

基于相位干涉仪阵列多组解模糊的波达角估计算法研究

龚享铤^① 袁俊泉^② 苏令华^②

^①(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

^②(空军雷达学院 武汉 430010)

摘要 该文针对利用相位干涉仪估计波达角过程中的相位模糊的问题,提出了一种利用多个相邻阵元之间的相位差以及它们的间距比进行多组解模糊的方法,并且分析了这种方法得到正确波达角估计值的条件。仿真试验验证了上述结论的正确性。

关键词 波达角估计, 相位干涉仪, 解模糊

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)01-0055-05

A Multi-pare Unwrap Ambiguity of Interferometer Array for Estimation of Direction of Arrival

Gong Xiang-yi^① Yuan Jun-quan^② Su Ling-hua^②

^①(School of Electronic Sci. and Eng., Nat. Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

^②(Airforce Radar Academy, Wuhan 430010, China)

Abstract In the background of phase ambiguity in using phase interferometer to estimate the direction of arrival, a new method is proposed for estimation direction of arrival by using interferometer array with the algorithm named as multi-pare unwrap ambiguity. The possibility of correction is analyzed. The conclusion is verified by simulation result.

Key words Estimation direction of arrival, Phase interferometer, Unwrap ambiguity

1 引言

相位干涉仪被广泛应用于波达角的估计领域^[1-3],它具有精度高、结构简单、原理清晰、观测频带宽的优点。一般的相位干涉仪由两个接收阵元、两个接收机和一个比相器构成,两个阵元接收到信号的相位差 φ 与波达角 θ 、阵元间距 D 、信号波长 λ 的关系为

$$\varphi = \frac{2\pi D}{\lambda} \sin(\theta) + v \quad (1)$$

其中 v 为相位差 φ 的观测噪声,不妨假设其均值为0的白噪声。通过测量相位差 φ 可以得到信号的波达角估计值 $\hat{\theta} = \arcsin(\varphi\lambda/(2\pi D))$,通过一阶扰动方法得到其估计方差 $\text{var}(\hat{\theta}) = (\lambda/(2\pi D \cos \theta))^2 \sigma_v^2$,其中 σ_v^2 为噪声方差。估计方差通常采用增加阵元间距 D 的方法提高波达角的估计精度,一般 $D \gg \lambda/2$,使得 $|\varphi| \gg \pi$,由于相位干涉仪的输出 φ 的范围是 $[-\pi, \pi)$,所以它是一个以 2π 为模糊的观测值:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi \bmod(2\pi) \\ \varphi &= \varphi + 2\pi M \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 M 为未知的模糊数,为了对式(2)进行解模糊处理,一

般是增加一个短基线($D < \lambda/2$)的相位干涉仪,通过它得到一个不模糊的 θ 估计值(其精度远不如长基线相位干涉仪对 θ 的估计精度),并对测量得到的长基线相位干涉仪的相位差 φ 进行解模糊处理,最终得到高精度的 θ 估计值^[3]。这种方法有两个局限性。第一^[4],对于宽带的接收阵元,如接收范围为2GHz-8GHz,最低的接收频率决定了阵元的物理尺寸,而最高的接收频率决定了短基线干涉仪的基线长度,使得在半波长的范围内无法安装两个接收阵元;第二,由于短基线相位干涉仪对波达角 θ 的估计精度有限,在利用它对长基线干涉仪的 φ 进行解模糊处理时可能得到错误的模糊数,导致波达角估计的误差太大。在文献[5]中提出了一种基于参差距离的相位差解模糊算法,在两个干涉仪的基线长度比满足参差关系的条件下(它们的基线长度都可以大于 $\lambda/2$),可以利用这种参差关系对相位干涉仪的观测相位差进行解模糊处理,从而完成对波达角的估计。同理,对于多个(3个以上)阵元的情况,只要它们的距离比满足参差关系,采用多维的整数搜索可以对观测相位差进行解模糊处理。本文在文献[5]的基础上提出了一种由多阵元构成的相位干涉仪阵列相

