

一种新的二次时频分布和几种主要 二次时频分布的比较研究¹

刘贵忠 刘志梅

(西安交通大学电子与信息工程学院 信息工程研究所 西安 710049)

摘 要 本文提出一种新的 Cohen 类时频分布并对几种主要 Cohen 类时频分布进行了实验比较研究。结果表明, 基于指数分布 (ED) 和锥形核分布 (CKD) 的复合核分布 (ECKD) 具有更强的抑制交叉干扰性质, 同时几乎不会使 ED 或 CKD 的时频分辨力降低。

关键词 信号处理, 时频分析, Cohen 类时频分布

中图分类号 TN911.7

1 引言

众所周知, 非平稳信号的线性分析如短时傅里叶变换和小波 (包) 变换等总要受到时频分辨不确定性的制约, 经常不能满足许多信号识别和处理任务的要求。在此方面, Wigner-Ville^[1-3] 分布 (WVD) 具有无以伦比的时频高分辨力。但它也存在着致命的缺点: 包含着严重的交叉干扰项 (Cross Terms, 简记作 CT)。此外, 它还不具有非负性。假若不先验地知道信号的一些时频特性, WVD 所固有的 CT 使得根据它难以认识信号的真正时频性质。为消除或者衰减 WVD 中的 CT, 近十年来提出了若干种平滑的 WVD。这些方法对于一定类型的信号确能较好地抑制 CT, 但同时也不同程度地降低了信号的时频分布分辨力。事实上, 小的交叉干扰和高的时频分辨力是两个互斥的性质, 我们只能采取折衷的方法。

上述若干种平滑的 WVD 均属于所谓的 Cohen 类分布^[4]。本文将讨论一般的 Cohen 类分布, 特别是几种主要的被证明为有效的特例: 指数分布 (Exponential Distribution, 简记为 ED 或 Choi-Williams 分布, 简记为 CWD); 锥形核分布 (Cone-shaped Kernel Distribution, 简记为 CKD); 减少干扰分布 (Reduced Interference Distribution, 简记为 RID)。提出了指数锥形核分布 (Exponential-Cone-Shaped Kernel Distribution, 简记为 ECKD)。给出了 ECKD 的离散算法和几种合成信号的几种主要时频分布的实验结果, 并对其性能进行评价。

2 Cohen 类时频分布和几种主要时频分布

众所周知的 Wiener-Khinchine 定理建立了信号的相关函数

$$r(\tau) = \int x(t + \tau)x^*(t)dt \quad (1)$$

与信号功率谱之关系

¹ 1994-08-15 收到, 1995-02-06 定稿

$$|\hat{x}(f)|^2 = \int R(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau. \quad (2)$$

对于非平稳信号, Wigner 定义“自相关函数”为

$$r(t, \tau) = x(t - \tau/2)x^*(t + \tau/2), \quad (3)$$

从而得到“时变功率谱”即 WVD 为

$$W(t, f) = \int r(t, \tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau. \quad (4)$$

类似地可定义“频域频率自相关函数”为

$$R(f, \nu) = \hat{x}(f - \nu/2)\hat{x}(f + \nu/2), \quad (5)$$

以及所谓的模糊函数

$$A(\tau, \nu) = \int R(f, \nu) \exp(i2\pi f\tau) df. \quad (6)$$

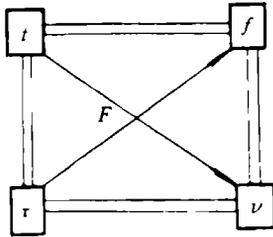


图 1 时间 t 、时移 τ 、频率 f 和频移 ν 的转换关系

对于给定的信号, 二元变量 $r(t, \tau)$, $R(f, \nu)$, $W(t, f)$ 和 $A(\tau, \nu)$ 是同一信号在不同域里的表现形式。只要注意到对应关系: 时移 τ 经傅里叶变换对应于频率位置 f , 而频移 ν 经傅里叶逆变换对应于时间位置 t , 则直接可由图 1 从一种表现形式转换为另一种表现形式。例如, WVD 由其它三个量表出的形式为

$$W(t, f) = \int r(t, \tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \quad (7)$$

