

用非线性理论阐述正弦反馈振荡器的 频率和幅度稳定度

孔俊宝 刘华平

(南京邮电学院, 南京 210003)

摘要 首先, 本文对用于近似正弦反馈振荡器频率稳定度分析的线性理论作了简要的回顾。然后应用描述函数法和判决方程法导出了非线性近似正弦反馈振荡器的振荡频率和振荡幅度稳定度的新的表达式。最后对导致用描述函数法和判决方程法导出的振荡频率稳定度不同的内在原因进行了详细的论述。

关键词 反馈振荡器; 频率稳定度; 幅度稳定度; 描述函数法; 判决方程法

一、引言

振荡器的振荡频率和幅度稳定度是评价振荡器质量好坏的重要参数。用经典的线性稳定理论^[1,2]讨论所谓线性振荡器^[1]是较恰当的。当振荡器的特性不能用线性振荡器来近似时, 振荡频率和幅度稳定性理论就变得比较复杂。本文提出了一个关于近似正弦非线性反馈振荡器的振荡频率和幅度的非线性原理。

二、经典的线性稳定理论

通常的反馈振荡器可用图1来表示。

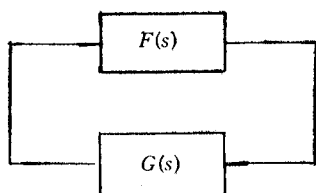


图1 单环反馈振荡器

图1中的 $F(s)$ 为一放大器, 而 $G(s)$ 为线性反馈。振荡器的特性方程为^[2]

$$G(s)F(s) = 1, s = j\omega \quad (1)$$

对(1)式取对数

$$\ln[G(s)F(s)] = \ln[G(j\omega)F(j\omega)] = 0 \quad (2)$$

从而得到

$$\ln|FG| + j(\varphi_F + \varphi_G) = 0 \quad (3)$$

(3) 式可分解为

$$\ln|FG| = 0 \quad (4)$$

$$\varphi_F + \varphi_G = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

(4) 式称为振荡幅度条件, 而 (5) 式称为振荡频率条件。对 (4) 式和 (5) 式求微分

$$\partial \ln |FG| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} d\omega_0 + d_p \ln |FG| = 0 \quad (6)$$

$$\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} d\omega_0 + d_p(\varphi_F + \varphi_G) = 0 \quad (7)$$

(6) 式和 (7) 式中的 ω_0 为振荡频率;

$$d_p \ln |FG| = \sum_{i=1}^n (\partial \ln |F| / \partial b_i) db_i + \sum_{k=1}^m (\partial \ln |G| / \partial p_k) dp_k \quad (8a)$$

$$d_p(\varphi_F + \varphi_G) = \sum_{i=1}^n (\partial \varphi_F / \partial b_i) db_i + \sum_{k=1}^m (\partial \varphi_G / \partial p_k) dp_k \quad (8b)$$

上两式中, $b_i, i = 1, 2, \dots, n$, 为放大器 F 的各个参量; $p_k, k = 1, 2, \dots, m$, 为线性反馈传递函数 G 的各个参量。

由 (7) 式可得

$$d\omega_0 = -d_p(\varphi_F + \varphi_G) / [\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] \quad (9)$$

当 $|\partial \varphi_F / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}| \ll |\partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}|$ 时

$$d\omega_0 \approx -d_p(\varphi_F + \varphi_G) / [\partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\omega_0 / \omega_0 &\approx -d_p(\varphi_F + \varphi_G) / [\omega_0 \partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] \\ &= -d_p(\varphi_F + \varphi_G) / S_F \end{aligned} \quad (11)$$

上式中的 $S_F = \omega_0 \partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}$ 称为“频率稳定因子”。将 (9) 式代入 (6) 式得

$$\begin{aligned} \partial \ln |FG| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} d_p(\varphi_F + \varphi_G) \\ - d_p \ln |FG| [\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

若假定 F 是理想放大器, 将 $\partial \ln |F| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} = 0$, $\partial \varphi_F / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} = 0$ 和 $d_p \varphi_F = 0$ 代入 (12) 式则得

$$\begin{aligned} \partial \ln |G| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} d_p \varphi_G - d_p \ln |F| (\partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}) \\ - d_p \ln |G| [\partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

整理 (13) 式, 可求得 $d_p \ln |F|$ 为

$$\begin{aligned} d_p \ln |F| &= -d_p \ln |G| \\ &\quad + (\partial \ln |G| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} d_p \varphi_G) / (\partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}) \end{aligned} \quad (14)$$