位差多组解模糊的波达角估计算法,相对于文献[5]的参差距离解模糊算法,这种方法有两个优点,第一,本文的方法并不要求各个相位干涉仪的基线比满足参差关系,只要求所有的距离比的最大公因子(GCD)为1;第二,因为算法采用了多组解模糊的方法,只需进行多次的二维整数搜索计算,不必进行多维的整数搜索计算,因此计算量较小。

本文的第2节针对多阵元构成的相位干涉仪阵列在对波达角估计过程中的相位模糊问题提出了多组解模糊的波达角估计算法,第3节分析了正确解模糊的条件,第4节对本文的结论进行了仿真试验。

2 相位干涉仪阵列多组解模糊的波达角估计算法

2.1 相位干涉仪阵列

如图1所示,考虑在同一条直线上分布有 $N+2$ 个阵元的相位干涉仪阵列,以第1个阵元为基准,构成了 $N+1$ 个相位干涉仪,它们的基线长度分别为 D_0, D_1, \dots, D_N ,基线长度值比 $D_0 : D_1 : \dots : D_N = P_0 : P_1 : \dots : P_N$,其中 P_n 分别为正整数,在阵元的分布上并不要求 P_n 之间满足参差的关系,只要求它们的最大公因子为1,即 $\text{GCD}(P_0, P_1, \dots, P_N) = 1$,从图1可以看出 $P_0 < P_1 < \dots < P_N$ 。在考虑辐射源处于远场位置,接收信号的波长为 λ ,波达角为 θ 的情况下,各个相位干涉仪的相位差为信号到达的相位差和观测噪声之和:

$$\varphi_n = \frac{2\pi D_n}{\lambda} \sin(\theta) + v_n \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3)$$

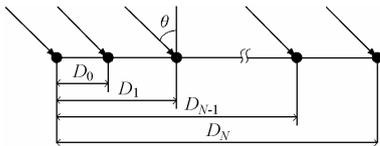


图1 相位干涉仪阵列的几何示意图

与两个阵元的相位干涉仪情况相同,实际观测得到的相位差 ϕ_n 是以 2π 为模糊的观测值:

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \varphi_n \bmod(2\pi) \\ \varphi_n &= \phi_n + 2\pi M_n, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 M_n 为第 n 个相位干涉仪的观测相位差的模糊数。直观而言,可以在最小均方误差的准则下对式(4)构成的方程组进行 $N+1$ 维的整数搜索计算求得各个模糊数,具体的计算公式为

$$[M_1, M_2, \dots, M_N] = \arg \min_{M_1, M_2, \dots, M_N} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{\phi_n + 2\pi M_n}{P_n} - a \right)^2 \right) \quad (5)$$

其中 $a = \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\phi_n + 2\pi M_n}{P_n} \right)$ 。当 N 较大时(如 $N > 4$),计

算量十分大。所以必须考虑对这种多维搜索计算进行降维处理,减少解模糊时所需的计算量。

2.2 多组相位差解模糊的波达角估计算法

考虑到对式(5)的 $N+1$ 维整数搜索计算量较大,如果单独对第 $n-1$ 个干涉仪和第 n 个干涉仪的相位差进行解模糊处理,这只需进行二维的整数搜索计算,但是这样得到的相位差并不是完全解模糊的相位差,具有多值性。若以此为基础,在满足某种正确解模糊的条件下(在第3节将对此进行讨论),从中选取一组模糊数 M_1, M_2, \dots, M_n 使得式(5)的右边的每一项都达到最小。首先给出命题。