$$= \int R(f, \nu) \exp(i2\pi t\nu) d\nu \quad (8)$$

$$= \int A(\tau, \nu) \exp[-i2\pi(f\tau - t\nu)] d\tau d\nu \quad (9)$$

一定的理论分析(比如直接计算几个高斯信号的交叉项)和大量的数值实验表明, 信号的每一对处于不同时频位置的成分都存在着交叉干扰, 且若设此两个时频成分分别位于 (t_1, f_1) 和 (t_2, f_2) 附近, 则交叉项的时频位置处于其中点 $((t_1 + t_2)/2, (f_1 + f_2)/2)$ 附近, 并沿与 (t_1, f_1) 和 (t_2, f_2) 两点之连线垂直的方向振荡。在模糊函数的 (τ, ν) 域里, 信号 WVD 的自项 (Auto Term, 简称为 AT) 位于原点附近, 而交叉项位于 $(\tau, \nu) = (t_2 - t_1, f_2 - f_1)$ 附近。鉴于此, 显然, 若欲抑制 WVD 的 CT, 在时频域 (t, f) 内需要平滑 WVD, 而在模糊函数 (τ, ν) 域内需要突出 $A(\tau, \nu)$

在原点附近的值，而抑制其在远离原点的值。这样，相应于 WVD 的一个确定的平滑化，其在上述四种域内与 WVD 表现形式之关系为

$$\tilde{r} = r *_{1} \phi, \quad (10)$$

$$\tilde{R} = R * \Phi, \quad (11)$$

$$\tilde{W} = W * \psi, \quad (12)$$

$$\tilde{A} = A \cdot \Psi, \quad (13)$$

(*₁ 表示关于第一变量卷积，* 表示关于两个变量全卷积。) 其中核函数在该四种域中的表现形式依次为 ϕ , Φ , ψ 和 Ψ ，它们之间存在着简单的傅氏变换关系，也适合于图 1 所示之关系。例如， ψ 用其余三种核函数表示为

$$\psi(t, f) = \int \phi(t, \tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \quad (14)$$

$$= \int \Phi(f, \nu) \exp(i2\pi t\nu) d\nu \quad (15)$$

$$= \int \Psi(\tau, \nu) \exp[-i2\pi(f\tau - t\nu)] d\tau d\nu. \quad (16)$$

注意，关系 (10) ~ (13) 式右端的运算 *₁, * 和 \bullet 亦同样按图 1 所示的方式经由傅氏变换所决定。与在 WVD 情形一样，对应于平滑化 WVD 在四种不同域中的表现形式 \tilde{r} , \tilde{R} , \tilde{W} , 和 \tilde{A} 也具有完全相同的关系，比如说，(7), (8), (9) 式仍然成立，如果将 r, R, W 和 A 依次置换为 $\tilde{r}, \tilde{R}, \tilde{W}$, 和 \tilde{A} 的话。这种类型的时频分布是 Cohen 于 1966 年提出的^[4]，现广泛地称之为 Cohen 类分布。近年来，学者们提出了许多对应着不同种核函数的时频分布，其中较为有效和著名的有 WVD, ED(Choi-Williams)^[5], CKD(Zhao-Atlas-Marks)^[6], 和 RID(Jeong-Williams)^[7]。在时间自相关域中相应的核函数 $\phi(t, \tau)$ 为

$$\text{WVD: } \delta(t); \quad (17)$$

$$\text{ED: } (1/\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}) \exp[-t^2/(4\tau^2/\sigma)]; \quad (18)$$

$$\text{CKD: } \begin{cases} g(\tau), & |t| < |\tau|/2; \\ 0, & |t| \geq |\tau|/2; \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{RID: } (1/|\tau|)s(t/\tau), \text{ 其中函数 } s \text{ 满足条件:}$$

$$s(\alpha) = 0, \quad |\alpha| > 1/2 \text{ 时}, \hat{s}(f) \in R, \hat{s}(0) = 1, d\hat{s}(f)/df|_{f=0} = 0. \quad (20)$$

为了兼顾 ED 和 CKD 的特性，我们提出采用如下的 (t, τ) 域核函数来定义相应的时频分布 ECKD :

$$\text{ECKD: } \begin{cases} (g(\tau)/\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}) \exp[-t^2/(4\tau^2/\sigma), & |t| < |\tau|/2; \\ 0, & |t| > |\tau|/2. \end{cases} \quad (21)$$