上式决定了图 1 中反馈环的增益变化量。

一般情况下, 近似正弦振荡器实际上是非线性系统, 它不能满足 (12) 式。所以, 必须将经典的振荡频率稳定度的线性理论加以扩展。

三、描述函数和判决方程的应用

1. 描述函数的应用^[3]

描述函数是用来代表一个非线性传递函数的近似等效线性(或称准线性)传递函数的函数; 它等于傅立叶分析所确定的非线性输出的基波分量与正弦输入信号之比。

将描述函数法用到上述问题中, 可将图 1 等效成图 2。故 (1) 式 $F(s)G(s) = 1$ 可变换为

$$\begin{aligned}
 F(A, j\omega)G(j\omega) &= |F| \exp(j\varphi_F) |G| \exp(j\varphi_G) \\
 &= |FG| \exp[j(\varphi_F + \varphi_G)] = 1
 \end{aligned} \quad (15)$$

上式中, $F(A, j\omega)$ 为图 1 中放大器的描述函数。将 (15) 式的实部和虚部分别进行微分, 得到

$$\begin{aligned}
 d_p \ln |FG| + (\partial \ln |F| / \partial A|_{A=A_0}) dA_0 \\
 + (\partial \ln |FG| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}) d\omega_0 = 0
 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned}
 d_p(\varphi_F + \varphi_G) + (\partial \varphi_F / \partial A|_{A=A_0}) dA_0 \\
 + [\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] d\omega_0 = 0
 \end{aligned} \quad (16b)$$

(16a) 和 (16b) 两式可写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \ln |F|}{\partial A} \Big|_{A=A_0} & \frac{\partial \ln |FG|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ \frac{\partial \varphi_F}{\partial A} \Big|_{A=A_0} & \frac{\partial(\varphi_F + \varphi_G)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dA_0 \\ d\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_p \ln |FG| \\ -d_p(\varphi_F + \varphi_G) \end{bmatrix} \quad (17)$$

令

$$\mathbf{Y}(\omega_0, A_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln |F|}{\partial A} \Big|_{A=A_0} & \frac{\partial \ln |FG|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ \frac{\partial \varphi_F}{\partial A} \Big|_{A=A_0} & \frac{\partial(\varphi_F + \varphi_G)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \end{bmatrix} \quad (18)$$

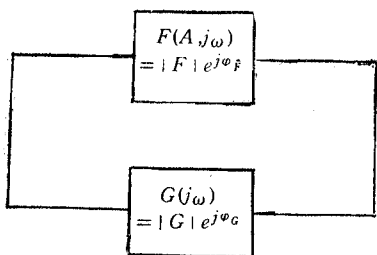


图 2 图 1 的描述函数等效图

未知量 dA_0 和 $d\omega_0$ 必须满足 (17) 式。首先必须肯定 (17) 式有解, 也就是说方程组 (17) 是相容的。否则对这个问题的讨论没有意义。在这个前提下:

(1) 若 $\det \mathbf{Y}(\omega_0, A_0) \approx 0$, 这时 dA_0 与 $d\omega_0$ 将成近似线性关系, (16a) 和 (16b) 式可转化成同样的形式。将 (16b) 式改写成如下形式

$$\begin{aligned}
 d\omega_0 &= [-d_p(\varphi_F + \varphi_G)] / [\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] \\
 &\quad - [(\partial \varphi_F / \partial A|_{A=A_0}) dA_0] / [\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}]
 \end{aligned} \quad (19)$$

在 (19) 式中, 若

$$(\partial \varphi_F / \partial A|_{A=A_0}) / [\partial(\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}] = 0$$

则表示振荡幅度 A_0 的变化对振荡频率稳定度无影响。

(2) 若 $\det \mathbf{Y}(\omega_0, A_0) \neq 0$, 则 (17) 式有唯一的一组解, 且 $\mathbf{Y}^{-1}(\omega_0, A_0)$ 存在, 求解方程组 (17) 可得

$$\begin{bmatrix} dA_0 \\ d\omega_0 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}(\omega_0, A_0) \begin{bmatrix} -d_p \ln |FG| \\ -d_p(\varphi_F + \varphi_G) \end{bmatrix} \quad (20)$$

由 (20) 式得

$$dA_0 = \delta / [\det \mathbf{Y}(\omega_0, A_0)] \quad (21)$$

在 (21) 式中

$$\delta = (\partial \ln |FG| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}) d_p (\varphi_F + \varphi_G) - d_p \ln |FG| [\partial (\varphi_F + \varphi_G) / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}]$$

δ 称为“增益失配系数”。由 (21) 式可见

(a) 振荡幅度的变化 dA_0 与增益失配系数 δ 成正比;