命题1 在不存在相位差噪声干扰的情况下,任意两个相邻的相位差满足

$$\frac{\phi_n + 2\pi M_n}{P_n} = \frac{P_n}{P_{n+1}} \quad (6)$$

一共有 $\text{GCD}(P_n, P_{n+1})$ 的模糊数 M_n, M_{n+1} 在 $[-P_n/2, P_n/2]$ 和 $[-P_{n+1}/2, P_{n+1}/2]$ 的范围内满足上式,记为 $(M_n^n(k^n), M_{n+1}^n(k^n))$, $k^n = 1, 2, \dots, \text{GCD}(P_n, P_{n+1})$, $[x], [x]$ 分别为对 x 的下取整和上取整。在所有的相位干涉仪的基线长度 D_n 满足 $D_n < \frac{P_n}{2} \lambda$ 的条件下,存在唯一一组 $(M_1^1(k^1), M_2^1(k^1), (M_2^2(k^2), M_3^2(k^2)), \dots, (M_{N-1}^{N-1}(k^{N-1}), M_N^{N-1}(k^{N-1}))$,它满足 $M_n^{n+1}(k^n) = M_{n+1}^{n+1}(k^{n+1})$,记 $M_{n+1} = M_{n+1}^n(k^n) = M_{n+1}^{n+1}(k^{n+1})$,则 M_1, M_2, \dots, M_N 为所有相位干涉仪相位差的模糊数。

证明 证明的详细过程见附录I。

命题1给出了没有噪声条件下,从多组 $(M_n^n(k^n), M_{n+1}^n(k^n))$ 选取相位差的模糊数的方法。当存在噪声干扰时,使得式(6)的等号不完全成立,计算 $R = \text{round}\left(\frac{P_{n+1}\phi_n - P_n\phi_{n+1}}{2\pi}\right)$,在 $[-P_n/2, P_n/2]$ 和 $[-P_{n+1}/2, P_{n+1}/2]$ 的范围内对不定方程 $P_{n+1}M_n - P_nM_{n+1} = R$ 求解得到 $\text{GCD}(P_n, P_{n+1})$ 组解: $(M_n^n(k^n), M_{n+1}^n(k^n))$ 。在得到模糊数后,就可以进行相位差解模糊处理和波达角的估计。

综上所述,基于多组解模糊的相位干涉仪阵列的波达角估计算法的具体步骤为

(1) 将 N 个相位干涉仪分成两两相邻的 $N-1$ 组,对每一组的相位差进行解模糊处理,每一组得到 $\text{GCD}(P_n, P_{n+1})$ 对模糊数: $(M_n^n(k^n), M_{n+1}^n(k^n))$ 。

(2) 在第1步得到的 N 组数据中,每组数据的 $\text{GCD}(P_n, P_{n+1})$ 个解中寻取一个 $(M_n^n(k^n), M_{n+1}^n(k^n))$,使得它

们满足 $M_n^n(k^n)=M_{n+1}^{n+1}(k^{n+1})$, 记 $M_{n+1}=M_{n+1}^n(k^n)=M_{n+1}^{n+1}(k^{n+1})$, 则 M_1, M_2, \dots, M_N 为所有相位干涉仪相位差的模糊数。

(3) 对各个相位干涉仪的相位差进行解模糊处理得到 $\varphi_n = \phi_n + 2\pi M_n$, 从而得到波达角的估计值 $\hat{\theta}$ 。

算法的关键在于第 1 步, 利用相邻两个相位干涉仪的基线比进行解模糊处理得到几组模糊数, 其中一组为实际模糊数。根据命题 I, 第 2 步选取一组正确模糊数。第 3 步是解模糊处理和波达角估计计算, 通常采用最小二乘方法, 在此不做赘述。

2.3 算法性能分析

从算法的计算量分析, 与式(5)的基于基线长度比的参差关系解模糊波达角估计算法比较, 本文介绍的算法的计算过程中不需进行多维整数搜索计算, 只需进行 $N-1$ 次二维的搜索计算。

第 1 步 计算大约需要进行 $N + \sum_{n=1}^{N-1} P_n P_{n+1}$ 次乘法计算和 $N + \sum_{n=1}^{N-1} P_n P_{n+1}$ 次的加法计算;

第 2 步 是一个判断过程, 计算量不大;