一方面，ECKD 能够同时抑制 ED 和 CKD 所能抑制的交叉项；另一方面，ECKD 的时频分辨力几乎不会使 ED 或 CKD 的时频分辨力降低 (参见后文的例子)。表 1 和表 2 分别罗列对于时频分布所期望的性质和上述五种时频分布所实际满足的性质。

表 1 对于时频分布所期望的性质

p0	非负性	$T(t, f) \geq 0$, 对任意 t, f ;
p1	实值性	$T(t, f) \in R$
p2	时移不变性	若 $g(t) = f(t - t_0)$, 则 $T_g(t, f) = T_f(t - t_0, f)$
p3	频移不变性	若 $g(t) = f(t) \exp(i\omega_0 t)$ 则 $T_g(t, f) = T_f(t, f - f_0)$
p4	时间边缘	$\int T(t, f) df = f(t) f^*(t)$
p5	频率边缘	$\int T(t, f) dt = F(f) F^*(f)$
p6	瞬时频率	$[\int f \cdot T(t, f) df / \int T(t, f) df] = f_f(t)$
p7	群延时	$[\int t \cdot T(t, f) dt / \int T(t, f) dt] = t_f(t)$
p8	时域支持性	若 $ t \geq t_0$ 时, $f(t) = 0$, 则 $T(t, f) = 0$ 当 $ t \geq t_0$
p9	频域支持性	若 $ f \geq f_0$ 时, $F(f) = 0$, 则 $T(t, f) = 0$ 当 $ f \geq f_0$

表 2 五种时频分布的性质

	p0	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9
WD		√	√	√	√	√	√	√	√	√
ED		√	√	√	√	√	√	√		
CKD		√	√	√					√	√
RID		√	√	√	√	√	√	√	√	√
ECKD		√	√	√					√	√

3 ECKD 的离散算法

这一节我们介绍 ECKD 的离散算法。对于离散时间信号, 参照 (21) 式, ECKD 可定义为

$$CE_f(n, \theta) = 2 \sum_{\tau} \exp(-i2\theta\tau) \left[\sum_{\mu=-\lceil\tau/a\rceil}^{\lceil\tau/a\rceil} \frac{g(\tau)}{\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{\sqrt{4\tau^2/\sigma}}\right) \times f(n-\mu+\tau)f^*(n-\mu-\tau) \right], \quad (22)$$

其中, n, τ, μ 是离散变量, θ 是连续变量, $a \in [1, +\infty)$ 。

ECKD 具有实值性 (p1)、时移不变性 (p2)、频移不变性 (p3)、时域支持性质 (p8)、频域支持性质 (p9)、减少干扰性 (p10) 等性质。

设 $\theta = k\pi/N$, 则 (22) 式改写成:

$$CE_f(n, k) = 2 \sum_{\tau} \exp(-i2\pi k\tau/N) \left[\sum_{\mu=-\lceil\tau/a\rceil}^{\lceil\tau/a\rceil} \frac{g(\tau)}{\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{\sqrt{4\tau^2/\sigma}}\right) \times f(n-\mu+\tau)f^*(n-\mu-\tau) \right] \quad (23)$$