(b) “线性振荡”时, 由 (12) 式可知 $\delta = 0$, 它意味着此时的振荡振幅为一常数。

若某振荡器的反馈网络具有带通特性, 且其放大器 F 为一个截止频率远大于振荡频率 ω_0 的宽带放大器, 则 (20) 式可进一步简化为

$$\begin{aligned} \partial \ln |FG| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} &= \partial \ln |F| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} \\ &+ \partial \ln |G| / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$|\partial \varphi_F / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}| \ll |\partial \varphi_G / \partial \omega|_{\omega=\omega_0}| \quad (23)$$

将 (22) 和 (23) 式代入 (20) 式可得

$$dA_0 = \delta \omega_0 / [S_F (\partial \ln |F| / \partial A|_{A=A_0})] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} d\omega_0 / \omega_0 &= [-d_p (\varphi_F + \varphi_G) / S_F] \\ &+ [(\partial \varphi_F / \partial A|_{A=A_0}) / (\partial \ln |F| / \partial A|_{A=A_0})] [d_p \ln |FG| / S_F] \end{aligned} \quad (25)$$

(25) 式中的等号右边第二项

$$[(\partial \varphi_F / \partial A|_{A=A_0}) / (\partial \ln |F| / \partial A|_{A=A_0})] [d_p \ln |FG| / S_F] \quad (26)$$

称为“非线性校正项”。由 (24) 和 (25) 式可见:

(a) 增大 S_F , 可使 ω_0 的相对变化量 $d\omega_0 / \omega_0$ 减小;

(b) 增大 $\partial \ln |F| / \partial A|_{A=A_0}$, 可使 A_0 的变化量 dA_0 减小;

(c) 增大 $\partial \ln |F| / \partial A|_{A=A_0}$, 也可使“非线性校正项”对 $d\omega_0 / \omega_0$ 的影响减小。

2. 判决方程的应用

图 1 所示的非线性近似正弦振荡可用判决方程法^[4]来描述

$$\begin{aligned} d_N(A, \omega) &= F(j\omega)G(j\omega) + Q_1(j\omega)A^2 \\ &+ Q_2(j\omega)A^4 + \cdots + Q_N(j\omega)A^{2N} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

上式中的 N 是判决方程的阶数。关于 $Q_1(j\omega)$, $Q_2(j\omega)$, $\cdots$, $Q_N(j\omega)$ 的表达式和含义可参阅文献[4]。

将 (27) 式写成描述函数形式为

$$F'(A, j\omega)G(j\omega) = 1 \quad (28)$$

上式中

$$F'(A, j\omega) = F(j\omega) + \frac{Q_1(j\omega)A^2 + Q_2(j\omega)A^4 + \cdots + Q_N(j\omega)A^{2N}}{G(j\omega)} \quad (29)$$

(28) 式和 (15) 式具有相同的形式, 因而本节前部分得出的结论都可以用在这里。但实质上 (15) 式中的 $F(A, j\omega)$ 和 (28) 式中的 $F'(A, j\omega)$ 是有差别的, $F(A, j\omega)$ 仅与放大器 F 的参数有关, 而 $F'(A, j\omega)$ 不仅与放大器 F 的参数有关, 而且与线性反馈网络的传递函数 $G(j\omega)$ 有关。导致这个差别的原因何在? 下面将用具体实例论述这个问题。

四、描述函数法与判决方程法的差别和联系

以图 3 所示的文氏桥振荡器为例, 其放大器用非线性压控电压源替代的电路如图 4

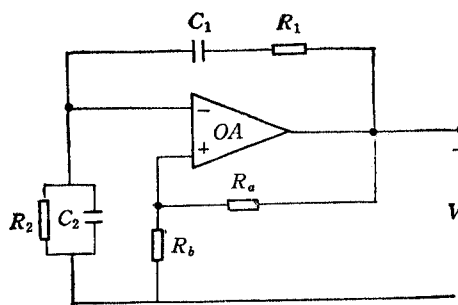


图 3 文氏桥振荡器

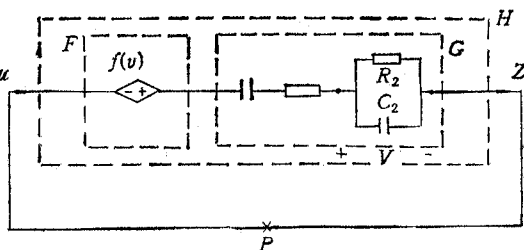


图 4 图 3 的等效电路

所示。

在非线性振荡器中,非线性器件的偶次幂项对基波解不起作用^[5],故可设压控电压源用以下幂级数来描述

$$f(v) = a_1 v + a_3 v^3 + a_5 v^5 \quad (30)$$

于是放大器的描述函数可写成

$$F(A, j\omega) = a_1 + (3/4)a_3 A^2 + (5/8)a_5 A^4 \quad (31)$$

线性反馈传递函数为

$$G(S) = SR_2 C_1 / [S^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + S(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) + 1] \quad (32)$$