第 3 步 解模糊和对波达角的估计过程中大约需要 $2N^2$ 次乘法计算和 $3N$ 次加法计算。例如, $N=5$, $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = (30, 75, 96, 200, 240)$, 算法大约需要进行 2×10^6 次乘法计算和 10^7 次加法计算; 如果采用式(5)进行波达角估计, 需要 10^{11} 左右的乘法计算。

3 正确解模糊条件分析

为了得到正确的波达角估计值, 关键在第 1 步的计算结果必须包含一项实际模糊数的解。为了说明正确解模糊的条件, 假设各个相位差噪声 v_n 具有相同的概率分布, 其分布范围为 $[-q, q]$, q 为正实数, 下面给出正确解模糊与噪声分布参数 q 、基线长度比参数 P_n 的关系。

命题 II 如果相位差噪声的分布范围参数 q 满足

$$q < \min \left(\frac{\text{GCD}(P_n, P_{n+1})}{P_n + P_{n+1}} \pi \right), \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

则算法可以得到所有模糊数 M_n 在模 P_n 下的正确解。

证明 详细过程见附录 II。

在一般的情况下, 相位差噪声并不分布在有限范围内, 可以通过其二阶统计量进行分析。假设 v_n 是一个 0 均值、方差为 σ_v^2 的高斯白噪声, 从命题 2 可以得到正确解模糊的条件为

$$\sigma_v < \min \left(\frac{\text{GCD}(P_n, P_{n+1})}{P_n + P_{n+1}} \frac{\pi}{D} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

其中 D 为常系数, 通常情况下取 $D=3$, 每一步都可以得到 99.7% 的正确解模糊概率, 为了正确解模糊更可靠, 可以将 D 取更大的值, 如 $D=6$ 。

如图 1 所示, 假设相位干涉仪阵列由 6 个阵元构成, 以 0 阵元为基准分布在水平直线上, 为了比较基线参数之间非互素性的优点, 采用两种阵元放置方案, 其位置分别为

$$\left\{ 0, \frac{24\lambda}{2}, \frac{30\lambda}{2}, \frac{75\lambda}{2}, \frac{125\lambda}{2}, \frac{250\lambda}{2} \right\}, \left\{ 0, \frac{24\lambda}{2}, \frac{57\lambda}{2}, \frac{93\lambda}{2}, \frac{167\lambda}{2}, \frac{251\lambda}{2} \right\},$$

第 1 种方案中的 P_n 与 P_{n+1} 存在比较大的公因子, 第 2 种方案中的 P_n 与 P_{n+1} 之间基本互素。由命题 II 可知, 为了得到正确的解模糊处理和波达角估计值, 分别要求 $q < \pi/9$, $q < \pi/418$ 。对于第 1 种阵元放置方案, 当取 $D=3$ 时, 由式(8)推得相位差噪声的方差 $\sigma_v < \pi/27$, 因此相位干涉仪的接收信号的信噪比必须大于 14dB, 在一般的情况下, 这种信噪比要求容易得到满足的。对于第 2 种情况, 由于要求 $q < \pi/418$, 在一般的情况下, 相位干涉仪很难达到如此高的技术要求。从上面的分析可以看出: 在保持 $\text{GCD}(P_1, P_2, \dots, P_N)=1$ 的前提下, 适当地提高两个相邻的干涉仪的基线比参数的最大公因子 $\text{GCD}(P_n, P_{n+1})$, 可以降低正确解模糊条件对相位差噪声的要求。

4 仿真试验

如图 1 所示, 假设相位干涉仪阵列由 6 个阵元构成, $N=5$, 阵元分布采用两种方案。第 1 种方案的位置为 $\left\{ 0, \frac{24\lambda}{2}, \frac{30\lambda}{2}, \frac{75\lambda}{2}, \frac{125\lambda}{2}, \frac{250\lambda}{2} \right\}$ 。第 2 种方案的位置为 $\left\{ 0, \frac{6\lambda}{2}, \frac{23\lambda}{2}, \frac{47\lambda}{2}, \frac{75\lambda}{2}, \frac{83\lambda}{2} \right\}$ 。首先验证命题 II 的正确性, 假