利用 FFT 技术对 $[\cdot]$ 内容实现离散傅里叶变换, 即可对此分布进行仿真实现。

4 信号的几种时频分布仿真实验比较

在这一节里, 我们利用两个合成信号进行仿真实验, 做出它们的几种二次时频分布, 并且对实验结果进行比较。

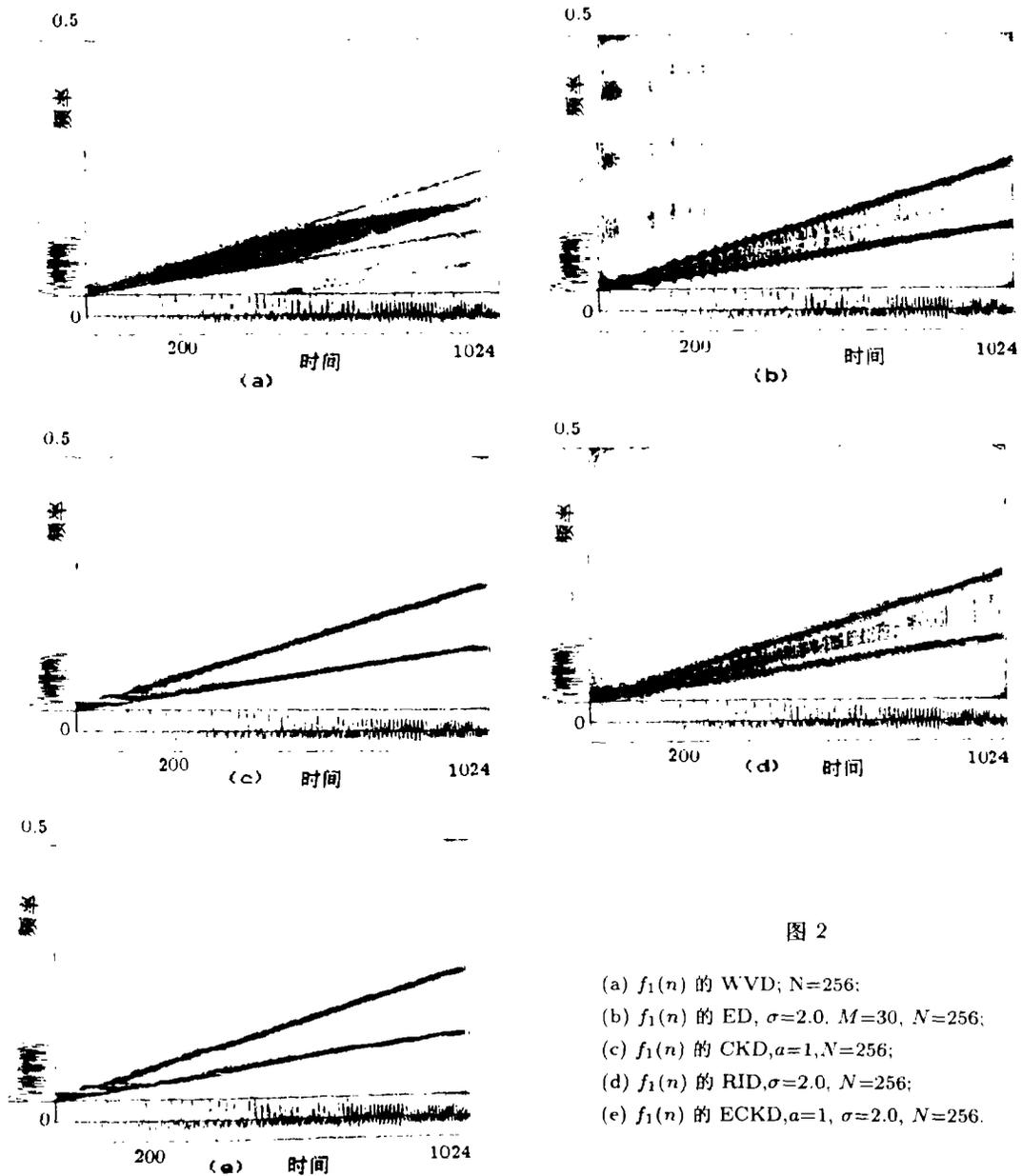


图 2

- (a) $f_1(n)$ 的 WVD; $N=256$;
 (b) $f_1(n)$ 的 ED, $\sigma=2.0$, $M=30$, $N=256$;
 (c) $f_1(n)$ 的 CKD, $a=1$, $N=256$;
 (d) $f_1(n)$ 的 RID, $\sigma=2.0$, $N=256$;
 (e) $f_1(n)$ 的 ECKD, $a=1$, $\sigma=2.0$, $N=256$.

