

# $n$ 端等效子网络的构造

黄东泉 刘佩仙

(福州大学, 福州 350002)

**摘要** 本文证明了  $n$  端子网络的等效电路构造方法, 并给出了参考点转移前后的节点方程的转换关系式。这不仅具有理论意义, 而且在分析计算大规模电路时, 对提高运算速度和节省内存都有实际工程意义。

**关键词**  $n$  端子网络; 等效电路;  $n$  端短路导纳函数

## 一、引言

随着科学技术的发展, 人们对电路的研究分析, 并不总要进行旨在确定电路中任意位置的电压电流的计算, 其兴趣往往只局限于电路中某一部分的电压电流计算分析, 促进了“黑盒子”概念的发展; 另一方面, 电路的规模越来越大, 因而分析计算也越来越费时, 对计算机的容量要求也越来越大, 这对普遍使用的小型计算机来说, 是个困难。如何满足这些客观上的需要, 一些学者多从计算方法上提出一些办法, 但缺乏从等效网络的构造上予以解决。文献[1,2]给出将一个线性非互易多射线星形网络变成等效多角形的系统方法。显然, 这方法对一个内部含有  $q$  个节点的  $n$  端网络来说, 需要运算  $q$  次, 实在费事, 不可取。本文针对这个问题进行探讨。

## 二、基本原理和特性

设在大规模电路中有一个子网络  $N$ , 见图1, 它通过  $n$  个端点与外电路关联, 而  $N$  的内节点有  $q$  个。为叙述方便, 不妨将整个电路用图 2(a) 表示; 图 1 的  $N$  即图 2(a) 中的  $N_B$ , 它通过节点  $1, 2, \dots, n$  (也可记为子网络  $N_C$ ) 与子网络  $N_A$  (内节点为  $a_1, a_2, \dots, a_i$ ) 关联。设节点  $n$  为参考点,  $N_A$  与  $N_B$  之间无耦合, 图 2(a) 的节点电压方程可写成<sup>[3]</sup>

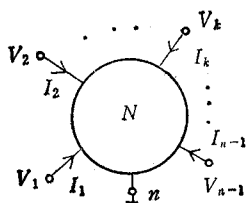


图1  $n$  端子网络  $N$

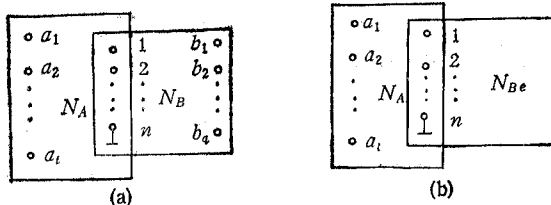


图2 将  $N_B$  中内节点消去  
(a) 整个电路 (b) 消去  $N_B$  中的内节点

$$\begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} & 0 \\ Y_{A21} & Y_{A22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \\ V_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{B11} & Y_{B12} \\ 0 & Y_{B21} & Y_{B22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{nA} \\ J_{nC} \\ J_{nB} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中  $V_A, V_C, V_B$  分别为子网络  $N_A, N_C, N_B$  的节点电压列向量;  $Y_{A11}, Y_{A12}, \dots$  均为节点导纳分矩阵;  $J_{nA}, J_{nC}, J_{nB}$  为节点电流源列向量; 节点  $1, 2, \dots, n$  之间的支路参数均在  $Y_{A22}$  中考虑。从(1)式第3式可解出  $[V_B]$ , 代入(1)式的第1, 2式, 即得消去  $N_B$  中  $q$  个内节点后的节点方程:

$$\begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} \\ Y_{A21} & Y_{A22} + Y_{B11} - Y_{B12}Y_{B22}^{-1}Y_{B21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{nA} \\ J_{nC} - Y_{B12}Y_{B22}^{-1}J_{nB} \end{bmatrix} \quad (2)$$