设各个相位干涉仪的观测噪声均匀分布在 $[-q, q]$ 的范围内, 其中 q 为一个真实数。从命题 II 可以看出, 对于第 1 种方案当 $q < \pi/9$ 时, 算法就能够完全正确地进行解模糊处理; 对于第 2 种方案当 $q < \pi/158$ 时, 算法才能够完全正确地进行解模糊处理。在仿真试验选取 q 在 $[0, 3\pi/20]$ 的范围内变化, 目标处于 $\theta = \pi/4$ 的位置, 进行 1000 次的 Monte-Carlo 试验, 可以得到正确解模糊的统计概率和 q 的关系, 如图 2 所示。可以看出, 对于第 1 种方案, 统计曲线在 $q = 0.35$ 处是一个转折点, 当 $q < 0.35$ 时, 得到正确结果的统计概率为 1, 当 $q > 0.35$ 时, 会出现错误的估计结果, 并且随着 q 的增大,

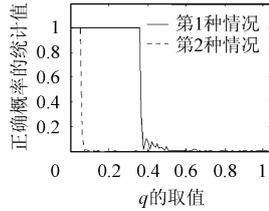


图2 命题2的验证仿真试验

正确概率随之减小；由于第2种方案，只有当 q 很小时才能得到正确的波达角估计值。仿真试验表明命题2给出的 q 的选取是正确解模糊的必要条件，也说明了适当的增加两个相邻的干涉仪的基线比参数的最大公因子，可以降低正确解模糊条件对相位差噪声的要求。

然后讨论相位干涉仪阵列的各个相位差的噪声干扰为高斯白噪声的情况下，噪声方差与得到正确估计结果的统计关系。在其它条件与图2的仿真试验相同的情况下，假设各个相位干涉仪的观测噪声服从相同的高斯分布，并且相互独立，它们的方差为 σ_v^2 ， σ_v^2 在 $[-40\text{dB}, 10\text{dB}]$ 的范围内变化，对于每一种情况进行1000次的Monte-Carlo试验，可以得到正确解模糊的统计概率和 σ_v^2 的关系，如图3所示。从图3可以看出，随着观测噪声方差的减小，得到正确波达角估计的概率随之增大。对于第1种阵元分布的方案，当 $\sigma_v^2 < -15\text{dB}$ （相当于相位差的测量精度为 0.18rad ）时，正确概率已经相当高了；对于第2种阵元分布的方案，要求 $\sigma_v^2 < -32\text{dB}$ （相当于测量精度为 0.025rad ）。

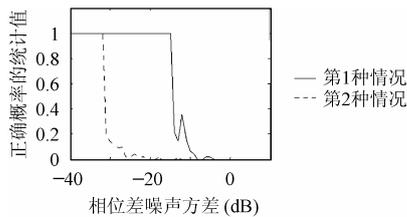


图3 正确解模糊概率与噪声方差的统计关系

5 结束语

本文通过对相位干涉仪阵列观测得到的含有模糊的相位差进行多组解模糊处理得到各个相位干涉仪无模糊的相位差，从而得到波达角 θ 的估计值。讨论了影响得到正确估计结果的关键在于各步正确解模糊，并且分析了正确解模糊的条件。通过仿真试验验证了正确解模糊的条件，并且对噪声方差与正确概率进行了仿真分析，表明在一般的相位干涉仪能够满足正确解模糊的技术要求。

附录

附录 I 证明命题 I

第1步 证明命题I的前半部分，因为在没有噪声干扰的情况下，使得任意两个相邻的相位差满足：

$$(\phi_n + 2\pi M_n) : (\phi_{n+1} + 2\pi M_{n+1}) = P_n : P_{n+1} = Q_n : Q_{n+1} \quad (\text{A-1})$$