这两个合成信号的形式如下：

$$f_1(n) = \cos[2\pi(n/32)(n/256)] + \cos[2\pi(n/16)(n/256)], \quad (24)$$

$$f_2(n) = \begin{cases} \cos(2\pi n/4) + \cos(2\pi n/8), & 101 \leq n \leq 300; \\ \cos[\pi/2(0.5n - 301)n/1000] + \cos[\pi/2(1024 - 0.5n)n/1000], & 301 \leq n \leq 1024; \\ 0 & \text{其它;} \end{cases} \quad (25)$$

其中 $f_1(n)$ 是线性调频信号，它在每一时刻由两个频率分量组成，这两个频率分量都随时间的增长而增大，但其变化速率不同。 $f_2(n)$ 是一个有限持续期的分段函数。 $f_2(n)$ 首先是 100 个样点的“零值区”，随后是两个频率恒定的分量组成的信号，最后是线性调频信号，在每一时刻由两

个频率分量组成, 其中一个频率分量随时间的增长而增大, 另一个频率分量随时间的增长而减少, 但其变化速率相同。

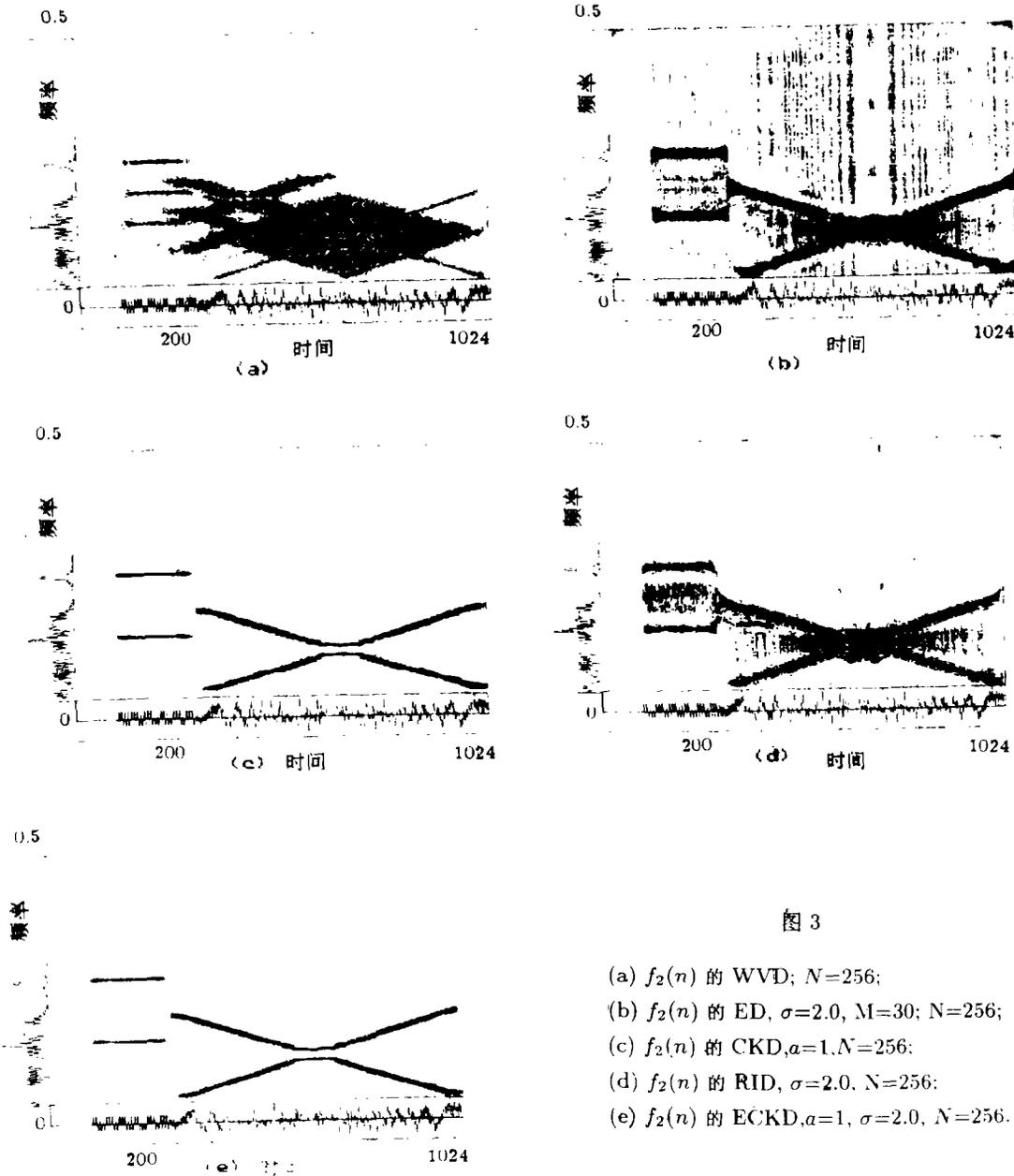


图 2(a) ~ 图 2(e) 示出了 $f_1(n)$ 用五种时频分布实现的结果。图 3(a) ~ 图 3(e) 示出了 $f_2(n)$ 用五种时频分布实现的结果。图中的横坐标表示时间, 设采样率为 1, 共有 1024 个采样点; 纵坐标表示频率, 0.5 表示信号的最高频率 (相对于采样为 1); 图 2(a) 和图 3(a) 示出了 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 的 WVD。由图可见, WVD 具有非常高的时频分辨力, 但是它不具有抑制交叉干扰的能力, 因此不能正确表示多分量信号的时频分布。在不了解信号内容的情况下, 会导致错误的结论。图 2(b) 和图 3(b) 示出了 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 的 ED。ED 克服了 WVD 的这一缺点, 可以在保持较

高分辨力的同时抑制交叉干扰, 正确地表示出信号的内容。遗憾的是, ED 不能完全满足时域和频域的支持性质。图 2(c) 和图 3(c) 示出了 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 的 CKD。它不仅具有很高的时频分辨力, 而且抑制交叉干扰的能力也很强。它的主要缺点是对于线性调频信号的斜率有限制, 当线性调频信号的斜率与锥形核的斜率接近时, 它就不能有效地抑制交叉干扰, 并且它也不能满足时间边缘、频率边缘等性质。RID 综合了以上几种分布的思想, 它可以满足表 1 中除非负性以外的所有性质。图 2(d) 和图 3(d) 示出了 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 的 RID。ECKD 与 CKD 类似, 它也能在保持很高时频分辨力的同时有效的抑制交叉干扰, 并且克服了 CKD 对斜率的限制, 图 2(e) 和图 3(e) 示出了 $f_1(n)$ 、 $f_2(n)$ 的 ECKD, 由图可见, ECKD 实现的时频分布效果最好。

5 结 论