(2)式指出: (1)消去  $N_B$  的内节点  $V_B$  后, 图2(a)可用图2(b)表示。其中  $N_{Be}$  是  $N_B$  的等效电路, 它对  $N_A$  无影响, 只是在  $[Y_{A22}]$  中增加了  $(Y_{B11} - Y_{B12}Y_{B22}^{-1}Y_{B21})$ , 在  $[J_{nC}]$  中增加了  $(-Y_{B12}Y_{B22}^{-1}J_{nB})$ 。(2)  $N_B$  中独立源存在与否, 只影响图2(b)中的  $[J_{nC}]$ , 而对  $[V_C]$  的节点导纳矩阵无影响。(3)  $N_{Be}$  等效电路的存在条件为  $[Y_{B22}]$  为非奇异的。了解这些特性, 对作出图1子网络  $N$  的  $n$  端等效电路是很有帮助的。

### 三、 $n$ 端等效子网络的构造

现在研究如何构造子网络  $N$  的等效  $n$  端子网络, 即图2(b)中的  $N_{Be}$ 。

**定理** 线性非互易  $n$  端子网络  $N$  (图1) 当  $N$  与外电路无耦合, 且它的内节点导纳矩阵为非奇异时, 可按下列规则构造其等效子网络  $N_e$ :

**规则 1** 从参考点  $n$  至节点  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, (n-1)$ ) 给定一个电流源  $I_{ij}$ , 它的值等于  $N$  的  $n$ -端短路电流  $J_j$ , 即

$$I_{ij} \text{ (在 } N_e \text{ 中)} = J_j \text{ (在 } N \text{ 中)} |_{V_1=V_2=\dots=V_{n-1}=0}$$

式中  $J_j$  为  $N$  中流入节点  $j$  的电流。

**规则 2** 从节点  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, (n-1)$ ) 至参考点  $n$ , 给定  $(n-2)$  个 VCCS 受控源  $I_{ik} = g_{ik}V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ , 但  $k \neq j$ ); 这些 VCCS 的控制系数  $g_{ik}$  等于网络  $N'$  (将  $N$  中独立源去掉之后, 即得  $N'$ ) 的  $n$ -端短路转移导纳, 即

$$g_{ik} = \left. \frac{J'_j}{V'_k} \right|_{\text{在 } N' \text{ 中当 } V'_1=V'_2=\dots=V'_{n-1}=0, V'_j \neq 0}$$

式中  $J'_j$  为流出节点  $j$  的电流。

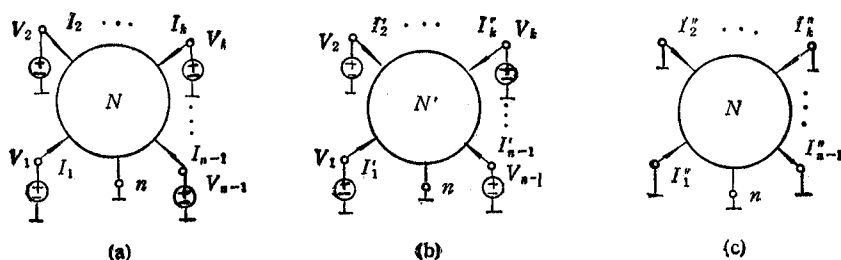
**规则 3** 在节点  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, (n-1)$ ) 和参考点  $n$  之间给定一个支路导纳  $y_{jn}$ , 它等于  $N'$  中节点  $j$  和参考点  $n$  之间的  $n$ -端短路驱动点导纳, 即

$$y_{jn} = \left. \frac{J'_j}{V'_j} \right|_{\text{在 } N' \text{ 中当 } V'_1=V'_2=\dots=V'_{n-1}=0, V'_j \neq 0}$$

**证明** 根据替代原理, 当单独研究子网络  $N$  时, 可用图3(a)代替图1。根据叠加原理, 各端点上的电流可表示为

$$I_k = I'_k + I''_k, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1)$$

式中  $I'_k$  为仅外部电压源作用下的电流, 见图3(b);  $I''_k$  为仅内部电源作用下的电流,

图3 单独考虑  $N$ 

见图 3 (c).

图 3 (b) 是一个内部无独立源的  $(n-1)$  端口网络, 不难写出它的短路导纳矩阵方程<sup>[3]</sup>:

$$[Y_{sc}][V] = [I] \quad (3)$$

式中  $[Y_{sc}]$  为短路导纳矩阵,  $[V] = [V_1 \ V_2 \ \cdots \ V_{n-1}]^T$  为端口电压列向量,

$$[I] = [I'_1 \ I'_2 \ \cdots \ I'_{n-1}]^T$$

为端口电流列向量. (3) 式的第  $j$  行为

$$y_{j1}V_1 + y_{j2}V_2 + \cdots + y_{jk}V_k + \cdots + y_{j(n-1)}V_{n-1} = I'_j \quad (4)$$

根据多端口短路导纳方程 (3) 式  $[Y_{sc}]$  系数的物理意义可知, (4) 式的  $y_{jk}$  就是构造规则 2 中的  $g_{jk}$  ( $j \neq k$ ),  $y_{ji}$  就是规则 3 中的  $y_{in}$ .