其中 Q_n 与 Q_{n+1} 满足互素的关系，所以 M_n, M_{n+1} 在 $[[-P_n/2], [P_n/2]]$ 和 $[[-P_{n+1}/2], [P_{n+1}/2]]$ 一共有GCD(P_n, P_{n+1})组解。

第2步 证明命题I的后半部分，存在性是显而易见的。然后证明这组解的唯一性，假设存在另一组解 M'_1, M'_2, \dots, M'_N 同样满足命题I的要求，则 $M_1^t, M_2^t, \dots, M_N^t$ 和 M'_1, M'_2, \dots, M'_N 满足：

$$\left. \begin{aligned} (\phi_1 + 2\pi M_1^t) : (\phi_2 + 2\pi M_2^t) : \dots : (\phi_N + 2\pi M_N^t) &= P_1 : P_2 : \dots : P_N \\ (\phi_1 + 2\pi M'_1) : (\phi_2 + 2\pi M'_2) : \dots : (\phi_N + 2\pi M'_N) &= P_1 : P_2 : \dots : P_N \end{aligned} \right\} (\text{A-2})$$

如果 $M_1^t, M_2^t, \dots, M_N^t$ 与 M'_1, M'_2, \dots, M'_N 不同，则得到：

$$(M_1^t - M'_1) : (M_2^t - M'_2) : \dots : (M_N^t - M'_N) = P_1 : P_2 : \dots : P_N \quad (\text{A-3})$$

又因为 P_1, P_2, \dots, P_N 的最大公因子为1，所以式(A-3)中的

$$(M_n^t - M'_n) = kP_n, \text{ 所以 } M'_n \text{ 不在 } [[-P_n/2], [P_n/2]] \text{ 范围内,}$$

即 M_n 在 $[[-P_n/2], [P_n/2]]$ 内的解是唯一解。证

毕

附录 II 证明命题 II

在存在噪声干扰的情况下，假设 $M_1^t, M_2^t, \dots, M_N^t$ 为各个相位差的实际模糊数。因为

$$\varphi_n = \varphi'_n + v_n = \phi_n + 2\pi M_n^t$$

φ_n 为实际的相位差， φ'_n 为不含噪声的相位差， ϕ_n 为观测相位差， $\phi_n = \varphi'_n + v_n - 2\pi M_n^t$ ，将其代入算法的第1步，整理得到

$$R = \text{round} \left(\frac{Q_{n+1}v_n - Q_n v_{n+1} - Q_{n+1}M_n^t + Q_n M_{n+1}^t}{2\pi} \right) \quad (\text{A-4})$$

只要 $\left| \frac{Q_{n+1}v_n - Q_n v_{n+1}}{2\pi} \right| < 0.5$ ，上式的 R 就等于无噪声干扰的情况。如果 v_n 的分布范围为 $[-q, q]$ ，为了得到正确的模糊数解，要求满足式(7)。证毕

参考文献

- [1] Dybdal R B. Monopulse resolution in interferometry. *IEEE Trans.*

- on Aerospace and Electronic Systems*, 1986, 22(1): 177 – 183.
- [2] Messer H, Singal G. On the achievable DF accuracy of two kinds of active interferometers. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, 32(3): 1158 – 1164.
- [3] Kaufman M G. Radio interference phase channel combiner mod II. *IEEE Trans. on Space Electronics and Telemetry*, 1964, 10(1): 116 – 123.
- [4] Sundaram K R, Ranjan K M. Modulo conversion method for estimation the direction of arrival. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2000, 36 (4): 1391 – 1396.
- [5] 龚享铤, 袁俊泉等. 基于参差距离的相位差变化值的解模糊方法研究. *信号处理*, 2003, 19(4): 308 – 311.
- [6] William S C, James B Y, Vernon L B. A noise insensitive solution to an ambiguity problem in spectral estimation. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1989, 25 (5): 729 – 732.
- 龚享铤: 男, 1973 年生, 博士生, 研究方向为现代信号处理、单站无源定位技术.