得出 Volterra 自适应滤波器的最优阶数等于混沌动力系统的最小嵌入维数,并介绍了确定最小嵌入维数的方法。该方法需要的数据较少,便于工程实际应用。

2 混沌时间序列 Volterra 自适应滤波预测模型

混沌时间序列预测模型的理论基础是相空间重构理论。假设观测到的时间序列为 $\{x(t), t = 1, 2, \dots, L\}$,则在 m 维状态空间中利用延迟坐标法重构的一点状态向量可表示为

$$X(t) = [x(t-\tau), x(t-2\tau), \cdots, x(t-m\tau)] \tag{1}$$

¹ 2000-01-28 收到, 2002-07-13 定稿 国家部级基金项目 (批准号: 98JS05.4.1.D.Z0205)

其中 m 为嵌入维数, τ 为延迟时间。 Takens 证明了,如果 $m \geq 2D + 1(D)$ 为原动力系统相空间的维数),重构的 X(t) 是原动力系统相应的一条轨道到 R^m 中的嵌入,由此,可得到 R^m 上的一个动力系统 $F: R^m \to R^m$ 满足

$$X(t+1) = F(X(t)) \tag{2}$$

从而得到了一个函数 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 使得

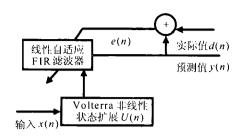


图 1 Volterra 自适应滤波器结构

$$x(t-\tau+1) = f(x(t-\tau), x(t-2\tau), \cdots, x(t-m\tau))$$
(3)

所以说,如果能根据已知的时间序列 x(t) 求出满足 (2) 式 (3) 式 (3) 的 $\hat{F}(\vec{q})$,那我们就得到了一个非线性预测模型。构造一个函数去逼近有许多方法。理论研究和实践表明,实际中大量的非线性系统都可用 Volterra 泛函级数 [7] 来表征,因此可用 Volterra 级数展式来构造混沌时间序列的 Volterra 自适应预测模型。

设非线性离散动力系统的输入为 $\boldsymbol{X}(n)=[x(n),x(n-1),\cdots,x(n-N+1)]^T$,输出为 y(n)=x(n+1) ,则该非线性系统函数的 Volterra 级数展开式表示为

$$x(n+1) = F(\boldsymbol{X}(n))$$

$$= h_0 + \sum_{m=0}^{\infty} h_1(m)x(n-m) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h_2(m_1, m_2)x(n-m_1)x(n-m_2) + \cdots$$
$$+ \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} h_p(m_1, m_2, \cdots, m_p)x(n-m_1)x(n-m_2) \cdots x(n-m_p) + \cdots (4)$$

其中 $h_p(m_1, m_2, \cdots, m_p)$ 为 p 阶 Volterra 核。在实际应用中,这种无穷级数展开无法实现,必须采用有限截断与有限求和形式。最常用的是下列二阶截断 N 项求和形式。写成滤波器的形式为

$$\hat{x}(n) = a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j x(n-j) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i < j}^{N} a_{ij} x(n-i) x(n-j)$$
(5)

(4) 式所表示的非线性 Volterra 自适应滤波器可描述成如图 1 所示的结构 [8] . 非线性扩展后的信号为 $U(n) = [u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M+1)]^T$, M = N + N(N+1)/2.

这种 Volterra 自适应预测模型能够对一些混沌时间序列进行有效的预测,但滤波器的阶数 N 对混沌时间序列预测性能有较大影响, N 选得过大或过小,都将使预测性能变差 (见后面实验结果表 2) ,这就提出了如何确定最优滤波器阶数 N 的问题?