现在再研究图 3 (c). 其中电流  $I''_k$  系由  $N$  的内部独立源作用下的电流, 即证得  $|I''_k|$  就是构造规则 1 中的  $|J_j|$ , 不过相差一个正负号. 这是由于 (2) 式节点电压方程所包含的物理意义决定的, 即 (2) 式的左边为节点电压引起的流出节点的电流代数, 而右边为独立源引起的流入节点的电流代数. 因此, 在构造规则 1 中规定  $J_j$  为流入节点  $j$  的电流. 证毕.

不难理解, 如果网络  $N$  内有初始能量, 只需用独立源来代替这些初始条件, 将它看成是  $N$  内部独立源的一部分, 则定理仍成立.

如果网络  $N$  是线性互易网络,  $N'$  由双向性元件组成, 这时 (3) 式的  $[Y_{sc}]$  是对称阵, 其元素具有  $y_{ik} = y_{ki}$  的特点, 因此  $N$  的等效网络  $N_e$  无须用受控源元件来表征, 这时构造规则 2 和规则 3 可简化. 不难证实有如下推论成立:

**推论** 线性互易子网络  $N$ , 当  $N$  与外电路无耦合, 且它的内节点导纳矩阵为非奇异时, 可按下列两个规则构造其等效网络  $N_e$ :

(1) 如定理的规则 1 所述, 不赘述.

(2) 对节点  $1, 2, \cdots, n$  的每一对节点  $(j, k)$  之间, 给定一个支路导纳  $y_{ik}$  (共有  $n(n-1)/2$  条支路), 它的值等于  $N'$  中节点  $j$  和节点  $k$  之间的  $n$ -端短路转移导纳的负值, 但不能选节点  $j$  或节点  $k$  为参考点, 即

$$y_{ik} = - \left. \frac{J'_j}{V'_k} \right|_{\text{在 } N' \text{ 中当 } V'_1 = V'_2 = \cdots = V'_n = 0, V'_k \neq 0}$$

$$= -\frac{J_k}{V'_i} \Big|_{\text{在 } N' \text{ 中当 } V'_1=V'_2=\dots=V'_n=0, V'_i \neq 0}$$

式中  $J'_j$  或  $J'_k$  为流出节点  $j$  或节点  $k$  的电流。

#### 四、参考节点的转移

当构造出  $N$  的等效网络  $N_e$  后,则整个电路可用图 2(b)表示。以节点  $n$  为参考点的 (2)式可简洁地表示为

$$[Y_n][V_n] = [J_n] \quad (5)$$

其中节点电压列向量  $[V_n] = [V_{a1} V_{a2} \cdots V_{at} V_1 V_2 \cdots V_{n-1}]^T$ 。现若选  $N_e$  中的第  $x$  个节点为参考点,为区别起见,这时的节点电压方程可记为

$$[Y_x][V_x] = [J_x] \quad (6)$$

其中  $[V_x] = [V_{a1} V_{a2} \cdots V_{a(x-1)} V_n V_{a(x+1)} \cdots V_{at} V_1 V_2 \cdots V_{n-1}]^T$ 。  $[V_n]$  和  $[V_x]$  之间的关系为

$$[V_x] = [P][V_n]$$

式中  $[P]$  为变换矩阵<sup>[3]</sup>, 它的第  $x$  列元素均为  $-1$ , 对角线元素除第  $x$  列外均为  $1$ , 除此之外其它元素均为零。它是非奇异的,而且  $\det[P] = -1$ ,  $[P]^{-1} = [P]$ ,  $[P]^2 = [1]$ 。