将(31)和(32)式代入(15)式得

$$[a_1 + (3/4)a_3 A^2 + (5/8)a_5 A^4]G(j\omega) = 1 \quad (33)$$

由(31)式可知

$$\varphi_F = 0^\circ \quad (34)$$

进而得

$$\partial \varphi_F / \partial A |_{A=A_1} = 0 \quad (35)$$

$$\partial \varphi_F / \partial \omega |_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (36)$$

$$d_p(\varphi_F) = 0 \quad (37)$$

由于文氏桥振荡器的线性反馈网络具有带通特性,将(35),(36),(37)式代入(25)式得

$$\partial \omega_0 / \omega_0 = -d_p(\varphi_G) / S_F \quad (38)$$

应用判决方程法时,放大器的前五阶传递函数为

$$F_1(s_1) = a_1 \quad (39a)$$

$$F_2(s_1, s_2) = 0 \quad (39b)$$

$$F_3(s_1, s_2, s_3) = a_3 \quad (39c)$$

$$F_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = 0 \quad (39d)$$

$$F_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = a_5 \quad (39e)$$

由文献[4]知

$$\Omega_1(j\omega) = (3/4)a_3 G(j\omega) \quad (40)$$

$$\Omega_2(j\omega) = (1/16)\{[3a_5^2 G(j\omega)G(3j\omega)/(1 - a_1 G(3j\omega))] + 10a_5 G(j\omega)\} \quad (41)$$

将 (39a), (40) 和 (41) 式代入 (27) 式的二阶判决方程得

$$F^1(A, j\omega) = [a_1 + (3/4)a_3A^2 + (5/8)a_5A^4] + (3/16)[a_3^2G(3j\omega)/(1 - a_1G(3j\omega))]A^4 \quad (42)$$

上式中的等号右边第一项和 (31) 式相同; 第二项

$$(3/16)[a_3^2G(3j\omega)/(1 - a_1G(3j\omega))]A^4 \quad (43)$$

是高次谐波对基波的作用项。由 (42) 式得

$$\varphi_F' = \arctg \left\{ \frac{\operatorname{Im} \left[\frac{3}{16} \frac{a_3^2 G(3j\omega)}{1 - a_1 G(3j\omega)} A^4 \right]}{\operatorname{Re} \left[\frac{3}{10} \frac{a_3^2 G(3j\omega)}{1 - a_1 G(3j\omega)} A^4 \right] + a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2 + \frac{5}{8} a_5 A^4} \right\} \quad (44)$$

由上式可知

$$\varphi_F' \approx 0 \quad (45)$$

$$\partial \varphi_F' / \partial A|_{A=A_0} \approx 0 \quad (46)$$

$$\partial \varphi_F' / \partial \omega|_{\omega=\omega_0} \approx 0 \quad (47)$$

$$d_p(\varphi_F') \approx 0 \quad (48)$$

将 (46), (47) 和 (48) 式考虑进去研究 (25) 式, 则会看到振荡频率的相对变化 $d\omega_0/\omega$ 包含以下三项:

$$d\omega_0/\omega_0 = -d_r(\varphi_G)/S_F - d_p(\varphi_F')/S_F + \text{“非线性校正项”} \quad (49)$$

比较 (38) 和 (49) 两式可见: (38) 式中缺少了 $-d_p(\varphi_F')/S_F$ 和“非线性校正项”两项。

导致 (38) 式和 (49) 式之间差异的原因就是描述函数法忽略了所有高次谐波对基波的影响; 而判决方程法则计入了高次谐波对基波的影响。

求自治振荡基波解的判决方程法是一个精度较高的方法, 文献[4]中利用沃尔泰拉 (Volterra)^[4] 级数推导关于振荡基波解的判决方程时采用了一个巧妙的办法来考虑高次谐波对基波的作用。在不考虑高次谐波对基波的影响时, 我们将采用沃尔泰拉级数导出的判决方程称作“准判决方程”。下面我们文氏桥振荡器为例证明“准判决方程”同描述函数法得出的方程完全相同。

在图 4 中, 由于忽略所有高次谐波, 故可设定系统 H 的输入为

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos \omega t \\ &= (1/2)A[\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)] \end{aligned} \quad (50)$$