3 Volterra 自适应滤波器的定阶

混沌序列的 Volterra 自适应滤波器形式为 (5) 式。实际应用中,由于滤波器的阶数 N 对混沌时间序列预测性能有较大影响,因此实际应用中,滤波器的阶数 N 如何确定是个值得研究的问题。对线性系统,滤波器的阶数可用 AIC(Akaike Information Critersion) 准则,对非线性系统,滤波器的阶数用 AIC 准则就不合适。对于混沌序列,由 Takens 嵌入定理可知,一个混沌

时间序列要完全描述原动力系统的动态行为,只要嵌入维数 $m \ge 2D + 1$,就能够全面描述其动力学特征。因此,可选择 $N \ge 2D + 1$ 。但在实际的应用中, N 并非越大越好,由于观测到的混沌时间序列是有限长,并叠加有观测和测量噪声,这样选择的 N 并不是最优的阶数。

首先,我们看非线性系统的 Volterra 级数表示 [9]。

对一个非线性系统 T, 设其输入信号为 x(t), 输出信号为 y(t), 则

$$y = Tx \tag{6}$$

假定: (1) 输入信号是因果信号,即当 t < 0 时, x(t) = 0. (2) 系统是有限记忆的,即对系统的 t,当 τ 充分大时, $x(t-\tau)$ 对 y(t) 没有影响。现对输入信号进行采样,采样间隔为 Δt ,记 $x_k = x(t-k\Delta t)$,取 N 充分大,使得当 n > N 时, x_n 对 y(t) 没有影响,则 (6) 式可表为

$$y(t) = f(x_0, x_1, \cdots, x_N) \tag{7}$$

将 f 展成多元幂级数:

$$y(t) = a + \sum_{i=0}^{N} a_i x_i + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} a_{ijk} x_i x_j x_k + \cdots$$
 (8)

則

$$y(t) = a + \sum_{i=0}^{N} a_i x(t - i\Delta t) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x(t - i\Delta t) x(t - j\Delta t)$$
$$+ \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} a_{ijk} x(t - i\Delta t) x(t - j\Delta t) x(t - k\Delta t) + \cdots$$
(9)

这就是 $f(x_0, x_1, \dots, x_N)$ 的离散 Volterra 级数表示。

取非线性系统 T 的输出 y(t) 为输入 x(t) 的下一步值,则

$$x(t+1) = y(t) = f(x_0, x_1, \dots, x_N)$$

$$= a + \sum_{i=0}^{N} a_i x(t - i\Delta t) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x(t - i\Delta t) x(t - j\Delta t)$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} a_{ijk} x(t - i\Delta t) x(t - j\Delta t) x(t - k\Delta t) + \dots$$
(10)

这说明 Volterra 级数的阶数 N 就是非线性函数自变量的个数。

再考虑一个离散系统,其信号值为 $x(t)(t=1,2,\cdots,L)$, 我们构造预测模型的目的就是找出过去信号值与将来信号值之间的某种关系:

$$x(t) = f(x(t-1), x(t-2), \cdots, x(t-m)) + n_t$$
(11)

式中 n_t 代表噪声或由不充分的嵌入产生的附加信息值,显然,当 n 从 1 依次增加时, n_t 会随 m 的增加而降低。对于完全确定的系统,存在一个最小的嵌入维数 m_{\min} ,当 $m \geq m_{\min}$ 时, n_t 中嵌入产生的信息为 0 ,如果再增加 m ,尽管 m_{\min} 中嵌入产生的信息也为 0 ,但观测数据叠加有噪声, n_t 中噪声产生的信息增加,即 n_t 关于 m 是单峰函数, m_{\min} 是

 n_t 的极小点,这说明用过去的 m_{\min} 步信号值表示将来值,损失的信息值最小。因而应该采用 $x(t)=f(x(t-1),x(t-2),\cdots,x(t-m_{\min}))$ 为预测模型,而由 Volterra 级数的表示知道,把非 线性动力系统 $x(t)=f(x(t-1),x(t-2),\cdots,x(t-m_{\min}))$ 表成 Volterra 级数的滤波器阶数就 是最小嵌入维数 m_{\min} ,即 $N_{\mathrm{opt}}=m_{\min}$ 。因此,我们的 Volterra 滤波器阶数就可以选择为最小的嵌入维数。现在 Volterra 滤波器的定阶就转化为确定混沌时间序列的最小嵌入维数。

确定最小嵌入维数的方法有多种^[10-11],大多数方法要求观测数据较多,但实际获得的观测数据较少,因而这些方法适用性不强,而条件概率方法确定最小嵌入维数需要的数据较少,因此我们采用条件概率方法确定最小嵌入维数。