设关联矩阵  $[A_n]$  和  $[A_x]$  的列支路有相同的编排,则支路电压列向量  $[V]$ , 支路导纳矩阵  $[Y]$ , 电流源列向量  $[I_s]$  以及电压源列向量  $[U_s]$  均相同,因此有

$$[V] = [A_n]^T[V_n] = [A_x]^T[V_x] = [A_x]^T[P][V_n]$$

所以

$$\begin{aligned} [A_n]^T &= [A_x]^T[P] \\ [A_x]^T &= [A_n]^T[P]^{-1} = [A_n]^T[P] \end{aligned} \quad (7a)$$

两边取转置,得

$$[A_x] = [P]^T[A_n] \quad (7b)$$

由于  $[V_x]$  的节点方程为

$$[A_x][Y][A_x]^T[V_x] = [A_x][I_s] - [A_x][Y][U_s]$$

将(7)式代入,得

$$[P]^T[A_n][Y][A_n]^T[P][V_n] = [P]^T[A_n][I_s] - [P]^T[A_n][Y][U_s]$$

亦即

$$[P]^T[Y_n][P][V_n] = [P]^T[J_n] \quad (8)$$

(5),(6),(8)式对比,即得参考点从节点  $n$  转移到节点  $x$  的关系式:

$$[Y_x] = [P]^T[Y_n][P] \quad (9a)$$

$$[J_x] = [P]^T[J_n] \quad (9b)$$

显然,(9)式对计算分析电路图 2(b) 是很有用的,其中只要获得变换矩阵  $[P]$  就可以了。

## 五、示 例

**例 1** 图 4(a) 示出待变换的子网络  $N_B$ 。按构造规则 1, 将  $N_B$  单独画出, 并将节点 1, 2, 3 短接, 见图 4(b)。据此容易求得短路电流  $J_1$  和  $J_2$  (亦即  $I_{s1}$  和  $I_{s2}$ ):

$$I_{s1} = J_1 = \frac{y_4 I_s}{y_1 + y_4} + \frac{y_4 g I_s}{(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)}, \quad I_{s2} = J_2 = -\frac{y_3 I_s}{y_2 + y_3}$$

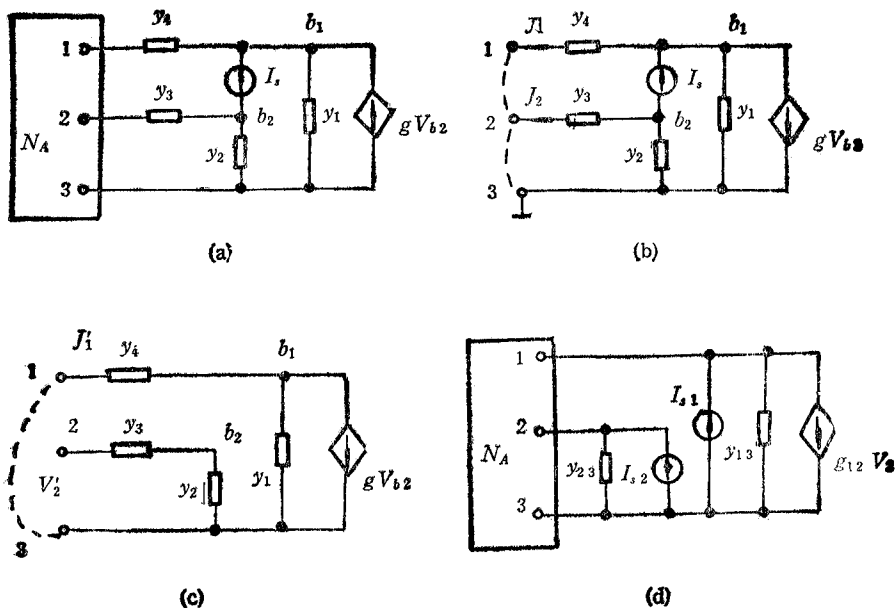


图 4 示例 1

按构造规则 2 和规则 3, 当求  $g_{12}$  时, 将  $N'_B$  单独画出, 见图 4(c)。据此容易求得  $g_{12}$ :

$$g_{12} = \left. \frac{J'_1}{V'_2} \right|_{V'_1=0} = \frac{y_3 y_4 g}{(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)}$$