理论分析和仿真实验表明, 基于指数分布 (ED) 和锥形核分布 (CKD) 的复合核分布 (ECKD) 具有更强的抑制交叉干扰性质, 同时几乎不会使 ED 或 CKD 的时频分辨力降低。特别是, 新的时频分布 ECKD 能够克服 CKD 对信号调频斜率的影响。

参 考 文 献

- [1] Wigner E P. Phys. Rev., 1932, 40(2): 749-759.
- [2] Ville J. Cables et Transmission, 1948, 2A, 61-74.
- [3] Classen T A C M, Mecklenblauker W F G. Philips J. Res., 1980, 35(6): 217-250, 276-300, 372-389.
- [4] Cohen L. J. Math. Phys., 1966, 7: 781-786.
- [5] Choi H I, Williams J W. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(6): 862-871.
- [6] Zhao Y, Atlas L, Marks R. IEEE Trans. on ASSP, 1990, ASSP-38(7): 1084-1091.
- [7] Jeong J, Williams J W. IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(2): 402-411.

A NEW QUADRATIC TIME-FREQUENCY DISTRIBUTION AND A COMPARATIVE STUDY OF SEVERAL POPULAR QUADRATIC TIME-FREQUENCY DISTRIBUTIONS

Liu Guizhong Liu Zhimei

(Information Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract A new quadratic time-frequency distribution (TFD) with a compound kernel is proposed and a comparative study of several popular quadratic TFD is carried out. It is shown that the new TFD with compound kernel has stronger ability than the exponential distribution(ED) and the cone-shaped kernel distribution(CKD) in reducing cross terms, meanwhile almost not decreasing the time-frequency resolution of ED or CKD.

Key words Signal processing, Time-frequency analysis, Time-frequency distribution of Cohen class

刘贵忠: 男, 1963 年生, 教授, 主要从事非平稳信号的分析、处理、编码、参数估计及模式识别等方面的理论、方法和应用工作。

刘志梅: 女, 1972 年生, 通信与电子系统专业硕士生。