把混沌时间序列嵌入到 m 维空间, $\mathbf{X}(j) = [x(j-\tau), x(j-2\tau), \cdots, x(j-m\tau)]$, $(m=2,3,\cdots)$ 为 m 维空间中的点。

定义 1 定义 X(i) 与 X(i) 的关系为

$$R_m(i,j) = ||X(i) - X(j)||$$
(12)

Ⅱ●Ⅱ表示欧氏范数。

$$R_0(i,j) = |x(i) - x(j)| \tag{13}$$

定义 2 定义概率

$$p(R_0 < \varepsilon, R_m < \delta) = n(R_0 < \varepsilon, R_m < \delta)/M \tag{14}$$

$$p(R_m < \delta) = n(R_m < \delta)/M \tag{15}$$

$$p(R_m < \varepsilon) = n(R_m < \varepsilon)/M \tag{16}$$

其中 M 为所有嵌入向量配对的数目总和, $n(R_0 \le \varepsilon, R_m \le \delta)$, $n(R_0 \le \varepsilon)$ 和 $n(R_m \le \delta)$ 为满足给定距离约束的向量配对的数目总和。

定义3 定义条件概率

$$p_m(\varepsilon|\delta) = p(R_0 \le \varepsilon | R_m \le \delta) \tag{17}$$

由定义不难得出 $p_m(\varepsilon|\delta)$ 的性质。

性质 1 对于完全随机的序列,

$$p_0(\varepsilon|\delta) = p_1(\varepsilon|\delta) = \dots = p_m(\varepsilon|\delta)$$
 (18)

性质 2 如果离散系统具有确定性的法则,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_m > 0$,使得

$$p_m(\varepsilon|\delta_m) = 1 \tag{19}$$

性质 3 在有噪声的情况下, 当 ε 小于噪声的宽度时, $p_m(\varepsilon|\delta_m)$ 不再饱和到 1.

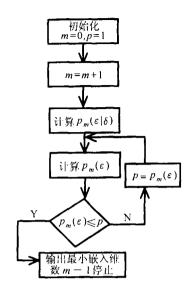


图 2 确定最小嵌入维数

定义 4

$$p_m(\varepsilon) = \max_{\delta > 0} p_m(\varepsilon|\delta) \tag{20}$$

显然, $p_m(\varepsilon)$ 反映了使用 m 变量能表征任意时刻系统状态的程度。

由上可知,寻找最小嵌入维数 m_{\min} ,在没有噪声的情况下,当 $p_{m_0}(\varepsilon)=1$ 时,就认为 m_0 为最小嵌入维数,存在噪声时, $p_{m_0}(\varepsilon)$ 不再饱和到 1,令

$$m_0 = \arg\max_m p_m(\varepsilon) \tag{21}$$

则 m_0 为最小嵌入维数。因此,确定最小嵌入维数的算法流程图如图 2 。

4 Volterra 自适应滤波器实验

本实验的目的: 用混沌时间序列验证 Volterra 自适应滤波器最优的阶数就是混沌动力系统的最小嵌入维数,即 $N_{\mathrm{opt}}=m_{\mathrm{min}}$.

首先对混沌时间序列进行归一化处理,

$$x(l) = \left[y(l) - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} y(l) \right] / \left\{ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \left[y(l) - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} y(l) \right]^{2} \right\}^{1/2}$$
 (22)

其中 y(l) 为原始序列,x(l) 为归一化的混沌时间序列,L 为混沌时间序列的长度,取 $\{x(l)\}500$ 个点用于确定最小嵌入维数, 100 个点用于训练 Volterra 自适应模型,再取其后的 500 个点用于预测验证,以预测相对误差和预测均方误差作为评价标准,预测相对误差定义为

$$p_{\text{err}} = \sum_{l=1}^{L} [x(l) - \hat{x}(l)]^2 / \sum_{l=1}^{L} x^2(l)$$
 (23)

$$p_{\text{var}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} [e(l) - \overline{e}]^2, \quad \overline{e} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} e(l), \quad e(l) = x(l) - \hat{x}(l)$$
 (24)

表 1 列出了六种混沌模型和最小嵌入维数,表 2 列出了六种混沌时间序列预测性能与滤波器阶数的关系,表 3 列出了 Logist 映射产生的混沌时间序列叠加高斯白噪声在不同信噪比下的预测性能与滤波器阶数的关系.