由级联系统传递函数的性质^[6], 可求得系统 H 的前五阶传递函数为

$$H_1(s_1) = a_1 G(s_1) \quad (51a)$$

$$H_2(s_1, s_2) = 0 \quad (51b)$$

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = a_3 G(s_1 + s_2 + s_3) \quad (51c)$$

$$H_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = 0 \quad (51d)$$

$$H_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = a_5 G(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5) \quad (51e)$$

令 $\omega_1 = \omega$, $\omega_{-1} = -\omega$, $A_{-1} = A_1 = A/2$ 则

$$u(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r \exp(j\omega_r t) \quad (52)$$

在图 4 中 P 点开环后,系统 H 在输入 $u(t)$ 作用下的输出 $z(t)$ 为

$$z(t) = \sum_{i=1}^5 z_i(t) \quad (53)$$

其中

$$z_i(t) = \sum_{l, \dots, l_i = -1, 1, \dots} A_l \cdots A_{l_i} H_i(j\omega_l, \dots, j\omega_{l_i}) \times \exp[j(\omega_l + \dots + \omega_{l_i})t] \quad (54)$$

由于图 4 是一个闭环系统,在 P 点闭环后,根据谐波平衡原理可知,振荡解存在的充分必要条件是 $u(t)$ 必须等于 $z(t)$ 的基波分量,故可得

$$\begin{aligned} & (A/2)[a_1 + (3/4)a_3A^2 + (5/8)a_5A^4]G(j\omega)\exp(j\omega t) \\ & + (1/2)A[a_1 + (3/4)a_3A^2 + (5/8)a_5A^4]G(-j\omega)\exp(-j\omega t)] \\ & = (A/2)[\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)] \end{aligned} \quad (55)$$

由 (55) 式可得到

$$[a_1 + (3/4)a_3A^2 + (5/8)a_5A^4]G(j\omega) = 1 \quad (56)$$

(56) 式就是前面定义的“准判决方程”,它与由描述函数法导出的振荡特性方程 (33) 式完全相同。由此,我们可以得出结论:在自治非线性振荡电路的分析方面,描述函数法忽略了所有高次谐波对基波的影响,是判决方程法的一种近似。从这里也就不难理解导致 (38) 和 (49) 式差异的原因。故在分析非线性近似正弦振荡器频率稳定度时,当电路中高次谐波项不能忽略时,利用描述函数法可能导致不精确的结果。

五、结 束 语

本文将描述函数法和判决方程法应用于非线性近似正弦反馈振荡器振荡频率和幅度稳定度的分析。导出了振荡频率和幅度稳定度的新的表达式,并通过引入一个“增益失配系数” δ ,论证了对“线性振荡器”来说 δ 等于零。对导致应用描述函数法和判决方程法求得的振荡频率稳定度不同的内在原因进行了论述,并定义了一个“准判决方程”的概念。通过实例证明了“准判决方程”和由描述函数法得出的振荡特性方程完全相同。从而较清楚地论证了在非线性振荡分析方面,描述函数法忽略了所有高次谐波对基波的影响,是判决方程法的一种近似。

参 考 文 献

- [1] R. E. Stuffle, P. M. Lin *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-27** (1980) 10, 882—892.
- [2] R. Wojtyna, A. Borys, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-33** (1986) 4, 418—424.
- [3] A. Gelb, W. E. Vander Velde, *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design*, New York: McGraw-Hill, (1968).
- [4] L. O. Chua, Y. S. Tang, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-29** (1982) 3, 150—168.
- [5] 张肃文,非线性振荡引论,高等教育出版社,北京,1983年,第三章.
- [6] L. O. Chua, C. Y. Ng, *Electron Circuit System*, **3** (1979) 3, 165—185.

NONLINEAR THEORIES OF FREQUENCY AND AMPLITUDE STABILITY IN SINUSOIDAL FEEDBACK OSCILLATORS

Kong Junbao Liu Huaping

(*Nanjing Institute of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003*)

Abstract First, the linear theories of frequency stability in nearly sinusoidal feedback oscillators are simply reviewed. Then, the describing function method and determining equation approach are applied to obtain new expressions for the oscillation-frequency and the oscillation-amplitude stability of nonlinear nearly sinusoidal feedback oscillators. Finally, the differences of the expressions of oscillation-frequency stability derived from describing function method and determining equation approach are presented, and the relationship between describing function method and determining equation approach is studied.

Key words Feedback oscillator; Oscillation-frequency stability; oscillation-amplitude stability; Describing function method; Determining equation approach.