按类似方法, 可画出求  $g_{21}$ ,  $y_{13}$ ,  $y_{23}$  的电路图(略), 即可算得各量。最后可画出  $N_B$  的等效电路, 如图 4(d) 所示。

$$g_{21} = 0, \quad y_{13} = \frac{y_1 y_4}{y_1 + y_4}, \quad y_{23} = \frac{y_2 y_3}{y_2 + y_3}$$

**例 2** 图 5(a) 示出待变换的另一个子网络  $N_B$  (不含受控源)。按推论构造规则 1 和 2, 可画出求  $y_{12}$  和  $y_{23}$  时的图, 见图 5(b) 和 5(c)。求其它量的图略。最后获得等效子网络  $N_{Be}$ , 见图 5(d), 其中参数为

$$y_{12} = \frac{4}{31} \text{ S}, \quad y_{23} = \frac{72}{31} \text{ S}, \quad y_{31} = \frac{43}{62} \text{ S}; \quad I_{s1} = \frac{9}{31} \text{ A}, \quad I_{s2} = -\frac{16}{31} \text{ A}$$

## 六、结 语

本文证明了  $n$  端等效子网络的构造方法, 指出等效子网络各参数的物理意义和计算

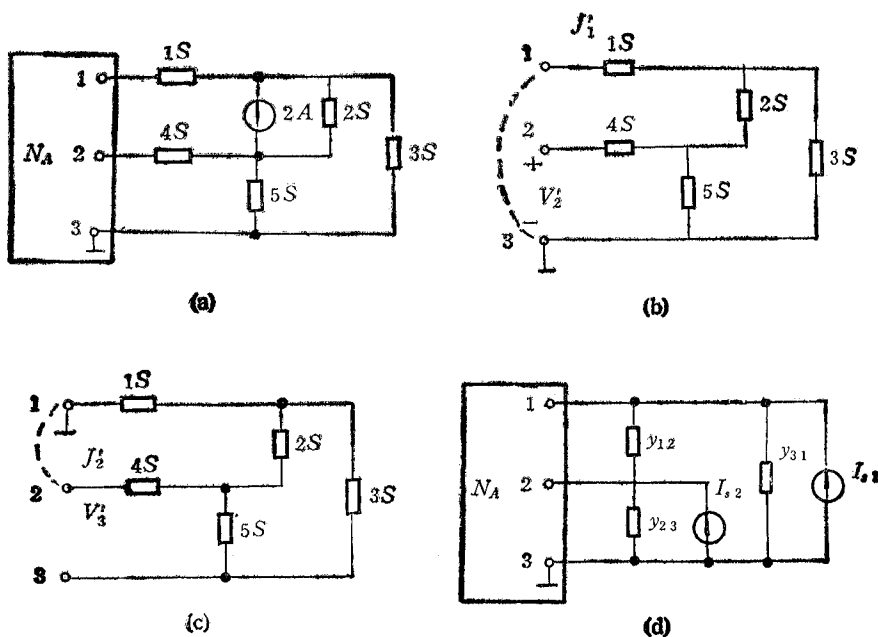


图5 示例2

式子,并探讨了整个电路任意选择参考点的计算问题。这些不仅具有理论意义,而且在分析计算大规模电路时,对提高运算速度和节省内存都有实际工程意义。很明显,当图2(a)中子网络  $N_B$  内节点数  $q$  大大超过关联子网络  $N_C$  的节点数  $n$ ,即  $q \gg n$ ,而且需对子网络  $N_A$  内的支路参数作多种变动分析时,这种  $n$  端等效子网络的构造方法就更显得有意义。

### 参 考 文 献

- [1] T. Ozawa et al., *IEEE Trans. on CAS*, CAS-30(1983)7, 432—440.
- [2] 刘珮仙,黄东泉,电子学报,1989年,第4期,第107—109页.
- [3] 黄东泉,线性电路的等效变换,高等教育出版社,1989年.

## CONSTRUCTION FOR $n$ -TERMINAL EQUIVALENT SUBNETWORK

Huang Dongquan Liu Peixian

(Fuzhou University, Fuzhou 350002)

**Abstract** A constructing method for  $n$ -terminal equivalent subnetwork is developed, and a transformation of voltage equations for transposing reference nodes is given. These should have not only theoretical but also practical significance. And the computing speed can be increased, the memory space can be saved.

**Key words**  $n$ -Terminal subnetwork; Equivalent circuit;  $n$ -Terminal short-circuit admittance function