表 1 混沌模型与最小嵌入维数

混沌模型	表达式	最小嵌入维数 m_{\min}					
Logist 映射	x(n+1) = 4x(n)(1-x(n))	2					
Kent 映射	$x(n+1) = \begin{cases} x(n)/a, & x(n) \le a, \\ (1-x(n))/(1-a), & x(n) > a, \end{cases} a = 0.4$	2					
Henon 映射	$x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4x^{2}(n),$ y(n+1) = 0.3x(n-1),	2					
Mackey-Glass 方程	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -0.1x(t) - \frac{0.2x(t-\Delta)}{1+x(t-\Delta)^{10}}, \ \Delta = 17$	3					
Lorenz 方程	$ \begin{vmatrix} \dot{x} = \sigma(x+y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{vmatrix}, \ r = 28, \ \sigma = 10, \ b = \frac{8}{3} $	3					
Rössler 方程	$\begin{cases} \dot{x} = -z - y, \\ \dot{y} = -x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases}, a = 0.15, b = 0.20, c = 10$	3					

表 2 滤波器阶数与预测性能的变化情况及最优阶数

混沌模型		阶数 N					
		1	2	3	4	5	
Logist 映射							
最优滤波器阶	$p_{ m err}$		3.1988×10^{-11}				
$N_{\text{opt}} = 2$	$p_{ m var}$	5.0208×10^{-3}	3.2040×10^{-11}	1.8337×10^{-3}	3.1872×10^{-3}	5.0191×10^{-3}	
Kent 映射		·			_		
最优滤波器阶	$p_{ m err}$	1.1910×10^{-4}					
$N_{\rm opt} = 2$	$p_{ m var}$	1.5387×10^{-4}	1.1148×10^{-4}	1.1094×10^{-3}	1.7681×10^{-3}	1.9674×10^{-3}	
Henon 映射							
最优滤波器阶	$p_{ m err}$	1.2680	7.0330×10^{-5}				
$N_{ m opt} = 2$	p_{var}	1.3962	7.7650×10^{-5}	2.5938×10^{-3}	4.6262×10^{-3}	5.7973×10^{-3}	
Mackey-Glass							
方程	$p_{ m err}$	2.535×10^{-2}	1.3889×10^{-3}				
最优滤波器阶	p_{var}	2.2765×10^{-2}	1.3726×10^{-3}	1.1741×10^{-3}	1.6424×10^{-3}	2.7411×10^{-3}	
$N_{ m opt} \equiv 3$	L .						
Lorenz 映射							
最优滤波器阶	$p_{ m err}$	3.1342×10^{-2}	5.6976×10^{-3}				
$N_{ m opt} = 3$	p_{var}	2.6335×10^{-2}	4.9755×10^{-3}	3.1417×10^{-3}	4.2741×10^{-3}	7.7417×10^{-3}	
Rössler 方程							
最优滤波器阶	$p_{ m err}$	1.0099×10^{-3}					
$N_{ m opt} = 3$	$p_{ m var}$	1.2082×10^{-3}	1.2790×10^{-3}	5.0956×10^{-4}	2.2771×10^{-3}	7.3404×10^{-3}	

表 3 噪声对滤波器阶数的影响

	数 N	SNR (dB)					
		10	15	20	25	ı	
1	$p_{ m err}$	7.5261×10^{-3}	6.0468×10^{-3}	6.0415×10^{-3}	6.0414×10^{-3}	最	
-	p_{var}	5.0928×10^{-3}	5.0884×10^{-3}	5.0418×10^{-3}	5.0338×10^{-3}	优	
2	$p_{ m err}$	7.5851×10^{-7}	1.3633×10^{-9}	2.7577×10^{-11}	2.7238×10^{-3}	滤	
_	p_{var}	7.6165×10^{-7}	1.3667×10^{-9}	2.7606×10^{-11}	2.7267×10^{-11}	波	
3	$p_{ m err}$	2.9828×10^{-3}	2.0851×10^{-3}	2.0828×10^{-3}	2.0828×10^{-3}	器	
_	$p_{ m var}$	1.8898×10^{-3}	1.7925×10^{-3}	1.7809×10^{-3}	1.7801×10^{-3}	阶	
4	$p_{ m err}$	2.6019×10^{-3}	1.8329×10^{-3}	1.8362×10^{-3}	1.8363×10^{-3}	$N_{ m opt}$	
	p_{var}	2.0928×10^{-3}	2.0328×10^{-3}	2.0152×10^{-3}	2.0151×10^{-3}	为	
5	$p_{ m err}$	4.0665×10^{-3}	3.6587×10^{-3}	3.6227×10^{-3}	3.6226×10^{-3}	2	
	p_{var}	3.9288×10^{-3}	3.8918×10^{-3}	3.8909×10^{-3}	3.8907×10^{-3}		

比较表 1 表 2 和表 1 表 3 ,可以发现当 Volterra 自适应滤波器的阶 N 为最小嵌入维数

 m_{\min} 的时候,预测相对误差和预测均方误差最小,当阶数 N 增加或减小,预测性能变差,特别当混沌时间序列叠加有不同信噪比的噪声的时候,该方法确定的阶数表现出较好的鲁棒性。这说明我们确定滤波器的最优阶数等于动力系统的最小嵌入维数是成功的。

5 结 论

本文基于相空间重构理论和非线性系统的 Volterra 级数表示,分析推导出 Volterra 自适应 滤波器的最优阶数等于混沌动力系统的最小嵌入维数,实验结果表明这种定阶方法在混沌时间 序列 Volterra 自适应预测中非常成功,该方法对噪声影响的变化,表现出较好的鲁棒性。这将 促使 Volterra 自适应滤波预测方法在工程上的应用。

参考文献

- J. D. Framer, J. J. Sidorowich, Predicting chaotic time series, Phys. Rew. Lett., 1987, 59(8), 845-848.
- [2] R. Gencay, Nonlinear prediction of noise time series with feedforward network, Phys. Lett. A, 1994, 187(6), 397-403.
- [3] M. Casdal, Nonlinear prediction of chaotic time series, Physica D, 1989, 35(3), 335-356.
- [4] 王明进,程乾生, Kohonen 自组织网络在混沌时间序列预测中的应用,系统工程与理论实践, 1997, 17(7), 12-18.
- [5] L. Cao, Y. Hong, H. Fang, G. He, Predicting chaotic time series using wavelet network, Physica D, 1995, 85(2), 225-238.
- [6] 张家树、肖先赐、混沌时间序列的 Volterra 自适应预测,物理学报, 2000, 49(3), 397-403.
- [7] I. W. Standberg, On Volterra expansions for time varying nonlinear systems, IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1983, 30(2), 61-67.
- [8] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, Englewood Cloffs, NJ, Prentice Hall, 1991, 432-439.
- [9] 柳重堪,信号处理的数学方法,南京,东南大学出版社, 1992,351-359.
- [10] Zoran Aleksic, Estimating the embedding dimension, Physica D, 1991, 52(3), 362-368.
- [11] 叶中行, 龙如军, 混沌时间序列的区间预测, 上海交通大学学报, 1997, 31(7), 7-12.

DETERMINING RANK OF VOLTERRA ADAPTIVE FILTER OF CHAOTIC TIME SERIES

Guo Shuangbing Xiao Xianci

(Dept. of Electron. Eng., Univ. of Electron. Sci. and Tech. of China, Chenquu 610054, China)

Abstract As the rank of Volterra adaptive filter interferes with predictive performance, how to determine the optimal rank of Volterra adaptive filter becomes a key problem in practical prediction. Using theory of phase space reconstruction, this paper derives that the optimal rank of Volterra adaptive filter equals the lowest embedding dimension of chaotic dynamical systems. It is shown through some chaotic series experiments that this method is successful in Volterra adaptive predication and robust to the noise of different levels added to the chaotic time series.

Key words Chaos, Volterra series, The lowest embedding dimension, Probability, Prediction

郭双冰: 男, 1969 年生, 博士, 现主要从事人工神经网络, 混沌信号处理, 模糊数学等方面的研究.

肖先赐: 男, 1933 年生,教授,博士生导师,现主要从事信号处理及其在雷达、通信和电子对抗等方面应用的教学和研究工作.